Олександр Рудик

Різноманітність аксіоматичних систем: теорія типів, теорія множин Неймана — Бернайса, теорія множин Куайна, ієрархія теорій множин T_n

1. Теорія типів

Для опису поняття множини чи класу, згідно з теорією типів, потрібно розглядати класи (аналоги множин) у межах деякої ієрархії типів. В основі цієї ієрархії лежать об’єкти типу 1, що є індивідами чи матеріальними об’єктами. Для $k > 1$ об’єкти типу k є класами об’єктів типу $(k - 1)$ і лише такого типу. Неприпустимо у теорії типів є розглядати класи, що містить об’єкти різних типів. Саме тому теорія типів уникає парадоксу Рассела, бо в ній не існує клас, що містить об’єкти різних типів незалежно від того, чи мають вони одну й ту саму властивість. Тому не існує клас, що містить *усі* класи, що не є елементами самих себе. Справді, всі члени довільного класу мають тип менший, ніж тип цього класу, тому не можна розглядати клас, що містить себе як елемент.

В описі формальної системи неприпустимо використовувати одні й ті самі змінні, що можуть набувати значень як об'єкти різних типів. Кожній змінній приписують індекси, що вказують на її тип:

- x_1, y_1, z_1 … позначають об’єкти типу 1;
- x_2, y_2, z_2 … позначають об’єкти типу 2

і т.і. Замість «усі об’єкти x, при яких …» потрібно казати: «для даного n усі об’єкти x_n, при яких …».

Висловлювання, що об’єкт є членом класу за умови, що тип цього класу не перевищує саме на 1 тип об’єкту, не має змісту. Належність об’єкту до свого класу формально вказують за допомогою символу $\in$. Наприклад, запис $x_n \in y_{n+1}$ означає, що x_n — об’єкт типу n — є елементом y_{n+1} — об’єкту типу $n + 1$.

У теорії типів використовують загально відомі позначення для логічних (пропозиційних) зв’язок і кванторів.

Рівність $x_n = y_n$ об'єктів одного типу n тлумачимо як належність об'єктів x_n і y_n до одних і тих самих класів.

Упорядковану пару $< x_n; y_n >$ двох об'єктів $x_n = y_n$ одного й того самого типу n означають як клас типу $n + 2$, до якого належать (подано вичерпний перелік):

- клас $\{x_n\}$, що містить лише один об'єкт x_n;
- клас $\{x_n, y_n\}$, що містить об'єкти x_n і y_n.

Відношення пар об'єктів одного типу n задають деяким класом впорядкованих пар типу $n + 3$. Аксіоми системи Т мають такий вигляд.

Т1. Аксіома об'ємності. *Два класи є тотожними тоді й лише тоді, якщо вони мають одні й ті самі елементи. Інакше кажучи, клас повністю визначено, якщо задано всі його члени.*

Це записують таким чином:

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall y_{j+1} \quad \forall z_{j+1} \quad (\forall x_j \quad x_j \in y_{j+1} \Leftrightarrow x_j \in z_{j+1}) \Rightarrow (y_{j+1} = z_{j+1})$$

Т2. Аксіома виділення. *Для довільного висловлювання, що визначає об'єкти типу j, існує відповідний йому клас типу j* + 1, *що містить всі елементи, для яких справджується це висловлювання.*

Інакше кажучи, якщо $F(x_j)$ — висловлювання у термінах Т, яке не містить y_{j+1}, то маємо:

$$\exists\, y_{j+1}\, \forall\, x_j\, (x_j \in y_{j+1} \Leftrightarrow F(x_j)).$$

Т3. Аксіома нескінченності (забезпечує існування нескінченного числа індивідів x_1, y_1 ... за рахунок існування відношення w_4).

$$\exists\, w_4 \quad (\forall\, x_1 \quad \neg\, x_1\, w_4\, x_1) \;\&\; (\forall\, x_1\, \exists\, y_1 \quad x_1\, w_4\, y_1) \;\&$$

$$(\forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 \quad (x_1\ w_4\ y_1\ \&\ y_1\ w_4\ z_1) \Rightarrow x_1\ w_4\ z_1)$$

Теорію типів можна подати двома способами: як інтуїтивну модель ієрархії класів і як формальну систему. Формальна система так само надійна, як інтуїтивна модель. Але чи можна покладатися на останню? Парадокси, відкриті на початку XX століття, виникли з логічного кола: деякий об’єкт визначають за допомогою деякої сукупності, до якої цей об’єкт належить. Наприклад, клас усіх класів, що не є елементами самих себе, визначають за допомогою сукупності всіх класів, до якої належить і означуваний клас. Запровадження типів дозволяє уникнути парадоксу Рассела. Можна було би сподіватися, що завдяки ієрархії типів теорії множин уникають усіх парадоксів, породжених логічним колом.

Розглянемо таке висловлювання, яке для даного класу w_3, згідно з аксіомою виділення, означає клас y_2 за допомогою зв'язаної змінної z_2:

$$\forall w_3 \exists y_2 \forall x_1 \quad (x_1 \in y_2) \Leftrightarrow (\exists z_2 \quad x_1 \in z_2 \perp z_2 \in w_3).$$

Наявне логічне коло, бо можливе справдження рівності: $y_2 = z_2$. Таким чином, клас y_2 означено за допомогою сукупності, частиною якої він може бути. Такий клас називають *непредикативним*.

Можемо бути певні того, що в теорії типів неможливо безпосередньо прийти ні до парадоксу Рассела, ні до інших добре відомих парадоксів. Але ми не можемо бути повністю впевнені в несуперечливості теорії типів, якщо в ній використовують непредикативні класи. На жаль, істотну частину математики неможливо викласти, якщо не допускати ці непредикативні класи. Але надію на несуперечливість теорії типів дає те, що у ній усунено всі відомі парадокси.

2. Теорія множин Неймана — Бернайса

Аксіоми Z5 виділення і ZF9 підстановки теорії множин ZF (Цермело — Френкеля) відрізняються від решти аксіом використанням не визначених точно висловлювань $P(x)$ чи $P(x, y)$, які визначають поняття, що не є обов’язково множинами у розглядуваній системі. Теорія ZF містить нескінченну кількість виразів, кожна з цих аксіом охоплює нескінченну кількість часткових випадків (для кожного $P(x)$ чи $P(x, y)$. Теорію Неймана — Бернайса отримують поданням цих сукупностей певним чином і запровадженням для них нових змінних. Хоч видається природним розглядати усі сукупності, визначені виразами ZF, неможна приписувати цим сукупностям усі властивості, які мають множини в ZF. Наприклад, властивість належати деякій множині. Інакше парадокси виникають на новому рівні теорії. Нейман зробив зауваження, що такі сукупності не можуть бути членами жодної іншої сукупності. Далі у цьому розділі, дотримуючись традиції, будемо називати всі множини, які можна отримати в ZF, «множинами», а всі сукупності, визначені довільним висловлюванням із ZF, — «класами». Тобто, тут ми не будемо ототожнювати як синоніми «клас» і «множину».

Формально система B містить усі символи системи ZF і, крім того, змінні X, Y і т.і. для позначення класів. Додатково до висловлювань теорії ZF

тут можемо використовувати вирази вигляду $x \in Y$, $y \in Z$ і т.і.

Система B має десять аксіом. Аксіоми B2, B3, B4, B6, B7 збігаються відповідно з аксіомами Z2, Z3, Z4, Z6, Z7 системи Цермело. Аксіоми Z1, Z5, Z8, ZF9 замінено на такі.

B1. $\forall x \forall y \quad (x = y) \Rightarrow (\forall Z \quad x \in Z \Leftrightarrow y \in Z)$.

B5. $\forall X \forall z \exists y \forall x \quad x \in y \Leftrightarrow (x \in z \perp x \in X)$.

B8. $\forall X \quad (\exists x \quad x \in X) \Leftrightarrow (\exists y \quad y \in X \perp (\forall z \quad \neg (z \in y \perp z \in X)))$.

B9. $\forall X$ (1) & (2) $\Rightarrow$ (3), *де висловлювання* (1), (2), (3) *мають такий вигляд:*

(1) $\forall x \forall y \forall z \forall w\ ((< x, y > \in X \ \& < z, w > \in X) \Rightarrow (x = z \Leftrightarrow y = w));$

(2) $\exists u \forall x \quad (x \in u \Leftrightarrow \exists y \quad < x, y > \in X);$

(3) $\exists v \forall y \quad (y \in v \Leftrightarrow \exists x \quad < x, y > \in X).$

Наступна аксіома B10 є основною щодо класів системи B. Вона стверджує, що довільне висловлювання ZF визначає певний клас B.

B10. *Якщо* $P(x)$ *— висловлювання (одномісний предикат), що не містить жодної зв'язаної змінної, що позначає клас, а* Y *— змінна, що не входить до* $P(x)$*, то існує клас Y, належність до якого довільної множини x еквівалентна справдженню* $P(x)$:

$$\exists Y \forall x \quad x \in Y \Leftrightarrow P(x).$$

При порівнянні B1—B10 з Z1—ZF9 бачимо, що завдяки наявності нового типу змінних три групи аксіом Z5, Z8 и ZF9 замінено певними трьома аксіомами B3, B8, B9. B10 — єдина аксіома системи B, що містить у собі більше, ніж один випадок. Але її можна звести до таких часткових випадків.

B10a. *Довільну множину можна подати за допомогою деякого класу:*

$$\forall z \exists Y \forall x \quad x \in Y \Leftrightarrow x \in z.$$

В10б. *Існує клас Z, що містить усі впорядковані пари* $< x, y >$, при яких $x \in y$:

$$\exists\, Z\, \forall\, x\, \forall\, y \quad < x, y > \in Z \Leftrightarrow x \in y.$$

В10в. *Для довільного класу X існує відповідний йому клас-доповнення Y:*

$$\forall\, X\, \exists\, Y\, \forall\, z \quad z \in Y \Leftrightarrow \neg\,(z \in X).$$

В10г. *Для довільних двох класів X, Y існує їхній перетин Z:*

$$\forall\, X\, \forall\, Y\, \exists\, Z\, \forall\, t \quad t \in Z \Leftrightarrow (t \in X \perp t \in Y).$$

В10г. *Для довільного класу впорядкованих пар Z існує відповідний йому клас X, членами якого є перші елементи кожного члену Z:*

$$\forall\, Z\, \exists\, X\, \forall\, x \quad x \in X \Leftrightarrow (\exists\, y \quad < x, y > \in Z).$$

В10д. *Для довільного класу X існує відповідний йому клас Z, елементами*

якого є усі ті пари $< x, y >$*, при яких* $x \in X$*:*

$$\forall X \exists Z \forall x \forall y \quad <x, y> \in Z \Leftrightarrow x \in X.$$

Впорядковану трійку $<x, y, z>$ означимо як $<x, <y, z>>$.

B10е. $\forall X \exists Y \forall x \forall y \forall z \quad <x, y, z> \in X \Leftrightarrow <y, z, x> \in Y.$

B10є. $\forall X \exists Y \forall x \forall y \forall z \quad <x, y, z> \in X \Leftrightarrow <y, x, z> \in Y.$

Детальне доведення того, що B10 можна замінити на сукупність висловлювань B10а–B10є, було опубліковано Бернайсом у роботі «Система аксіоматичної теорії множин» (A system of axiomatic set theory // J. Symbolic Logic, Part I, **2**, 1937; Part II, **6**, 1941; Part III, Part IV, **7**, 1942; Part V, **8**, 1943; Part VI, **13**, 1948). Схема цього доведення така:

- якщо $P(x)$ — атом, то B10 випливає з B10а–B10є;
- якщо B10 справджується для деяких висловлювань $F(x)$, $G(x)$ і $H(y, z)$, то з B10а — B10є випливає справдження B10 і для $\neg F(x)$, $F(x)$ & $G(x)$,

  $\exists y \quad H(y, z)$.

Отже, B10 стверджує, що кожне висловлювання ZF визначає клас, незважаючи на те, що в нього можуть входити вільні змінні класів.

У роботі Россера й Ван Хао (Rosser and Wang Hao. Non-standard models for formal logics // J. Symbolic Logic, **15**, 1950) доведена істинність такого твердження: якщо система ZF несуперечлива, то й система B також несуперечлива. Схема цього доведення така. Розглянемо аксіоми B10а–B10є як операції O_1–O_8, що при їхньому застосуванні до заданих множин і класів утворюють класи. Згідно з теоремою Льовенгейма — Сколема для довільної несуперечливої системи існує модель у множині натуральних чисел (чи на довільній нескінченній підмножині натурального ряду, наприклад, на множині простих натуральних чисел). Припустимо, що ZF несуперечлива. Тоді для неї існує модель, при якій:

- кожній множині x системи ZF відповідає натуральне число;
- на множині натуральних чисел визначено предикат $\in^*$ з такою властивістю: якщо натуральне число m відповідає множині x, а натуральне число n відповідає множині y, то: $x \in y \Leftrightarrow m \in^* n$.

Класам B можна поставити у відповідність натуральні числа такого вигляду: $2^m\ 3^n\ 5^k$, де m — натуральне число від 1 до 8 включно, а n і k — довільні натуральні числа:

- у B10a класу Y ставимо у відповідність $2^1\ 3^n\ 5^k$, якщо множині z поставлено у відповідність натуральне число n, k — довільне натуральне число;
- у B10б класу Z ставимо у відповідність $2^2\ 3^n\ 5^k$, n і k — довільні натуральні числа;
- у B10в класу Y ставимо у відповідність $2^3\ 3^n\ 5^k$, якщо класу X поставлено у відповідність натуральне число n, k — довільне натуральне число;
- у B10г класу Z ставимо у відповідність $2^4\ 3^n\ 5^k$, якщо класу X поставлено у відповідність натуральне число n, а класу Y — натуральне число k,

і т.і. Таким чином, завдяки відсутності непредикативних визначень класів у системі B кожному класу, породженому операціями O_1–O_8, відповідає деяке натуральне число. При цьому жодне натуральне число не відповідає двом різним класам, хоча кожному класу відповідає не одне натуральне число. За допомогою співвідношень, виражених у B10a–BlOє, ми можемо визначити інший предикат $\in^*$ на множині натуральниїх чисел з такою властивістю: якщо натуральне число m відповідає множині x, а натуральне число n відповідає класу Y, то:

$$x \in Y \Leftrightarrow m \in^* n.$$

Таким чином, отримано модель B на множині натуральных чисел. Тому система B несуперечлива.

У роботі Новака (Novak I. L., A construction for models of consistent systems // Fund. math., **37**, 1950) дещо раніше було подано інше доведення цього факту.

3. Теорія множин Куайна NF

Теорія Куайна, відома за назвою «Нові основи» і відповідним назві (англійською мовою) позначенням NF, є розширенням теорії типів. Основним нововведенням Куайна є принцип стратифікації висловлювань, що дозволяє позбавитися від індексів типів. Висловлювання вважають стратифікованим, якщо у ньому можна занумерувати кожну змінну таким чином, щоби їй відповідало одне й те саме натуральне число при кожному її входженні у висловлювання і щоб усюди змінна, записано безпосередньо

після знаку ∈, мала номер на одиницю більший за номер змінної, записаної

безпосередньо перед цим знаком. Наприклад, висловлювання:

$$(x \in y \mathbin{\&} y \in z) \vee (x \in w \mathbin{\&} w \in z)$$

є стратифікованим — поставте у відповідність змінним *x, y, w, z* відповідно числа 1, 2, 2, 3. Висловлювання:

$$(x \in y \vee y \in z) \mathbin{\&} z \in x$$

або

$$(x \in y \vee y \in z) \mathbin{\&} x \in z$$

не є стратифікованими.

Не вимагається, щоб усі висловлювання NF були стратифікованими. Початкові позначення і сукупність висловлювань систем NF і Z фактично збігаються. Принцип стратифікації входить лише як обмеження, що накладають на аксіому існування множини.

Означення тотожності в NF таке: $x = y$ використовують для позначення такого висловлювання:

$$\forall z \quad (x \in z \Rightarrow y \in z).$$

Аксіом NF лише дві (Quine W. V., New foundations for the mathematical logic // Am. math. monthly, **44**, 1938).

NF1. Аксіома об'ємності: $\forall x \quad (x \in z \Leftrightarrow x \in y) \Rightarrow y = z$.

NF2. «Зиґзаґ»-аксіома. *Якщо висловлювання $P(x)$ є стратифікованим і не містить вільної змінної y, тоді справджується таке висловлювання:*

$$\exists y \, \forall x \quad x \in y \Leftrightarrow P(x).$$

З останньої аксіоми випливає така теорема:

$$(\forall z \quad (x \in z \Rightarrow y \in z)) \Leftrightarrow (\forall z \quad (x \in z \Leftrightarrow y \in z)) .$$

Тому, незмінюючи систему, можна було б означити тотожність таким чином:

$$\forall z \quad (x \in z \Leftrightarrow y \in z).$$

Формально NF2 збігається з аксіомою T2 теорії типів T, якщо при викреслюванні (вилученні з розгляду) індексів типу різні змінні залишаються різними. Незважаючи на формальну схожість, система NF істотно відрізняється від Т. Наприклад, у NF можна довести існування універсальної множини U, що містить усі множини:

$$\forall x \quad x \in U,$$

у тому числі, й саму себе: $U \in U$. Маємо: незважаючи на умову стратифікації

в аксіомі NF2, в NF існує, щонайменше одна множина, що є елементом самої себе. Тому інтуїтивна модель Т не збігається з NF.

Згадана множина U, напевно містить нескінченну кількість елементів. Але неможливо довести аксіому нескінченності, яка б відповідала, наприклад, аксіомі Т3 теорії типів. Тому на основі NF1–NF2 неможливо побудувати теорію чисел. Для того, щоб обійти цей недолік системи, Куайн (Mathematical logic, 1940, 1947, 1951), розширив NF до ML, яка пов'язана з NF майже так само, як B до ZF. Позначення і сукупність (допустимих) висловлювань для ML і B збігаються. Система ML має три аксіоми. ML1 узагальнює NF1.

ML1. $(\forall x \quad x \in z \Leftrightarrow x \in y) \Rightarrow (\forall X \quad y \in X \Rightarrow z \in X)$.

Аксіома ML2 збігається з NF2. Для того, щоб система була несуперечливою, важливо, щоб змінні у записі $P(x)$ аксіоми ML2, позначалися маленькими літерами. Аксіома ML3 стверджує існування класів.

ML3. $\exists\ Y \forall x \quad x \in Y \Leftrightarrow P(x)$, де $P(x)$ — довільне висловлювання системи ML,

яке не містить Y.

Аксіома B10 відрізняється від ML3, бо висловлювання $P(x)$ в ній не містить жодної зв'язаної змінної для позначення класу, а ML3 допускає навіть непредикативні класи. Внаслідок чого неможливо довести за допомогою нумерації класів несуперечливість ML відносно NF. Для доведення такої несуперечливості можна піти таким шляхом (Wang Hao, A formal system of logic// J. Symbolic Logic, **15**, 1950). Наприклад, за основу беремо систему, наприклад, систему T2 (див. Далі), в якій можна побудувати теорію натуральних чисел та їхніх класів, і припускаємо несуперечливість NF. Тоді, ґрунтуючись на основі теореми Льовенгейма — Сколема, маємо: NF має модель у ряді натуральних чисел. Тому ML також має модель у ряді натуральних чисел.

4. Ієрархія теорій множин T_n

Розглянуті далі (у порядку зростання сили) теорії дещо запозичують і в теорії Цермело, і в теорії типів:

- T_1 має таку саму силу, що й теорія натуральних чисел (тобто в ній можна побудувати теорію натурального числа), тому її називають теорією множин для натуральних чисел;
- T_2 має ту саму силу, що й теорія дійсних чисел, тому її називають теорією множин для дійсних чисел;
- T_3 має ту саму силу, що й теорія функцій дійсних чисел, тому її називають теорією множин для функцій з дійсним аргументом,

і т. і.

T_1 — це теорія множин Цермело Z, але без аксіоми нескінченності Z7: аксіоми ($T_1 1$–$T_1 6$) збігаються відповідно з Z1–Z6, а $T_1 7$ збігається з Z8. Система T_1 відома також під назвою загальної теорії множин.

В T_1 можна побудувати теорію натуральных чисел (Neumann J. von, Zur Einführung der transfiniten Zahlen, Acta litt. Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae, **1**, 1923).

0 ототожнюємо з порожньою множиною $\emptyset$, 1 — з $\{\emptyset\}$, 2 — з $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 3 — з $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ і т. і. Тобто, якщо натуральне число n ототожнюємо з множиною x, то $(n + 1)$ ототожнюємо з $x \cup \{x\}$. Інакше кажучи, n ототожнюємо з множиною всіх чисел, менших за n.

Тепер в T_1 можна означити предикат $N(x)$, який справджується тоді й лише тоді, коли x є натуральним числом (Bernays P., A system of axiomatic set theory // J. Symbolic Logic, Part II, **6**, 1941). За допомогою цього предикату можна запровадити нові змінні для позначення лише натуральних чисел і виділити для них з латиниці, наприклад, літери від j до n включно. Їх означають лише як зв'язані змінні таким чином:

$$\forall\, j\, P(j) \leftrightharpoons \forall\, x\, N(x) \Rightarrow P(x); \quad \exists\, j\, P(j) \leftrightharpoons \exists\, x\, N(x) \perp P(x).$$

Тут $P(x)$ — висловлювання у системі T, а замість j можна писати будь-яку з літер k, ... , n. Зміст цих означень такий:

- казати, що довільне натуральне число має певну властивість еквівалентно стверджувати, що будь-який об'єкт, що є натуральним числом, має цю властивість;
- казати, що існує натуральне число, що має певну властивість еквівалентно стверджувати, що існує об'єкт, який є натуральним числом і має цю властивість.

Змінні j, …, n достатньо визначити лише як зв'язані змінні, бо можна вимагати, щоб усі теореми формальної логіки містили лише зв'язані змінні (Quine W. V., Mathematical logic, 1940, 1947, 1951). Після запровадження деяких допоміжних означень, можна дати означення додавання й множення натуральних чисел і довести загально відомі закони: переставний і сполучний для обох арифметичних дій та розподільний множення відносно додавання.

Фактично, в T_1 можна довести теореми, що відповідають усім аксіомам (отже, й усім теоремам) формальної моделі теорії чисел:

(1) $\quad \forall\, j \quad j = j;$

(2) $\quad \forall\, j\, \forall\, k \quad (j = k) \Rightarrow (P(j) \Leftrightarrow P(k));$

(3) $\quad \exists\, j \quad j = 0;$

(4) $\forall j \, \exists k \quad k = j + 1;$

(5) $\forall j \, \forall k \quad k + 1 = j + 1 \Rightarrow j = k;$

(6) $\forall j \quad \neg\, (j + 1 = 0);$

(7) $(P(0) \,\&\, (\forall j \quad P(j) \Rightarrow P(j + 1))) \Rightarrow (\forall j \quad P(j));$

(8) $\forall j \quad j + 0 = j;$

(9) $\forall j \, \forall k \quad j + (k + 1) = (j + k) + 1;$

(10) $\forall j \quad j \cdot 0 = 0;$

(11) $\forall j \forall k \quad j \cdot (k+1) = j \cdot k + j.$

Висловлювання (1) і (2) є аксіомами логіки тотожності. Вони залишаються теоремами T_1 навіть після підстановки замість *j, k* змінних *x, y*. Ці висловлювання мають справджуватися в будь-якій формальній системі, що містить відношення (поняття) тотожності. Інакше відношення $x = y$ не буде відношенням тотожності.

Висловлювання (3)–(7) — добре відомі аксіоми Пеано для натуральних чисел для теорії, що включає нуль до ряду натуральних чисел. Для теорії, в якій ряд натуральних чисел не містить нуль, у висловлюваннях (3), (6) і (7) потрібно замінити 0 на 1.

Висловлювання (8) і (9) слугують означенням додавання за допомогою рекурентного співвідношення. Висловлювання (10) і (11) слугують означенням множення за допомогою рекурентного співввідношення.

Система, аксіомами якої є (1)–(11), є стандартною системою натуральных чисел.

Тепер ми можемо описати систему T_n при $n > 1$. Можна казати, що у певному розумінні T_n є теорією типів з *n* типами, об'єктами якої є множини системи Т. Інакше кажучи, T_n так співвідноситься з T_1, як функціональне числення *n*-го порядку співвідноситься з функциональним численням першого порядку. Таким чином, змінні в T_n мають індекси, які набувають натуральних величин від 1 до *n* включно. Будемо казати, що x_1 є або множиною, або класом типу 1. При $j \leq n$ змінна x_j є класом типу *j*.

Атомарні вирази теорії T_n мають одну з таких двох форм:

$$x_1 \in y_1 \text{ або } x_j \in y_{j+1}.$$

Тотожність T_n означають таким чином:

$$x_1 = y_1 \leftrightharpoons \forall z_1 \quad z_1 \in x_1 \Leftrightarrow z_1 \in y_1;$$

$$x_{j+1} = y_{j+1} \leftrightharpoons \forall z_j \quad z_j \in x_{j+1} \Leftrightarrow z_j \in y_{j+1}.$$

Зауважимо, що $x_1 = y_1$ означено так само, як означено тотожність в T_1, тобто так само, як у системі Z. Аксіоми T_n1–T_n7 збігаються з аксіомами T_11–T_17 системи T_1, тобто відповідно з Zl–Z6 і Z8 системы Z, з тією відмінністю, що вже не всі змінні мають індекс 1. При цьому висловлювання $P(x)$ у T_n5 і в T_n7 (Z8') може містити лише змінні типу 1. До T_n також долучено наступні дві аксіоми:

T_n8. *При довільному $j < n$ маємо:*

$$\forall x_j \, \forall y_j \quad x_j = y_j \Rightarrow (\forall z_{j+1} \quad x_j \in z_{j+1} \Leftrightarrow y_j \in z_{j+1}).$$

T_n9. *При довільному $j < n$ і довільному висловлюванні $P(x_j)$ системи* T_n, *що не містить y_{j+1} у вільному стані, маємо:*

$$\exists y_{j+1} \, \forall x_j \quad x_j \in y_{j+1} \Leftrightarrow P(x_j).$$

Інтуїтивну модель теорії T_n складає ієєархія теориії типів аж до типу n. При цьому об’єктами типу 1 є множини інтуїтивної моделі системи T_1. Усю теорію чисел можна побудувати у межах системи T_1, тому її можна побудувати у межах системи T_n. Тарський довів, що при довільному $n > 1$ у межах T_n існує означення істинності для T_{n-1} (Tarski A. et Lindenbautn A., On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth // J. Symbolic Logic, **4**, 1939).

З робіт Гьоделя (Gödel K., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. Math. Phys., **38**, 1931 та On undecidable propositions of formal mathematical systems, 1934) відомо, що синтаксис будь-якої формальної системи можна формалізувати у теорії чисел таким чином, що кожному висловлюванню цієї системи буде відповідати певне число и за допомогою формулювань теорії чисел можна виразити будь-які комбінації висловлювань, що породжують нові висловлювання за допомогою логічних зв'язок і кванторів так само, як довільну послідовність виразів, що складає доведення якої-небудь теореми. Визначення істинності T_{n-1} в T_n визначається, згідно з роботами Тарського, певним предикатом Tr(j), істинність якого означає, що висловлювання з номером Гьоделя j є істинним. Можна довести таке: якщо висловлювання без вільних змінних з номером Гьоделя j є теоремою в T_{n-1}, то справджується Tr(j).

Таким чином, в T_n можна довести, що всі теореми T_{n-1} істинні. Крім цього, отримано доведення несуперечливості T_{n-1} у T_n:

- якщо усі теореми системи справджуються, то жодне хибне висловлювання не може бути теоремою;
- якщо система суперечлива, то згідно з означенням суперечливості всі висловлювання є теоремами системи;
- з існування й означення Tr(j) випливає, що існують хибні висловлювання (наприклад, як заперечення істинного висловлювання).

5. Співвідношення між різними системами

Система ZF є доволі сильною теорією. Всі звичайні математичні теореми формалізують у ZF. Система NBG отримують із системи ZF долученням нового типу змінних — класів X, Y, Z, ... і скінченної кількості аксіом утворення класів, що дозволяють довести формули такого вигляду:

$$\exists\, Y\, \forall\, x\, (x \in Y \Leftrightarrow A(x)),$$

де $A(x)$ — формула системи NBG без зв'язаних змінних-класів і символу ι. За кожною формулою $A(x)$ можна утворити клас, тому нескінченне число аксіом ZF можна замінити скінченним числом аксіом, що містять змінну-клас.

Система NF з найпростішою аксіоматикою має такі особливості:

- можна спростувати аксіому вибору й узагальнену континуум-гіпотезу;
- можна вивести аксіому нескінченності;
- аксіома об'ємності грає суттєву роль. Наприклад, при заміні її у поданому вигляді на таке формулювання:

$$((\exists x \quad x \in y) \perp (\forall x \quad x \in y \Leftrightarrow x \in z)) \Rightarrow y = z$$

що допускає наявність кількох порожніх множин, отримують доволі слабку систему, несуперечливість якої можна довести вже у формальній арифметиці.

Відомо таке.

1. Будь-яку формулу ZF можна довести в NBG тоді й лише тоді, коли її можна довести в ZF.
2. В ZF можна встановити несуперечливість Z, доповненою довільною скінченною кількістю прикладів схеми аксіом підстановки ZF9. Маємо: ZF значно сильніша за Z.
3. У Z можна довести несуперечливість T, таму Z сильніша за T.
4. NF не слабкіша за T у тому розумінні, що в NF можна розвинути всю теорію типів.

5. Результативність аксіоматичного підходу

Аксіоматичний підхід до теорії множин дозволив надати точний зміст твердженню про принципову нерозв'язність деяких математичних проблем і строго довести його. Загальна схема застосування аксіоматичного методу у цьому випадку така. Розглядають формальну аксіоматичну систему *S* теорії множин (зазвичай, ZF або її модифікації) настільки універсальну, щоб вона містила всі звичні способи міркувань класичної математики і всі звичайні математичні факти можна було б у ній вивести. Проблему подають формулою *F* мови *S*. Далі встановлюють, що в *S* неможливо вивести ні *F*, ні заперечення *F*. Звідси випливає, що проблему не можливо розв'язати засобами теорії *S*. Але останню обирали з розрахунку охопити всі звичні методи міркувань. Тому отриманий результат свідчить про неможливість розв'язання проблеми звичними методами міркувань. У цьому випадку кажуть про «трансцендентність» проблеми.

Аксіоматичний підхід до теорії множин дав можливість точно поставити й розв'язати проблеми щодо *ефективності.* Кажуть, що об'єкт з певною властивістю *A* задано ефективно в аксіоматичній теорії *S*, якщо можна побудувати формулу *P*(*x*) теорії *S*, про яку в *S* можна довести, що їй задовольняє єдиний об'єкт, і цей об'єкт має властивість *A*. Таке означення дає можливість довести, що для деяких властивостей *A* в теорії *S* неможливо ефективно вказати об'єкт з властивістю *A* в той самий час, коли існування цих об'єктів у межах *S* можна встановити. Теорію *S* вибирають достатньо універсальною. Тому неефективність існування таких об'єктів у межах *S* тлумачать як неможливість ефективно встановити їхнє існування звичайними математичними засобами.

Нарешті, методи аксіоматичної теорії множин допомогли розв'язати складні проблеми у класичних галузях математики: теорії кардинальних і ординальних чисел, дескриптивній теорії множин, топології. Далі подано деякі з результатів. Більшість теорем стосується системи ZF Цермело — Френкеля, найбільш вживаної зараз. Ці результати легко пристосувати до системи NBG. Позначимо через ZF^- систему ZF без аксіоми вибору Z7.

1. В 1939 році Гьодель показав, що якщо ZF^- несуперечлива, то вона залишається несуперечливою після долучення аксіоми вибору й континуум-гіпотези. Інакше кажучи, в ZF неможливо спростувати аксіому вибору чи континуум-гіпотезу. Для доведення цього Гьодель побудував модель теорії ZF, що складається з так званих конструктивних за Гьоделем множин.
2. В 1963 році П. Коен (P. Cohen) з допомогою розробленого ним методу вимушення довів таке: якщо ZF^- несуперечлива, то вона залишається такою і після долучення довільної комбінації з аксіоми вибору чи її заперечення і континуум-гіпотези або її заперечення. Таким чином, ці дві проблеми незалежні в ZF.
3. Показано, що до ZF без виникнення суперечностей можна долучити гіпотезу про те, що потужність множини підмножин множини x може бути майже довільною наперед заданою функцією потужності x на регулярних кардиналах з єдиним суттєвим обмеженням, пов’язаним з теоремою Кьоніга.
4. В 1920 році М. Я. Суслін сформулював гіпотезу: довільна лінійно цілком упорядкована множина, при якій довільна сукупність непорожніх відкритих інтервалів, що попарно не перетинаються, не більше, ніж зліченна, містить зліченну всюди щільну підмножину. Методом Коена була встановлено нерозв’язність у ZF гіпотези Сусліна.
5. Встановлено нерозв’язність у ZF^- (без аксіоми вибору Z7) висловлювання: будь-яка підмножина множини дійсних чисел вимірна за Лебегом.