Олександр Рудик

Аксіоматичний підхід до теорії множин. Нелогічні аксіоми системи Цермело — Френкеля ZF

1. Передумови створення

Аксіоматична теорія множин напрям у математичній логіці, присвячений вивченню фраґментів змістовної теорії множин методами математичної логіки. З цією метою фраґменти теорії множин подають у вигляді аксіоматичної теорії. В основі сучасної теорії множин лежить система аксіом, які приймають без доведення і з яких виводять усі теореми теорії множин. Передумовами створення такої теорії стало відкриття деяких парадоксів (антиномій, суперечностей) так званої «наївної» теорії множин. Серед таких парадоксів найбільш відомими є парадокси Кантора і Рассела.

1.1. Парадокс Рассела (B.Russel, 1902), незалежно відкритий також Цермело (E.Zermelo).

Запровадимо таку властивість P множин: будемо вважати, що для множини X справджується P тоді й лише тоді, коли X не є елементом самої себе. Розглянемо тепер множину T, що містить усі ті множини, для яких справджується P, і лише їх. Згідно з означенням T маємо:

- якщо T належить до T, тоді T не належить до T;
- якщо T не належить до T, тоді T належить до T.

1.2. Парадокс Кантора (G.Cantor, 1899)

Позначимо через M множину усіх множин, а через $P(M)$ — множину усіх підмножин M. Згідно з означенням M справджується включення: $M \supset P(M)$. З іншого боку, згідно з теоремою Кантора, множина $P(M)$ має потужність більшу, ніж потужність M, а тому не може бути підмножиною M.

1.3. Причини парадоксів «наївної» теорії множин і способи подолання їх

Існування вказаних суперечностей зумовлено існуванням у «наївній» теорії множин неявного припущення про те, що для будь-якої властивості існує множина, яка складається зі всіх елементів, які мають цю властивість. Таке припущення отримало назву «принципу згортання».

Аксіоматичні теорії множин вносять деякі корективи в цей принцип або іншим чином знімають наявні суперечності. Найбільш відомою з таких систем є система аксіом Цермело-Френкеля (ZF-система), яка накладає певні обмеження на принцип згортання, пропонуючи натомість низку спеціальних аксіом. У цій системі аксіом окремо виділяють аксіому вибору, відношення до якої у математичному товаристві є суперечливим. Аксіоматику Цермело-Френкеля з аксіомою вибору називають ZFC-системою.

ZF-аксіоми було сформульовано в сучасному стані Торальфом Сколемом в 1922 році у результаті розвитку системи аксіом Адольфа Френкеля, яка в свою чергу базувалась на системі аксіом, сформульованій Ернестом Цермело.

В рамках теорії ZFC можна викласти всі загальноприйняті методи математичних міркувань. Навіть кажуть, що на сучасному етапі розвитку математики така «узгодженість» з ZFC є з формальної точки зору універсальним мірилом математичної строгості. Зважаючи на категоричність і фундаментальний характер цього твердження, така позиція не є одностайною.

Побудову формальної аксіоматичної теорії множин розпочинають з вичерпного опису числення предикатів. Надалі ми будемо дотримуватися традиційних позначень числення предикатів. Подамо приклади позначень для термів і формул теорії множин, використовуючи знак, який читають:

«запис ліворуч позначає те, що записано праворуч» і записують так: $\leftrightharpoons$.

Порожня множина: $\emptyset \leftrightharpoons \iota\, x\ \forall\, y \neg\, y \in x$.

Множина таких x, при яких справджується $A(x)$:

$$\{x \mid A(x)\} \leftrightharpoons \iota\, y\ \forall\, x\ (x \in y \Leftrightarrow A(x)).$$

Тут y не є параметром формули $A(x)$.

Невпорядкована пара x та y: $\{x, y\} \leftrightharpoons \{z \mid z = x \vee z = y\}$.

Одноелементна множина з x: $\{x\} \leftrightharpoons \{x, x\}$.

Впорядкована пара x *та* y: $< x, y > \leftrightharpoons \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Перетин x *та* y: $x \cap y \leftrightharpoons \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}$.

Об'єднання x *та* y: $x \cup y \leftrightharpoons \{z \mid z \in x \vee z \in y\}$.

Об'єднання усіх елементів x: $\bigcup x \leftrightharpoons \{z \mid \exists\, y\, (z \in y \wedge y \in x)\}$.

Декартів добуток x *та* y:

$$x \times y \leftrightharpoons \{z \mid \exists\, u\, \exists\, v\, (z = < u, v > \wedge u \in x \wedge v \in y\}.$$

«*x є стандартною нескінченою множиною*»:

$$\mathrm{Inf}\,(x) \leftrightharpoons (\emptyset \in x) \wedge (\forall\, y\, (y \in x) \Rightarrow (y \cup \{y\} \in x));$$

«*w є функцією*»:

$$\mathrm{Fnc}(w) \leftrightharpoons \exists\, v \quad (w \subseteq v \times v) \wedge (\forall\, u\, \forall\, v_1\, \forall\, v_2$$

$$(<\ u, v_1 > \in w \wedge <\ u, v_2 > \in w) \Rightarrow (v_1 = v_2));$$

Значення функції w на елементі x:

$$w{*}x \leftrightharpoons \iota\, y < x, y > \in w.$$

2. Спроба аксіоматизації «наївної» теорії множин

Подана далі система аксіом A1–A2 повністю відображає принципи «наївної» теорії множин.

A1. Аксіома об'ємності (екстенсиональності). *Дві множини збігаються (рівні між собою) тоді й лише тоді, коли вони мають одні й ті самі елементи:*

$$\forall\, x\, \forall\, y \quad (x = y) \Leftrightarrow \forall\, z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y).$$

Замість поданого твердження інколи записують, що *елементи вважають однаковими, якщо вони належать до одних і тих самих множин.* Інакше кажучи, їх неможливо розрізнити за допомогою належності до множин:

$$\forall\, x\, \forall\, y \quad (x = y) \Leftrightarrow \forall\, z\, (x \in z \Leftrightarrow y \in z).$$

А2. Аксіома згортання. *Для довільної формули А, що не містить параметра х,*

$$\exists x \forall y (y \in x \Leftrightarrow A),$$

тобто існує множина х, що містить ті й лише ті елементи, для яких справджується формула А.

Система аксіом А1–А2 суперечлива. Справді, якщо в А2 за A взяти формулу $\neg (y \in y)$, то з формули

$$\forall y (y \in x \Leftrightarrow \neg (y \in y))$$

отримуємо суперечність:

$$x \in x \Leftrightarrow \neg (x \in x).$$

3. Різноманітність аксіоматичних систем теорії множин

Аксіоматичні системи теорії множин поділяють на такі чотири групи.

1. Для аксіоматичних систем першої групи характерним є таке обмеження аксіоми згортання, яке забезпечує природне формулювання звичайних математичних доведень і водночас дозволяє уникнути відомих парадоксів. Першою аксіоматикою такого роду була система Z Цермело (E. Zermelo, 1908). Однак у цій системі неможливо було природним чином формалізувати деякі розділи математики, і А.Френкель (A. Frenkel, 1922) запропонував доповнити систему Z новим принципом, який назвав *аксіомою підстановки.* Отриману систему називають *системою аксіом Цермело — Френкеля* і позначають ZF. Ця система аксіом містить єдине примітивне онтологічне (фундаментальне) поняття — *множина*, та єдине онтологічне припущення, що всі досліджувані об’єкти є множинами. Запроваджено єдине бінарне відношення приналежності до множини.
2. До другої групи належать системи, аксіоми яких вибрано у зв’язку з певним поясненням парадоксів. Наприклад, як наслідок непредикативних

означень. Сюди відносять розгалужену теорію типів Рассела, просту теорію типів Т, теорію типів з трансфінітними індексами.
3. Для третьої групи характерним є використання нестандарних засобів логічного виведення, багатозначність логіки, додаткові умови на доведення, нескінчені правила виведення.
4. Четверта група містить модифікації систем перших трьох груп з певною метою. До цієї групи належать системи NBG Неймана — Бернайса — Гьоделя (J. Neumann — P. Bernays — K. Gödel, 1925) і NF Куайна (W. Quine, 1937).

4. Нелогічні аксіоми системи Цермело — Френкеля

Z1. Аксіома об'ємності збігається з поданою у пункті 2 аксіомою A1.

Z2. Аксіома пари (об'єднання). *Для будь-яких множин x та y існує множина z така, що лише x та y є її елементами:*

$$\forall x \forall y \exists z \forall t \quad (t \in z) \Leftrightarrow (t = x \vee t = y).$$

Множину z позначають $\{x, y\}$ і називають невпорядкованою парою x та y.

Зауважимо, що при $x = y$ існує множина z, що містить єдиний елемент x.

Z3. Аксіома (множини-)суми. *Для довільної множини z існує множина y, що є об'єднанням усіх елементів x множин u, що належать до z, і яку (множину y) називають множиною-сумою z:*

$$\forall z \exists y \forall x \quad (x \in y) \Leftrightarrow (\exists u \quad x \in u \wedge u \in z).$$

Z4. Аксіома степеня (булеана, множини підмножин). *Для довільної множини x існує множина y, елементами якої є ті й лише ті елементи, що є підмножинами x.*

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \quad (z \in y) \Leftrightarrow (\forall t \quad (t \in z) \Rightarrow (t \in x)).$$

З використанням відношення підмножини $\subseteq$ останню формулу можна спростити:

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \quad (z \in y) \Leftrightarrow (z \subseteq x).$$

Таку множину y називають булеаном множини x та позначають $P(x)$ або 2^x.

Для скінчених множин справджується рівність $| 2^x | = 2^{|x|}$. Тут $| x |$ — кількість елементів множини x.

Z5. Аксіома виділення (схема специфікації). *Для довільної множини x і властивості (предиката, висловлювання системи Z) P існує множина y, елементами якої є ті й лише ті елементи множини y, які мають властивість P (при яких справджується P):*

$$\forall x \, \forall P \, \exists y \, \forall z \quad (z \in y) \Leftrightarrow (z \in x \wedge P(z)).$$

Тут y не входить у запис P.

Z6. Аксіома нескінченності. *Існує така множина x, що містить порожню* *множину* $\emptyset$ *та для довільного належного до неї елемента y включає також і множину, утворену об'єднанням y та* $\{y\}$:

$$\exists x \quad (\emptyset \in x) \land (\forall y\ (y \in x) \Rightarrow (y \cup \{y\} \in x)).$$

За допомогою раніше означеного предикату Inf цю аксіому можна записати так:

$$\exists x \quad \mathrm{Inf}\,(x).$$

Для того, щоби пояснити цю аксіому, означимо елемент $y \cup \{y\}$ як наступний для елемента y (аксіома пари дозволяє нам сформувати множину $\{y\}$, аксіома об'єднання дозволяє здійснити операцію $\cup$). Поняття наступного елемента використовують зокрема для побудови теорії натуральних чисел за допомогою теорії множин. У такій побудові нуль — порожня множина, одиниця — наступний елемент за нулем, два — наступний елемент за одиницею і т. і.:

$0 = \{\}$;

$1 = 0 \cup \{0\} = \{\} \cup \{\{\}\} = \{\{\}\} = \{0\}$;

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{\{\},\{\{\}\}\} = \{0,1\}$, і т. і.

У такій побудові кожне натуральне число є множиною усіх попередніх натуральних чисел. Без аксіоми Z6 така побудова була б неможливою.

Z7. Аксіома вибору. *Для довільної множини z існує функція w, що вибирає з кожного непорожнього елемента x множини z єдиний елемент w*x*:

$$\forall z \, \exists w \quad (\mathrm{Fnc}(w) \wedge \forall x \, (x \in z \wedge \neg\, x = \emptyset \Rightarrow w{*}x \in x)).$$

Z8. Аксіома регулярності. *У будь-якій непорожній множині x є елемент y, при якому перетин x та y є порожньою множиною*:

$$\forall x \quad (\neg\, x = \emptyset \Rightarrow \exists y \, (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

Згідно з цією аксіомою не існує нескінченних послідовностей множин, у якій кожна наступна є елементом попередньої. *Замість* висловлювання Z8 використовують і таке, яке легше трансформувати у віповідну аксіому системи NBG.

Z8'. Аксіома обмеження. *Для довільного висловлювання (предикату) P системи Z, при якому існує множина x, для якої справджується P(x), існує множина y, для якої справджується P(y), але для довільного її елемента z не справджується P(z)*:

$$(\exists\, x \quad P(x)) \Rightarrow (\exists\, y \quad P(y) \land (\forall\, z \quad \neg\,(z \in y \perp P(z))).$$

ZF9. Аксіома підстановки Френкеля $\forall\, P \quad (1) \;\land (2) \Rightarrow (3)$, що доповнює

систему Z до ZF.

При довільному двомісному предикаті $P(x, y)$, *що задає взаємно однозначну відповідність:*

(1) $\quad \forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\, \forall\, w\; (\; (P(x, y) \land P(z, w)) \Rightarrow (x = z \Leftrightarrow y = w)\;),$

і при існуванні множини u усіх таких множин x, при яких існує таке y, що справджується $P(x, y)$:

(2) $\quad \exists\, u\, \forall\, x \quad (x \in u \Leftrightarrow \exists\, y \quad P(x, y)\;)$

існує множина v усіх таких множин y, при яких існує таке x, що справджується $P(x, y)$:

(3) $\quad \exists\, v\, \forall\, y \quad (y \in v \Leftrightarrow \exists\, x \quad P(x, y)\;)$

Про існування порожньої множини твердить аксіома нескінченності Z6. Зауважимо також надлишковість поданої системи аксіом:

- аксіому виділення Z5 виводять із пізніше введеної аксіоми підстановки ZF9 та існування порожньої множини;

- аксіому пари Z2 виводять із аксіоми підстановки ZF9, існування порожньої множини та аксіоми булеана Z4.