Олександр Рудик

Побудова максимальної сполуки пар

Означення 1. *Граф* $G = (V, E)$ *називають дводольним, якщо його множину вершин* V *можна розбити на підмножини (їх називають долі)* X *і* Y*, що не перетинаються, а кожне ребро* $e = \{x, y\}$ *з* E *сполучає вершини* x *з* X *і* y *з* Y*. Такий граф будемо позначати* (X, Y, E).

Розбиття V на X і Y неоднозначне. Надалі обмежимося розглядом дводольних графів, вважаючи, що таке розбиття стале.

Означення 2. *Запровадимо такі поняття.*

1. *Сполукою пар (вершин) у графі називають довільну множину його ребер* M*, при якій кожна вершина графа інциндентна не більше, ніж одному ребру з* M*.*
2. *Сполуку пар* M *називають повною, якщо всі вершини графа є кінцями ребер* M*.*
3. *Сполуку пар* M *у графі* G *називають найбільшою (максимальною), якщо для довільної сполуки пар* M' *у графі* G *справджується нерівність:* $| M' | \leq | M |$*. Інакше кажучи, найбільшу за кількістю ребер сполуку пар називають найбільшою.*
4. *Сполуку пар* M *у дводольному графі* $G = (X, Y, E)$ *називають повною, якщо для довільного* x *з* X *існує* y *з* Y*, при яких ребро* $\{x, y\}$ *належить до* M*.*

Повна сполука пар, якщо вона існує, є максимальною. Для знаходження максимальної сполуки пар у дводольному графі $G = (X, Y, E)$ можна модифікувати алгоритм Форда-Фалкерсона таким чином:

- кожне ребро графа перетворити на дугу, спрямовану з X в Y;
- долучити дві нові вершини a і z;
- вершину a (джерело) сполучити дугою з кожною вершиною з X;
- кожну вершину з Y сполучити дугою з вершиною z (стоком);
- кожній дузі приписати пропускну спроможність 1;
- здійснити пошук максимального потоку з джерела a до стоку z;
- за ребра сполуки пар взяти ті ребра початкового графа, яким відповідає потік 1.

Означення 3. *Нехай* M *— сполука пар у графі. Тоді:*

- *кажуть, що* M *сполучає вершину* x *з вершиною* y*, якщо* $\{x, y\}$ *належить до* M*;*

- *вершини, що не належать жодному ребру сполуки пар, називають вільними (щодо M), а решту вершин — насиченими (щодо M).*

Означення 4. *Для даної сполуки пар M у графі G аргументальним чи M-черговим ланцюгом називають таку послідовність вершин і ребер:*
$x_0, \{x_0, y_1\}, y_1, \{y_1, x_2\}, x_2, \ldots, x_k, \{x_k, y_{k+1}\}, y_{k+1}$,
де:

- *k — невід'ємне ціле парне число;*
- *вершини $x_0, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{k+1}$ різні;*
- *вершини x_0 і y_{k+1} — вільні, а решта вершин — насичені щодо сполуки пар M;*
- *ребра $\{y_j, x_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, k - 1$ належать до M, а решта ребер до M не належать.*

Теорема 1 (Берж). *Сполука пар M у дводольному графі G є максимальною тоді й лише тоді, коли в G не існує M-чергового ланцюга.*

Доведення. *M*-черговий ланцюг має непарну довжину (кількість ребер), починається й закінчується ребрами, що не належать до *M*. За допомогою *M*-чергового ланцюга *P* можна збільшити сполуку пар *M*, видаливши з неї ті ребра, що належать до *P*, а замість них долучити ребра из ланцюга *P*, що спочатку не належали до сполуки пар *M*. Інакше кажучи, ця новоутворена сполука пар є симетричною різницею множин ребер *M* і *P*, тобто всіх тих ребер, що належать лише до однієї з цих множин.

Означення 5. *Нехай M — сполука пар у графі G. Графом M-чергових ланцюгів називають граф, усі вершини й ребра якого належать до M-чергових ланцюгів. Такий граф позначають $G(M)$.*

Алгоритм побудови графа *M*-чергових ланцюгів

Алгоритм для дводольного графа (X, Y, E) здійснюють за рівнями $j = 0, 1, 2, \ldots$, використовуючи процес, схожий на пошук у ширину.

1. Граф рівня 0 містить усі вершини з X, що не є кінцями ребер з M.
2. На рівні з непарним номером j долучаємо *нові* вершини, сполучені з вершинами рівня $(j - 1)$ ребром, що не належить до сполуки пар (це ребро також долучаємо у граф).
3. На рівні з парним номером j долучаємо *нові* вершини, сполучені з вершинами рівня $(j - 1)$ ребром, що належить до сполуки пар (це ребро також долучаємо у граф).
4. Побудову (кроки 2–3) продовжуємо доти, поки до графа *M*-чергових ланцюгів можна долучити *нові* вершини.

Останній пункт можна модифікувати «… до побудови найкоротших *M*-чергових ланцюгів», щоб отримати граф таких ланцюгів.

Алгоритм Хопкрофта-Карпа побудови максимальної сполуки пар

1. Утворюємо довільну сполуку пар M у графі G.
2. Будуємо граф *найкоротших* M-чергових ланцюгів.
3. Будуємо *максимальну за вмістом* множину $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$, що містить M-чергові ланцюги в $G(M)$, що не мають спільних вершин. Інакше кажучи, для довільного M-чергового ланцюга P в $G(M)$ існує j $(1 \leq j \leq k)$, при якому ланцюги P и P_j містять принаймні одну спільну вершину.
4. Замінюємо M на симетричну різницю M і P_j при $j = 1, 2, \ldots, k$.
5. Повторюємо кроки 2–4 доти, поки у графі G існує хоча б одна M-черговий ланцюг.

Поданий алгоритм втілено у програмі мовою Turbo Pascal 7.0 для розв'язання задачі про призначення.