Київський університет імені Бориса Грінченка

***М.М. Астаф'єва, О.С. Литвин, С.П. Радченко,
Ю.І. Самойленко, С.О. Семеняка***

ВИЩА МАТЕМАТИКА:
ГОТУЄМОСЬ ДО АТЕСТАЦІЇ

Частина ІІ
ПРАКТИКУМ

*Навчальний посібник
для студентів спеціальності 111 «Математика»
першого (бакалаврського) освітнього рівня*

Київ 2023

УДК 51(075.8)
В41

Рекомендовано до друку Вченою радою
Київського університету імені Бориса Грінченка
(*протокол № 6 від 17 червня 2021 р.*)

Авторський колектив:
Астаф'єва М.М., кандидатка фізико-математичних наук, доцентка;
Литвин О.С., кандидатка фізико-математичних наук, старша наукова співробітниця;
Радченко С.П., кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Самойленко Ю.І., докторка фізико-математичних наук, професорка;
Семеняка С.О., кандидатка фізико-математичних наук, доцентка.

За загальною редакцією **М.М. Астаф'євої**

Рецензенти:
Бойко В'ячеслав Миколайович, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук;
Задерей Петро Васильович, професор кафедри математичного аналізу і теорії ймовірностей Національного технічного університету «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», доктор фізико-математичних наук, професор.

В41 **Вища математика:** готуємось до атестації. Частина ІІ. Практикум: навч. посібник / М.М. Астаф'єва, О.С. Литвин, С.П. Радченко, Ю.І. Самойленко, С.О. Семеняка; за заг. ред. М.М. Астаф'євої. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2023. — 330 с.
ISBN 978-617-658-048-5

Посібник охоплює всі блоки Програми комплексного екзамену з вищої математики підсумкової атестації студентів першого (бакалаврського) освітнього рівня спеціальності 111 «Математика». Він містить короткі теоретичні відомості до кожної теми, приклади розв'язання типових задач та завдання для самостійної роботи.

Адресований студентам-бакалаврам спеціальності 111 «Математика», зокрема тим, які готуються до підсумкової атестації.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-617-658-048-5

Зміст

Передмова

Пропонована книга є другою частиною посібника «Вища математика: готуємось до атестації». Це «Практикум», мета якого — сприяти тому, щоб студенти актуалізували й систематизували знання щодо методів розв'язування задач з різних розділів вищої математики, уміння застосовувати математичні факти на практиці. У кожному пункті розділу наведено основні теоретичні положення (означення, формули, теореми), детальний аналіз та розв'язання типових задач. Деякі задачі розв'язані різними способами, доцільність яких порівнюється. Дотриманий також той самий принцип систематизації та інтеграції, що й у першій частині посібника: наприклад, у розділі «Границя й неперервність функції» розглядаються задачі на границі й неперервність як функцій однієї (дійсної та комплексної) змінної, так і функцій багатьох змінних.

Пропонується багато задач для самостійного розв'язання, що дає студентам широкі можливості для активної самостійної роботи.

Автори сподіваються, що посібник стане корисним студентам-математикам при підготовці до підсумкової атестації, а також студентам математичної спеціальності під час вивчення дисциплін: лінійної алгебри, вищої алгебри та теорії чисел; аналітичної, конструктивної, проєктивної та диференціальної геометрій; математичного аналізу; комплексного аналізу; диференціальних рівнянь.

Інформація про авторство матеріалів посібника наведена у таблиці.

Розділ 1. Лінійна алгебра	С.П. Радченко, С.О. Семеняка
Розділ 2. Вища алгебра	С.П. Радченко
Розділ 3. Аналітична геометрія	С.П. Радченко, С.О. Семеняка
Розділ 4. Диференціальна геометрія	С.П. Радченко
Розділ 5. Проєктивна геометрія	О.С. Литвин
Розділ 6. Границя й неперервність функції	М.М. Астаф'єва
Розділ 7. Диференціальне числення	М.М. Астаф'єва, Ю.І. Самойленко, С.О. Семеняка
Розділ 8. Інтегральне числення	М.М. Астаф'єва, Ю.І. Самойленко
Розділ 9. Ряди	М.М. Астаф'єва, Ю.І. Самойленко
Розділ 10. Диференціальні рівняння	С.О. Семеняка

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

1.1.1. Матриці: основні поняття, властивості, операції

Матрицею розміру $m \times n$ називається таблиця, що складається з m рядків і n стовпчиків і позначається $A = (a_{ij})_{m\times n}$, де a_{ij} — елементи матриці, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Якщо $m = n$, матриця називається квадратною. Квадратна матриця, на головній діагоналі якої стоять одиниці, а решта елементів — нулі, називається одиничною і позначається E.

Операції над матрицями

1. Множення матриці на число: для того щоб помножити матрицю A на число λ, потрібно це число помножити на кожен елемент матриці.

2. Додавання (віднімання) матриць *однакової розмірності*: для того щоб додати (відняти) дві матриці, потрібно додати (відняти) їх відповідні елементи.

Властивості операції додавання матриць

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A + O = O + A$, де O — нульова матриця;
4) якщо $A + B = O$, то B — протилежна до A матриця.

3. Множення матриць: добутком матриць $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ та $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times k}$ називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times k}$, $c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$. Тобто, кожен елемент матриці C дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Для існування добутку матриць A та B необхідно, щоб кількість стовпців матриці A дорівнювала кількості рядків матриці B.

Властивості операції множення матриць

1) $AB \neq BA$;
2) $(AB)C = A(BC)$;
3) $AE = EA$, де E — одинична матриця;
4) $(A + B)C = AC + BC$ або $C(A + B) = CA + CB$.

4. Піднесення *квадратної* матриці до степеня виражається через операцію множення матриць: $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$.

Приклад 1.1.1. Обчислити матрицю $C = A \times B$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

►Кількість стовпців лівої матриці $A_{2\times 3}$ дорівнює кількості рядків матриці $B_{3\times 2}$, тому добуток існує і дорівнює:

$$C_{2\times 2} = A_{2\times 3} \times B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-2)+7\cdot 1+(-3)\cdot 1 & 0\cdot 3+7\cdot 0+(-3)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot(-2)+1\cdot 1+0\cdot 1 & (-1)\cdot 3+1\cdot 0+0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.◄$$

1.1.2. Визначники: властивості, способи обчислення

Визначник (детермінант) квадратної матриці A — це число, яке характеризує матрицю A і обчислюється за певним правилом. Позначається $\det A$, $|A|$ або Δ.

Наприклад, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ є визначником матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Основні властивості визначників

1. При транспонуванні значення визначника не зміниться.
2. Якщо елементи будь-якого рядка або стовпця визначника помножити на число λ, то значення визначника також помножиться на це число λ.
3. Якщо у визначника поміняти місцями два рядки або стовпці, то визначник змінить знак на протилежний.
4. Якщо всі елементи будь-якого рядка або стовпця визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.
5. Якщо кожна пара елементів двох рядків, що належать одному стовпцю, пропорційні, то визначник дорівнює нулю; якщо кожна пара елементів двох стовпців, що належать одному рядку, пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
6. Якщо всі елементи деякого рядка або стовпця є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких всі елементи (крім елементів вказаного рядка або стовпця) залишаються без змін, а елементи рядків (стовпців) цих двох визначників, які відповідають вказаному рядку або стовпцю, дорівнюють відповідним доданкам вказаного рядка або стовпця.

На прикладі визначника третього порядку це матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}+a_{11}^{(2)} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{(1)}+a_{21}^{(2)} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{(1)}+a_{31}^{(2)} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Значення визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка або стовпця додати елементи іншого рядка або стовпця, помножені на деяке число.
8. Визначник трикутної матриці завжди дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Правила обчислення визначників

- Визначники другого порядку: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
- Визначники третього порядку (правило трикутників):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \end{matrix}.$$

- Правило обчислення визначників вищих порядків (≥ 3) ґрунтується на теоремі Лапласа.

Розглянемо матрицю $A = (a_{ij})$; $i, j = \overline{1, n}$.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, отриманий з визначника матриці A вилученням i-того рядка та j-того стовпчика.

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A визначається формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 1.1.1 (Лапласа)

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

$$\text{або } |A| = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni},$$

а сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка або стовпця дорівнює нулю:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j$$

$$\text{або } a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj},\ i \neq j.$$

Приклад 1.1.2. Розкласти визначник за елементами третього рядка й обчислити, використовуючи теорему Лапласа.

$$\blacktriangleright |A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{(3+1)} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{(3+3)} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot ((-2) \cdot 3 - 1 \cdot 1) + (-2) \cdot ((-3) \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) = 2 \cdot (-6 - 1) +$
$+ (-2) \cdot (-3 - 4) = 2 \cdot (-7) + 14 = -14 + 14 = 0.$◄

Приклад 1.1.3. Порахувати визначник, звівши його до верхнього трикутного вигляду.

$$\blacktriangleright |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2C_2 + C_{1\downarrow}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2P_1 + P_{3\downarrow}) =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (C3 \leftrightarrow C2) = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot 3 \cdot (-4) = -12.$$◄

Матриця A^{-1} називається оберненою до *квадратної* матриці A, якщо виконується умова $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб квадратна матриця A була *невиродженою*, тобто $\det A \neq 0$. Якщо умова $\det A \neq 0$ виконується, обернена матриця знаходиться за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$, де $(A_{ij})^T$ — транспонована матриця алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці A.

Приклад 1.1.4. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 10 & 19 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

►Для обчислення оберненої матриці знайдемо визначник матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 10 & 19 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 76 + 24 - 60 - 0 - 38 = 2.$$

На наступному кроці обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів a_{ij} матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 10 & 19 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 38, \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 19 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 19 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 38, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 19 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = -2.$$

Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень

$$A_{ij}=\begin{pmatrix}38 & 38 & -12\\ -6 & -6 & 2\\ 8 & 7 & -2\end{pmatrix}$$

та транспонуємо її $\left(A_{ij}\right)^T=\begin{pmatrix}38 & -6 & 8\\ 38 & -6 & 7\\ -12 & 2 & -2\end{pmatrix}$. Скориставшись формулою $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$, знаходимо:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}38 & -6 & 8\\ 38 & -6 & 7\\ -12 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Щоб переконатися у правильності отриманого результату, зробимо перевірку. Згідно з означенням $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Звідси:

$$A^{-1}A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}38 & -6 & 8\\ 38 & -6 & 7\\ -12 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -4 & 10 & 19\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\ .◄$$

Ранг матриці A ($r(A)$, $rang(A)$, $rank(A)$) — це найбільший з порядків ненульових мінорів матриці A. Якщо матриця $A=(a_{ij})_{m\times n}$ має розмірність $m\times n$, то мінор k-го порядку матриці A — це визначник, складений з елементів, що стоять на перетині будь-яких k рядків і такої ж кількості стовпців, де $k\le\min\{m,n\}$.

При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється. *Елементарними перетвореннями* матриці називаються операції:

1) транспонування;
2) перестановка рядків або стовпців;
3) множення всіх елементів рядка або стовпця на будь-яке число, відмінне від нуля;
4) додавання до всіх елементів рядка або стовпця відповідних елементів паралельного ряду, помноженого на одне й те саме число.

Ранг матриці можна знайти, застосовуючи метод елементарних перетворень. Його суть полягає в тому, що матрицю A приводять до ступінчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень — кількість ненульових рядків отриманої ступінчастої матриці визначає ранг матриці A.

Приклад 1.1.5. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

►Помножимо другий і третій рядки матриці на (–2) і додамо до них перший:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ (-2)II+I\\ (-2)III+I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 0 & -9 & -3 & -12\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ III+3II\end{matrix}.$$

Потім помножимо другий рядок на 3 і додамо до третього рядка: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Отримана ступінчаста матриця містить два ненульових рядки, тому її ранг дорівнює 2. Отже, ранг матриці A також дорівнює 2.◄

1.1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Систему m рівнянь з n невідомими вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

називають *неоднорідною* системою лінійних алгебраїчних рівнянь, де a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ — коефіцієнти при змінних; b_j, $j = \overline{1, n}$ — вільні члени, які є числами; x_i, $i = \overline{1, n}$ — невідомі. Скорочений запис — $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = \overline{1, m}$.

Якщо $b_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь є *однорідною*.

Неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь може не мати розв'язків (тоді її називають несумісною), може мати лише один розв'язок або багато розв'язків (тоді її називають сумісною). Питання про сумісність системи рівнянь розглядається в наступній теоремі.

Теорема 1.1.2. (Кронекера-Капеллі або умова сумісності неоднорідних систем лінійних рівнянь)

Для сумісності неоднорідних систем лінійних рівнянь необхідно й достатньо, щоб ранг матриці коефіцієнтів системи дорівнював рангу розширеної матриці.

Якщо система сумісна і ранг матриці коефіцієнтів системи дорівнює числу невідомих, то система має *єдиний* розв'язок.

Якщо система сумісна і ранг матриці коефіцієнтів системи менше числа невідомих, то система має *безліч* розв'язків.

Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

І. Метод Крамера. Нехай основна квадратна матриця системи A, а стовпчик вільних членів B. Система має вигляд $A \cdot X = B$. Визначник матриці A позначимо $\Delta = |A|$. Позначимо визначники Δ_j, які відповідають матрицям, отриманим заміною j-го стовпця даної матриці на стовпець B.

Тоді розв'язок системи рівнянь можна подати у вигляді рівностей: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = \overline{1, n}$.

Приклад 1.1.6. Знайти розв'язок системи рівнянь методом Крамера. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

►Щоб використати формули Крамера для розв'язання цієї системи рівнянь, обчислимо всі необхідні визначники.

Визначник основної матриці системи

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Для обчислення Δ_1 — замінимо перший стовпець матриці A на стовпчик вільних членів: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48.$

Для обчислення Δ_2 — замінимо другий стовпець матриці A на стовпчик вільних членів: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -24.$

Для обчислення Δ_3 — замінимо третій стовпець матриці A на стовпчик вільних членів: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12$.

Використовуючи формули $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = \overline{1,n}$, отримуємо розв'язок вихідної системи рівнянь:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 4,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1. ◄$$

II. Матричний метод. У матричній формі неоднорідна система лінійних рівнянь має вигляд $AX = B$. Помножимо дану рівність зліва на A^{-1}, отримаємо $\underbrace{A^{-1}A}_{E} X = A^{-1}B$ або $X = A^{-1}B$.

Формула $X = A^{-1}B$ лежить в основі матричного методу розв'язування неоднорідної системи лінійних рівнянь.

Приклад 1.1.7. Розв'язати систему 3-го порядку матричним методом.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -4x_1 + 10x_2 + 19x_3 = 35, \\ 2x_1 - 2x_2 = -2. \end{cases}$$

►Матриця коефіцієнтів вихідної системи має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 10 & 19 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю до матриці A було знайдено в *прикладі 4*:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 38 & -6 & 8 \\ 38 & -6 & 7 \\ -12 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу матричного методу $X = A^{-1}B$, обчислимо розв'язки заданої в умові системи:

$$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 38 & -6 & 8 \\ 38 & -6 & 7 \\ -12 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 35 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. ◄$$

III. Метод Гауса. Даний метод полягає в послідовному виключенні змінних, коли за допомогою елементарних перетворень вихідна система зводиться до рівносильної їй системи трикутного або ступінчастого вигляду. Потім послідовно, починаючи з останнього рівняння, яке містить одну невідому, знаходимо всі невідомі вихідної системи.

Зауважимо, що елементарні перетворення зручно проводити не з вихідною системою, а з розширеною матрицею коефіцієнтів системи.

Приклад 1.1.8. Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

►Випишемо розширену матрицю B даної системи та приведемо її до трикутного вигляду:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Для цього послідовно помножимо перший рядок на (–2) та додамо його до другого рядка; після цього помножимо перший рядок на (–3) та додамо результат до третього рядка, помножимо перший рядок на (–2) та додамо результат до четвертого рядка. У результаті перетворень отримаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

До другого рядка отриманої матриці додамо третій рядок, помножений на (–1), далі в отриманій матриці поділимо третій рядок на (–2), четвертий — на (–1); після цього помножимо другий рядок на 2 та додамо його до третього рядка:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -5 & 20 \end{array}\right).$$

Далі помножимо другий рядок на 7 та додамо до четвертого рядка:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 18 & -54 & 90 \end{array}\right).$$

Третій рядок отриманої матриці поділимо на 9, четвертий — на 18: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right)$, після чого від четвертого рядка віднімемо третій рядок: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

Знайдена матриця має трикутний вигляд; для застосування оберненого ходу методу Гауса запишемо систему рівнянь, що відповідає отриманій матриці і є еквівалентною вихідній системі:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10, \\ x_3 - 2x_4 = 3, \\ -x_4 = 2. \end{cases}$$

Послідовно знаходимо невідомі, починаючи з останнього рівняння, $x_4 = -2$. Підставимо у третє рівняння знайдене значення x_4, обчислимо x_3: $x_3 = -1$. Далі з другого рівняння знаходимо x_2: $x_2 = 2$, з першого рівняння отримаємо x_1: $x_1 = 1$.◄

Приклад 1.1.9. Дослідити на сумісність систему і, якщо вона сумісна, знайти її розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$$

►Запишемо розширену матрицю коефіцієнтів системи і послідовно проведемо елементарні перетворення. Дістаємо такі матриці:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot I + II \\ -I + III \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ II + III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Ранг матриці системи $r(A)=2$, а ранг розширеної матриці системи $r(A|B)=3$. Отже, система несумісна.

Такий самий висновок можна зробити, якщо записати рівняння, що відповідає третьому рядку 0 = −6, яке є несумісним.◄

Розглянемо однорідну систему m рівнянь з n невідомими $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ \ i=\overline{1,m}$. Ця система завжди сумісна, оскільки вона має нульовий розв'язок $\Theta = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$. Якщо ранг системи дорівнює кількості невідомих, то нульовий розв'язок — єдиний. Якщо ранг системи менший за кількість невідомих, то, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі, система має безліч розв'язків.

Нагадаємо деякі властивості однорідної системи рівнянь.

1. Якщо $\tilde{x} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n)$ — розв'язок системи, то $\mu\tilde{x} = (\mu\alpha_1 \quad \mu\alpha_2 \quad \dots \quad \mu\alpha_n)$ — теж її розв'язок.
2. Якщо $\tilde{x} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n)$ та $\hat{x} = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n)$ — розв'язки системи, то $\tilde{x}+\hat{x} = (\alpha_1+\beta_1 \quad \alpha_2+\beta_3 \quad \dots \quad \alpha_n+\beta_n)$ — теж її розв'язок.

Нехай $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ — сукупність розв'язків системи. Якщо співвідношення $\gamma_1 x^{(1)} + \gamma_2 x^{(2)} + \dots + \gamma_k x^{(k)} = \Theta$ виконується тільки за умови, що $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_k = 0$, то така сукупність розв'язків називається *лінійно незалежною*.

Максимальна сукупність лінійно незалежних розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається *фундаментальною системою розв'язків*.

3. Однорідна система m лінійних алгебраїчних рівнянь, ранг якої дорівнює r, може бути зведена еквівалентними перетвореннями до системи, що складається з r рівнянь.

4. Якщо однорідна система m лінійних алгебраїчних рівнянь має ранг r менший за кількість невідомих n, то вона має фундаментальну систему розв'язків, кількість яких дорівнює $n - r$.

Приклад 1.1.10. Знайти фундаментальну систему розв'язків для системи

$$\begin{cases} 16x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 62x_5 = 0, \\ 15x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 58x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 36x_5 = 0. \end{cases}$$

►Як бачимо, мінор основної матриці, складений з коефіцієнтів перших трьох стовпців, не дорівнює нулю. Отже, ранг матриці коефіцієнтів системи дорівнює 3, система має безліч розв'язків. Це означає, що невідомі x_4, x_5 — вільні, тобто їм можна надавати будь-яких значень, і система, що містить перші три невідомі, має єдиний розв'язок.

Покладемо спочатку $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. Отримана система матиме вигляд:

$$\begin{cases} 16x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 15x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

Використовуючи один із методів розв'язання систем, знаходимо розв'язок $\tilde{x}^1 = (0 \quad 6 \quad -2 \quad 1 \quad 0)$.

Нехай тепер $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.

Отримана система матиме вигляд:

$$\begin{cases} 16x_1 + x_2 + x_3 = -62, \\ 15x_1 + x_2 + x_3 = -58, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = -36, \end{cases}$$

а розв'язок початкової системи $\tilde{x}^2 = (-4 \quad 9 \quad -7 \quad 0 \quad 1)$.

Перевіримо обидва розв'язки на лінійну залежність. З цією метою побудуємо матрицю, рядками якої є знайдені розв'язки:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 6 & -2 & 1 & 0\\ -4 & 9 & -7 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює 2, оскільки існує мінор другого порядку, який не дорівнює нулеві: $M=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$. Це означає, що рядки матриці є лінійно незалежними.

Таким чином, фундаментальна система розв'язків складається з двох лінійно незалежних розв'язків: $\tilde{x}^1=\begin{pmatrix}0 & 6 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ та $\tilde{x}^2=\begin{pmatrix}-4 & 9 & -7 & 0 & 1\end{pmatrix}$.◄

(Теоретичні відомості з теми «Лінійні (векторні) простори, підпростори. Базис і розмірність скінченновимірного векторного простору» див.: [4] розділ 2, п. 2.1.1).

1.1.4. Застосування матриць і визначників до розв'язання прикладних задач

Задача 1.1.1. У цеху підприємства випускають продукцію трьох видів, використовуючи при цьому сировину двох типів. Витрати сировини на виробництво продукції задається матрицею $S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}10 & 12 & 9\\ 6 & 8 & 4\end{pmatrix}$, де s_{ij} — кількість одиниць сировини i-го типу, що використовується на виготовлення одиниці продукції j-го виду. План тижневого випуску продукції передбачає 200 одиниць продукції першого виду, 100 одиниць продукції другого виду та 120 одиниць продукції третього виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 2 і 4 грн.

Визначити загальні витрати сировини, необхідні для тижневого випуску продукції, а також загальну вартість цієї сировини.

►Знайдемо кількість сировини, яка витрачається на випуск тижневої продукції. Для цього матрицю витрат сировини S помножимо на матрицю тижневого випуску продукції $\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 120\end{pmatrix}$, отримаємо: $\begin{pmatrix}10 & 12 & 9\\ 6 & 8 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4280\\ 2480\end{pmatrix}$.

Враховуючи, що матриця $\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$ визначає ціну (в грн) одиниці кожного типу сировини, знаходимо загальну вартість сировини, яка необхідна для тижневого випуску продукції: $\begin{pmatrix}4280\\ 2480\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}=18\,480$ грн.◄

Задача 1.1.2. З деякого листового матеріалу потрібно викроїти 170 заготовок типу А, 170 заготовок типу Б та 80 заготовок типу В. При цьому застосовують три способи розкрою. Кількість заготовок, які можна отримати з кожного листа при кожному способі розкрою, вказана в таблиці.

Тип розкрою	**Спосіб розкрою**		
	I	**II**	**III**
А	4	2	3
Б	1	5	2
В	3	1	1

Знайти кількість листів матеріалу, необхідного для одержання заданої кількості заготовок кожного типу.

►Позначимо через x_1, x_2, x_3 кількість листів матеріалу, який розкроюють відповідно першим, другим або третім способом. Тоді для заготовок типу А при першому способі розкрою вийде $4x_1$ заготовок, при другому — $2x_2$, а при третьому — $3x_3$. Загальна кількість заготовок типу А $4x_1 + 2x_2 + 3x_3$ повинна дорівнювати 170. Маємо рівняння $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 170$.

Аналогічно, розраховуючи кількість заготовок типу Б і В, дістаємо такі рівняння: $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 170$, $3x_1 + x_2 + x_3 = 80$. Для знаходження кількості листів матеріалу x_1, x_2, x_3 маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 170, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 170, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 80. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему одним із наведених вище методів, знаходимо $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$.◄

1.2. Завдання для самостійної роботи

Матриці: основні поняття, властивості, операції

1. Знайти добуток матриць A і B:

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 10 & 4 \\ 2 & 6 & 6 & 14 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 17 & 9 \\ 11 & 17 & 12 & 5 \\ 17 & 4 & 2 & 11 \\ 7 & 16 & 8 & 12 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 13 & 19 \\ 3 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 2 & 20 \\ 2 & 11 & 18 & 12 \\ 10 & 6 & 12 & 8 \\ 13 & 12 & 16 & 16 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 16 & 13 \\ 9 & 17 & 18 & 11 \\ 9 & 7 & 18 & 12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 16 & 16 \\ 5 & 11 & 14 & 4 \\ 12 & 15 & 14 & 3 \\ 10 & 4 & 18 & 8 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 4 & 10 \\ 15 & 14 & 17 & 4 \\ 20 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 7 & 15 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 18 & 14 \\ 15 & 0 & 19 & 1 \\ 14 & 17 & 3 & 4 \\ 4 & 15 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 19 \\ 15 & 4 & 19 & 4 \\ 6 & 1 & 19 & 18 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 12 & 12 \\ 7 & 6 & 15 & 7 \\ 17 & 3 & 15 & 9 \\ 6 & 5 & 19 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 26 & 2 & 14 & 8 \\ 22 & 1 & 13 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 30 & 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 94 & -28 & -11 & 5 \\ 52 & -27 & -16 & 9 \\ 126 & 4 & 21 & -15 \\ 44 & -35 & -24 & 14 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -7 & -4 \\ 8 & 1 & 13 & 7 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 26 & 2 & 14 & 8 \\ 33 & 3 & 17 & 10 \\ 34 & 4 & 16 & 10 \\ 30 & 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -185 & 16 & -54 & 30 \\ -191 & -4 & -45 & 34 \\ 27 & 80 & -38 & -14 \\ -244 & -20 & -49 & 45 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 26 & 2 & 14 & 8 \\ 63 & 6 & 32 & 19 \\ 34 & 4 & 16 & 10 \\ 30 & 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 14 & 8 \\ 8 & 1 & 13 & 7 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити матрицю, обернену для заданої матриці:

1) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -9 & 2 & -7 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ -7 & -4 & -5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -9 & -9 & -1 \\ -7 & 5 & -5 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -1 & -9 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 7 & -7 & -4 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Визначники: властивості, способи обчислення

1. Знайти визначник матриці A за властивостями визначників:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -9 & -12 & -18 \\ 15 & 24 & 19 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 9 & 8 & 6 \\ -9 & -3 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 10 & 2 & 29 \\ 4 & 4 & 19 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 14 \\ 4 & 10 & -25 \end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 9 & -2 & -6 \\ 9 & 1 & 13 \end{pmatrix}$; 7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & -14 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -11 \end{pmatrix}$; 9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -4 & -9 & -9 \\ -1 & 3 & 25 \end{pmatrix}$.

2. Знайти визначник матриці A за теоремою Лапласа:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 4 & -14 & -6\\ 2 & -10 & -11\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ 12 & 39 & -27\\ 14 & 49 & -34\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 12 & -3 & 21\\ 6 & 3 & 7\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 7\\ 9 & 4 & 26\\ -12 & 3 & 8\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 4\\ 0 & 3 & 15\\ 18 & -19 & 20\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 3\\ 18 & -21 & 6\\ 15 & -17 & 4\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 4\\ -4 & 10 & 4\\ 8 & -14 & 29\end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 8 & 5 & 1\\ 10 & 4 & -9\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}14 & 14 & 4 & 10\\ 15 & 14 & 17 & 4\\ 20 & 7 & 9 & 1\\ 1 & 7 & 15 & 1\end{pmatrix}$.

3. Розв'язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix}x & x & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -7 & 1 & 5\end{vmatrix}=0$, 2) $\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$,

3) $\begin{vmatrix}4 & x & x\\ x & 4 & x\\ x & x & 4\end{vmatrix}=0$.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1. Дослідити систему та знайти, у разі сумісності, її розв'язки:

1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=3,\\ 3x_1+x_2-x_3=4,\\ x_1+x_2+x_3=2.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3=170,\\ x_1+5x_2+2x_3=170,\\ 3x_1+x_2+x_3=80.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\ 3x_1+2x_2+2x_3=9,\\ x_1-x_2+5x_3=10.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=-4,\\ 4x_1-x_2-2x_3=-3,\\ 2x_1-5x_2+x_3=7.\end{cases}$

5) $\begin{cases}2x_1-4x_2-2x_3=-10,\\ 4x_1-3x_3=-1,\\ 2x_1+3x_2+4x_3=22.\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=-1,\\ 3x_1+x_2-3x_3=9,\\ x_1+3x_2+3x_3=-1.\end{cases}$

7) $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=2,\\ 2x_1+7x_2+4x_3-2x_5=0,\\ 3x_1+10x_2+2x_3+5x_4+4x_5=7,\\ x_1+5x_2+11x_3-x_5=4.\end{cases}$

8) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+2x_5=2,\\ 2x_1+5x_2-x_4+x_5=0,\\ x_1-x_3+4x_4+4x_5=-2,\\ x_1-x_3+5x_3+5x_4+7x_5=1.\end{cases}$ 9) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3+2x_4+x_5=3,\\ 3x_1+4x_2-3x_3+2x_4-x_5=6,\\ 2x_1+4x_2-3x_3-4x_4-6x_5=5,\\ 4x_1+5x_2-4x_3+4x_4=9.\end{cases}$

10) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-2x_4+3x_5=2,\\ x_1+2x_3-3x_4-5x_5=-1,\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=-4,\\ 2x_1+4x_2+11x_3+12x_4+16x_5=-1.\end{cases}$

2. Встановити, при яких значеннях λ система рівнянь має єдиний розв'язок, і знайти його:

$$1)\ \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Знайти фундаментальну систему розв'язків для системи:

$$1)\ \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - x_3 - 68x_4 + -40x_5 = 0, \\ -6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 12x_4 + 8x_5 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 40x_4 - 24x_5 = 0. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 10x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 62x_4 - 123x_5 = 0, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 26x_4 + 57x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 14x_4 - 21x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 28x_4 - 46x_5 = 0, \\ 10x_1 + 2x_3 + 70x_4 + 50x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 26x_4 + 25x_5 = 0. \end{cases}$$

Застосування матриць і визначників до розв'язання прикладних задач

1. У цеху підприємства виготовляють дві моделі жіночого одягу. На виготовлення першої моделі витрачають 2 м тканини, на виготовлення другої — 3 м. При цьому витрати робочого часу на виробництво цих моделей становить відповідно 4 та 5 год. Відомо, що тижневий запас тканини — 100 м, а робочий час обмежено — 190 год.

   Скласти план тижневого виготовлення цих моделей одягу, при якому повністю використовуються ресурси (тканина і робочий час).

2. Підприємство випускає продукцію двох видів, використовуючи при цьому сировину трьох типів. Витрати сировини на виробництво продукції задається матрицею $S = (s_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, де s_{ij} — кількість одиниць сировини i-го типу, що використовується на виготовлення одиниці продукції j-го виду. План тижневого випуску продукції передбачає 90 одиниць продукції першого виду, 120 одиниць продукції другого виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 8, 5 і 10 грн.

   Визначити витрати сировини, необхідні для щоденного випуску продукції, а також загальну вартість цієї сировини.

3. Швейна фабрика спеціалізується на випуску дитячого, жіночого та чоловічого костюмів. При цьому використовують тканини трьох типів. Норми витрат кожної з них на один костюм та за один день подані в таблиці.

Вид тканини	Норми витрат тканини на один костюм (в ум. од.)			Обсяг витрат тканини за 1 день (в ум. од.)
	дитячий	жіночий	чоловічий	
I	1	3	4	1900
II	2	5	5	3100
III	1	2	5	1800

   Знайти щоденний обсяг випуску кожного костюму.

4. Із пункту А в пункт Б необхідно перевезти обладнання трьох типів: I типу — 150 одиниць, II типу — 310 одиниць і III типу — 200 одиниць. Для цього можна замовити три види транспорту. Кількість обладнання кожного типу, який вміщується у певний вид транспорту, наведено в таблиці.

Тип обладнання	Вид транспорту		
	Т1	Т2	Т3
I	1	4	2
II	3	6	4
III	3	4	2

Визначити кількість транспорту кожного виду, яку необхідно замовити, щоб можна було перевезти все обладнання кожного типу.

5. При виготовленні деталей чотирьох видів витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задаються таблицею:

Ресурси	Витрати (в ум. од.) на одну деталь			
	I	II	III	IV
Матеріали	1	3	0,5	2
Робоча сила	1,5	2	3	1
Електроенергія	2	1	1	0,5

Обчислити загальні потреби в матеріалах y_1, робочій силі y_2 та електроенергії y_3 для виготовлення заданої кількості деталей кожного виду $x_1 = 10$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 4$.

Розділ 2. ВИЩА АЛГЕБРА

2.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

2.1.1. Відношення подільності чисел та поліномів

(Основна теорема алгебри та наслідки з неї (див.: [4], розділ 2, п. 2.1.2)).

Ціле число a ділиться на ціле число b, якщо існує таке ціле число c, що $a = bc$.

Властивість 1. Будь-яке ціле число a ділиться на a, $-a$, 1, –1.

Властивість 2. Якщо $a \cdot b = 0$, то або $a = 0$, або $b = 0$, або обидва числа дорівнюють нулю.

Властивість 3. Якщо два цілих числа a і b діляться на ціле число c, то їх сума та різниця також діляться на c.

Властивість 4. Якщо ціле число a ділиться на ціле число b і k — ціле число, то ak ділиться на b.

Наслідок. Якщо всі числа сукупностей $a_1, a_2, ..., a_s$ та $b_1, b_2, ..., b_p$ діляться на ціле число c, то з рівності $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_s a_s = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + ... + \beta_p b_p + b_{p+1}$, де $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_s, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_p \in R)$, випливає, що і число b_{p+1} ділиться на ціле число c.

Найбільшим спільним дільником двох чисел є спільний дільник цих чисел, який ділиться на будь-який інший дільник вказаних чисел. Найбільший спільний дільник чисел a, b часто позначається НСД (a, b), або скорочено — (a, b).

Два цілих числа називаються *взаємно простими*, якщо їх НСД дорівнює 1.

Наслідок. Якщо d є найбільшим спільним дільником цілих чисел a та b, то $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ — взаємно прості числа.

Властивість 5. Якщо цілі числа a_1, a_2 взаємно прості з цілим числом b, то їх добуток $a_1 \cdot a_2$ теж взаємно простий з b.

Властивість 6. Якщо цілі числа a_1, a_2 взаємно прості, то при натуральних k і m числа a^k та b^m взаємно прості.

Властивість 7. Якщо добуток $a \cdot b$ двох цілих чисел a, b ділиться на ціле число c і перший множник a взаємно простий із c, то b ділиться на c.

Властивість 8. Якщо ціле число ділиться на взаємно прості числа, то воно ділиться і на їх добуток.

Властивість 9. Будь-яке ціле число, що більше за одиницю, ділиться принаймні на одне просте число.

Властивість 10. Якщо число n — натуральне, а p — просте, то або n і p взаємно прості, або n ділиться на p.

Властивість 11. Якщо a_1, a_2 — два різних простих числа, то вони взаємно прості.

Властивість 12. Якщо добуток двох цілих чисел ділиться на просте число p, то хоча б один з множників ділиться на число p.

Властивість 13. Якщо добуток декількох цілих чисел ділиться на просте число p, то на p ділиться хоча б один з множників.

Теорема 2.1.1 (основна теорема арифметики)

Кожне натуральне число n більше за одиницю можна подати у вигляді добутку степенів простих множників: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — попарно різні прості числа.

Теорема 2.1.2

Для будь-якої пари цілих чисел a, b можна вказати одну й тільки одну пару цілих чисел q та r, для яких справджується співвідношення:

$$a = q \cdot b + r \text{, причому } 0 \le r \le |b|.$$

Лема 1. Нехай a та b — натуральні числа і r — остача (лишок) від ділення a на b. Тоді найбільший спільний дільник чисел a та b дорівнює найбільшому спільному дільникові чисел b і r, тобто НСД (a, b) = НСД (b, r).

Лема 2. Нехай a та b — натуральні числа і a ділиться на b. Тоді НСД $(a, b) = b$.

Алгоритм Евкліда обчислення НСД двох цілих чисел

Нехай задані два числа a та b. Будемо виконувати послідовно ділення з остачею за таким алгоритмом:

$$a = q_0 b + r_0 \quad (0)$$

$$b = q_1 r_0 + r_1 \quad (1)$$

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2 \quad (2)$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad (3)$$

……………………………..

$$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \quad (n-1)$$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad (n)$$

$$r_n = 0 \;\Rightarrow\; (a,b) = r_{n-1}.$$

Знайти НСД можливо не тільки для двох, але й для будь-якої скінченної кількості цілих чисел. При цьому алгоритм Евкліда треба буде застосовувати багато разів. Це випливає з таких міркувань: якщо ми знаємо НСД сукупності $n-1$ цілих чисел $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$, то НСД сукупності цілих чисел $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}, r_n$, утвореної з попередньої шляхом додавання до неї числа r_n, дорівнює НСД пари чисел — НСД попередньої сукупності та числа r_n.

Отже, цілком очевидний алгоритм знаходження НСД сукупності цілих чисел полягає у серії послідовних кроків. Спочатку ми знаходимо НСД для пари чисел, наприклад, для r_1, r_2 позначимо $d_1 = (r_1, r_2)$. Потім НСД числа d_1 та якогось третього числа сукупності, наприклад, r_3 — позначимо $d_2 = (d_1, r_3)$, або $d_2 = (r_1, r_2, r_3)$ і т. д., доки не переберемо всі числа сукупності.

Отримане в кінці послідовності число і буде НСД сукупності цілих чисел $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}, r_n$.

О з н а ч е н н я 2.1.1. Алгебраїчний вираз вигляду $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, де $a_i \in R$, $(0 \le i \le n)$, $(i, n \in N)$, називається поліномом змінної x порядку n над полем дійсних чисел.

Додаванням двох поліномів n-го порядку

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

$$\text{та } g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$$

є операція знаходження полінома

$$h(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x^1 + c_0,$$

коефіцієнти якого задовольняють рівності: $c_i = a_i + b_i$, $(0 \le i \le n)$. Поліном $h(x)$ при цьому називають сумою поліномів $f(x)$ та $g(x)$.

Множенням двох поліномів порядку

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

$$\text{та } g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$$

є операція знаходження полінома

$$h(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x^1 + c_0,$$

коефіцієнти якого задовольняють рівності:

$$c_i = \sum_{\substack{p+q=i \\ p,q=0}}^{i} a_p b_q, \ (0 \le i \le n).$$

Теорема 2.1.3

Для будь-яких поліномів $h(x)$ і $f(x)$ існують такі поліноми $p(x)$ та $q(x)$, причому ступінь полінома $q(x)$ менший, ніж ступінь полінома $f(x)$, що виконується співвідношення $h(x) = f(x) \cdot p(x) + q(x)$.

Алгоритм Евкліда знаходження НСД поліномів

$$h(x) = f(x) \cdot p(x) + q(x)$$

$$f(x) = q(x) \cdot p_1(x) + q_1(x)$$

$$q(x) = q_1(x) \cdot p_2(x) + q_2(x)$$

$$q_1(x) = q_2(x) \cdot p_3(x) + q_3(x)$$

....

$$q_{n-3}(x) = q_{n-2}(x) \cdot p_{n-1}(x) + q_{n-1}(x)$$

$$q_{n-2}(x) = q_{n-1}(x) \cdot p_n(x)$$

$$q_{n-1}(x) = \left(f(x), g(x) \right)$$

2.1.2. Поняття алгебраїчної структури. Групи та їх відображення. Фактор-групи

Підмножина H групи G, яка сама є групою відносно операції, заданої в G, називається підгрупою групи G.

Теорема 2.1.4

Підмножина H групи G є підгрупою тоді й тільки тоді, коли справджуються такі умови:
1) $(\forall a, b \in H)$: $ab \in H$;
2) одиничний елемент e групи G належить підмножині H;
3) $(\forall a \in H)$: $a^{-1} \in H$.

Теорема 2.1.5

Підмножина H групи G є підгрупою групи G тоді й тільки тоді, коли:
1) $(\forall a, b \in H)$: $ab \in H$;
2) $(\forall a \in H)$: $a^{-1} \in H$.

Приклад 2.1.1. Довести, що множина H всіх матриць n-го порядку, визначник яких дорівнює 1, є підгрупою групи всіх невироджених матриць n-го порядку відносно операції множення матриць.

►Для доведення цього факту потрібно перевірити умови теореми 2.1.2. Справедливість першої умови випливає з теореми про визначник добутку матриць, тобто $\left|A\times B\right|=\left|A\right|\cdot\left|B\right|$. Отже, якщо $\left|A\right|=\left|B\right|=1$, то і $\left|A\times B\right|=1$. Для доведення другої умови розглянемо деяку матрицю $A \in H$, яка задовольняє умову $\left|A\right|=1$, тобто належить нашій підмножині H. Нехай матриця B є оберненою до матриці A.

З означення оберненої матриці випливає, що $A\times B=E$, де E — одинична матриця і, отже, $\left|E\right|=1$. Застосовуючи вищезгадану теорему про визначник добутку матриць, отримаємо рівність $\left|A\times B\right|=\left|A\right|\cdot\left|B\right|=1\cdot\left|B\right|$, а також природне співвідношення $\left|A\times B\right|=\left|E\right|=1$. З цих двох рівностей випливає, що $1\cdot\left|B\right|=1$ або $\left|B\right|=1$. Тобто, $B\in H$.

Отже, H — підгрупа групи всіх невироджених матриць n-го порядку відносно операції множення.◄

2.1.3. Кільце, тіло, поле

Означення 2.1.2. *Кільцем* називається непорожня множина K, для елементів якої визначені дві операції — «додавання» та «множення», які ставлять у відповідність будь-яким двом елементам a, b з множини K один елемент $a + b$ з множини K — їх суму та один елемент ab з множини K — їх добуток.

При цьому виконуються деякі умови.
1. Комутативність «додавання»: $a + b = b + a$.
2. Асоціативність «додавання»: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Для будь-яких a, b з множини K рівняння $a + x = b$ відносно x завжди має розв'язок, який називається різницею чисел a, b та записується так: $x = b - a$.
4. Дистрибутивність «множення» відносно «додавання»: $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$.

Коментар 1. Умови 1–3 свідчать про те, що елементи кільця K утворюють комутативну групу відносно «додавання», оскільки існування нейтрального елементу очевидне. Щодо виконання обох операцій, то кажуть, що вони замкнені на множині K.

Коментар 2. Кільце, у якому існує нейтральний елемент відносно множення, називається кільцем з одиницею. Такого елементу у кільці може не бути. Наприклад, у кільці цілих парних чисел «одиниці» немає.

Коментар 3. Кільце, у якому операція «множення» є комутативною, називається комутативним кільцем. Операція «множення» може не бути комутативною. Наприклад, кільце матриць загалом є некомутативним.

Коментар 4. Кільце, у якому операція «множення» є асоціативною, називається асоціативним кільцем.

Означення 2.1.3. *Тілом* називається (можливо не комутативне) кільце, кожен ненульовий елемент якого має обернений.

Означення 2.1.4. *Полем* називається комутативне кільце, кожен ненульовий елемент якого має обернений.

Коментар 5. Найвідоміші приклади полів: поле раціональних чисел; поле дійсних чисел; поле комплексних чисел.

Коментар 6. Якщо деяка підмножина кільця сама є кільцем відносно тих самих операцій, що й це кільце, то її називають підкільцем кільця.

Коментар 7. Якщо деяка підмножина поля сама є полем відносно тих самих операцій, що й це поле, то її називають підполем поля *P*.

Коментар 8. Назви операцій — «додавання» та «множення» — беруться в лапки, оскільки вони необов'язково означають відомі операції з числами.

Наприклад, множина квадратних матриць певного порядку з цілими числами у якості елементів відносно операцій додавання та множення матриць утворює некомутативне кільце.

Приклад 2.1.2. Довести, що множина V чисел виду $\left\{a+b\sqrt{2}\right\}$, де a і b є раціональними числами, є полем.

►Для доведення цього факту треба спочатку показати, що множина V є комутативним кільцем. З цією метою розглянемо результат «додавання» двох будь-яких елементів цієї множини.

Якщо $t_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ і $t_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ є деякі елементи множини V, сума $t_1 + t_2$ буде дорівнювати:

$$t_1 + t_2 = (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}\,.$$

Позначимо суми у дужках: $a = a_1 + a_2$ та $b = b_1 + b_2$. Сума будь-яких раціональних чисел є раціональним числом, тому результат, записаний у вигляді: $t_1 + t_2 = a + b\sqrt{2}$, де a і b є раціональними числами, є числом, що відповідає умові належності елементу до множини V, тобто операція «додавання» замкнена.

«Множення» двох елементів множини V приводить до елементу виду

$$t_1 \cdot t_2 = (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \cdot a_2 + 2b_1 \cdot b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)\sqrt{2}\,.$$

Оскільки добуток двох раціональних чисел теж є раціональним числом, ми маємо в результаті «множення» число виду $t_1 \cdot t_2 = a + b\sqrt{2}$, де a і b є раціональними числами, тобто отриманий елемент належить множині V і операція «множення» у множині V замкнена.

Асоціативність та комутативність операцій «додавання» та «множення» випливають з властивостей раціональних чисел. Таким чином, V — комутативне кільце.

Залишається довести, що операція ділення на ненульовий елемент у множині V замкнена. Результат ділення елементів множини V є розв'язком рівняння $t_1 \cdot x = t_2$, де x — невідоме.

Подамо усі числа рівняння у вигляді:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (x_1 + x_2\sqrt{2}) = a_2 + b_2\sqrt{2}\,.$$

Помножимо ліву і праву частину рівняння на вираз $a_1 - b_1\sqrt{2}$:

$$(a_1^2 - 2b_1^2) \cdot (x_1 + x_2\sqrt{2}) = (a_2 + b_2\sqrt{2}) \cdot (a_1 - b_1\sqrt{2})\,.$$

Розкривши дужки у правій частині і поділивши обидві частини на $a_1^2 - 2b_1^2$, отримаємо:

$$x_1 + x_2\sqrt{2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 - 2b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\sqrt{2}}{a_1^2 - 2b_1^2} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot a_2 - 2b_1 \cdot b_2}{a_1^2 - 2b_1^2} + \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b}{a_1^2 - 2b_1^2}\sqrt{2}.$$

Таким чином, частка від ділення двох чисел цього виду теж належить множині V і операція ділення замкнена. Рівність нулю знаменників дробів у останньому співвідношенні неможлива, оскільки рівняння $a_1^2 - 2b_1^2 = 0$ не має розв'язків у множині ненульових раціональних чисел.

Отже, множина V — поле.◄

2.2. Завдання для самостійної роботи

Відношення подільності чисел та поліномів

1. Знайти найбільший спільний дільник чисел 477 204 та 637 179 400 за допомогою алгоритму Евкліда.
2. Знайти найбільший спільний дільник чисел 1 667 250 та 198 900 179 400 за допомогою алгоритму Евкліда.
3. Знайти найбільший спільний дільник чисел 149 500 та 275 179 400 за допомогою алгоритму Евкліда.
4. Знайти найбільший спільний дільник поліномів

   $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $x^3 + x^2 - x - 1$.
5. Знайти найбільший спільний дільник поліномів

   $3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$,

   $3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9$.
6. Знайти найбільший спільний дільник поліномів

   $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$.
7. Знайти найбільший спільний дільник поліномів

   $2x^6 - 5x^5 - 14x^4 + 36x^3 + 86x^2 + 12x - 31$,

   $2x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 37x^2 + 10x - 14$.
8. Знайти найбільший спільний дільник поліномів

   $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$, $3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$.
9. Знайти найбільший спільний дільник поліномів

   $x^4 - 4x^3 + 1$, $x^3 - 3x^2 + 1$.

Поняття алгебраїчної структури. Групи та їх відображення. Фактор-групи

1. Довести, що дві квадратні матриці другого порядку $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ утворюють групу по множенню матриць.

2. Множина неособливих матриць другого порядку з цілими числами у якості елементів відносно операції множення є: а) групоїдом; б) напівгрупою; в) моноїдом; г) групою. Вірне вказати.

   Чи виконується властивість комутативності?

3. Нехай задана множина, яка складається з двох елементів $A = \{e; a\}$, та бінарна операція на ній задається таблицею Келі:

*	*e*	*a*
e	*e*	*a*
a	*a*	*a*

   Довести, що вказана множина із заданою таким чином операцією є напівгрупою, але не є групою.

4. З'ясувати, чи є алгебра $M = \{c \mid a,b \in R; c = a \otimes b = a^2 + b^2\}$ напівгрупою, моноїдом, групою, групоїдом. Чи виконується властивість комутативності?

5. Чи є множина $M = \{c \mid a,b \in N; a \otimes b = [a,b]\}$, де $[a, b]$ — НСК чисел a, b, напівгрупою, моноїдом, групою, групоїдом? Чи виконується властивість комутативності?

6. З'ясувати, чи є алгебра $M = \left\{c \mid a,b \in Q; c = a \otimes b = \dfrac{a+b}{2}\right\}$ напівгрупою, моноїдом чи групою. Чи виконується властивість комутативності?

7. Задані три алгебраїчні системи: множина N з операцією додавання, множина $M_1 = \{x \mid x = 2k, k \in N\}$ також з операцією додавання та множина $M_2 = \{x \mid x = 2k+1, k \in N\}$ з операцією множення. З'ясувати, які з цих систем ізоморфні між собою.

8. Задані дві алгебраїчні системи: множина R дійсних чисел з операцією додавання, множина $R_+ = \{x \mid x \in R, x > 0\}$ з операцією множення. Довести, що ці системи ізоморфні між собою (застосувати у якості відображення функцію $y = \ln x$).

9. Встановити гомоморфізм групи коренів другого степеня з одиниці на групу коренів з одиниці четвертого степеня комплексних чисел відносно операції множення (застосуйте у якості відображення піднесення до квадрата).

10. Встановити гомоморфізм групи коренів другого степеня з одиниці на групу коренів з одиниці шостого степеня комплексних чисел відносно операції множення (застосувати у якості відображення піднесення до квадрата).

11. Встановити гомоморфізм групи одиничних матриць другого порядку на групу невироджених матриць другого порядку.

12. Побудувати фактор-групу групи коренів четвертого степеня з одиниці по підгрупі коренів з одиниці другого степеня комплексних чисел відносно операції множення (застосувати у якості відображення піднесення до квадрата).

13. Побудувати фактор-групу групи коренів шостого степеня з одиниці по підгрупі коренів з одиниці другого степеня комплексних чисел відносно операції множення (застосувати у якості відображення піднесення до квадрата).

14. Побудувати фактор-групу групи коренів шостого степеня з одиниці по підгрупі коренів з одиниці третього степеня

комплексних чисел відносно операції множення (застосувати у якості відображення піднесення до квадрата).

15. Побудувати фактор-групу групи невироджених матриць шостого порядку по підгрупі третього порядку з одиничним визначником.
16. Побудувати фактор-групу групи коренів восьмого степеня з одиниці по підгрупі коренів з одиниці другого степеня комплексних чисел відносно операції множення (застосувати у якості відображення піднесення до квадрата).

Кільце, тіло, поле

1. Нехай у множині R^2 задано операції:
   $$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)\ ,\ (a,b)(c,d)=(ac,\ bc+ad)\ .$$
   Довести, що операція множення комутативна, асоціативна та дистрибутивна відносно додавання. Чи буде вона кільцем і, якщо так, то яким?
2. Довести, що множина $M=\left\{c\in R \mid a,b\in Z;\ c=a+b\sqrt{5}\right\}$ є комутативним кільцем з одиницею відносно звичайних операцій додавання та множення.
3. Довести, що множина $M=\left\{c\in R \mid a,b\in Q;\ c=a+b\sqrt{3}\right\}$ є комутативним кільцем з одиницею відносно операцій додавання та множення чисел.
4. Довести, що множина всіх парних цілих чисел утворює кільце відносно операцій додавання та множення. Які властивості матиме таке кільце?
5. Довести, що множина всіх цілих чисел, кратних трьом, утворює кільце відносно операцій додавання та множення. Які властивості матиме таке кільце?
6. Довести, що множина комплексних чисел $z=a+bi;\ a,b\in Q$, a, b — раціональні числа, утворює поле відносно операцій додавання та множення.

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

3.1.1. Вектори: поняття, властивості, операції з векторами, задачі на використання векторів

Вектором називають напрямлений відрізок, у якого зазначено точку його початку *A* та кінця *B*. Позначають вектор двома літерами зі стрілкою або рискою вгорі ($\overrightarrow{AB}$). Вектор також може позначатись однією маленькою буквою зі стрілкою або рискою вгорі ($\vec{a}$, $\overline{b}$).

Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називають *нуль-вектором* і позначають $\vec{0}$: $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$, або просто 0.

Довжиною (модулем) вектора називають довжину відрізка, який зображає цей вектор і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, або просто *AB*. Аналогічно довжину вектора $\overline{a}$ позначають $\left|\overline{a}\right|$, або *a*. Якщо $\left|\overline{a}\right|=1$, то вектор називають *одиничним*.

Модуль $\left|\overline{a}\right|$ (довжина) вектора $\overline{a}=\left\{a_1;a_2;a_3\right\}$ дорівнює невід'ємному числу, що обчислюється за формулою $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{a^2{}_1+a^2{}_2+a^2{}_3}$.

Якщо вектор $\overline{a}=\left\{a_x;\,a_y;\,a_z\right\}$ утворює кути α, β, γ з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz*, то косинуси цих кутів називають *напрямними* і визначають за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

звідки $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Два вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих. Нехай задано два вектори: $\overline{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\}$ і $\overline{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$. Тоді вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні, якщо $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

Вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині або паралельних площинах.

Необхідною та достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Операції над векторами

Порівняння двох векторів. Два вектори називають *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і їхні довжини рівні.

Додавання двох векторів. *Сумою* $\overline{a}+\overline{b}$ двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, напрямлений з початку вектора $\overline{a}$ в кінець вектора $\overline{b}$ за умови, що початок вектора $\overline{b}$ співпадає з кінцем вектора $\overline{a}$.

Множення вектора на число. *Добутком* вектора $\overline{a}$ на число λ називають вектор $\overline{b}$, колінеарний вектору $\overline{a}$, при $\lambda>0$ однаково напрямлений з вектором $\overline{a}$, при $\lambda<0$ протилежно напрямлений з ним та $\left|\overline{b}\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\overline{a}\right|$.

Віднімання двох векторів. *Різницею* $\overline{a}-\overline{b}$ векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який дорівнює сумі векторів $\overline{a}$ і $-\overline{b}$: $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$.

Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними (позначають $\overline{a}\cdot\overline{b}$): $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi$.

Властивості скалярного добутку

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.
2. $\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\left(\lambda\overline{b}\right)=\lambda\cdot\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$.
3. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.
4. $\overline{a}\cdot\overline{a}=\left|\overline{a}\right|^2$.
5. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ тоді й тільки тоді, коли $\overline{a}\perp\overline{b}$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані координатами $\overline{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\}$, $\overline{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$, тоді

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

де φ — кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Векторний добуток. Упорядковану трійку некомпланарних векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ називають *правою*, якщо при зведенні їх до спільного початку із кінця третього вектора $\overline{c}$ найкоротший поворот від першого $\overline{a}$ до другого $\overline{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки. В іншому випадку трійка векторів називається *лівою*.

Векторним добутком неколінеарних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (позначають $\overline{a}\times\overline{b}$) називають вектор $\overline{c}$, який має такі властивості:

1) $\overline{c}\perp\overline{a}, \overline{c}\perp\overline{b}$;

2) $\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\varphi$, де φ — кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

3) трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — права.

Властивості векторного добутку векторів $\overline{a}=\left\{a_1;a_2;a_3\right\}$ і $\overline{b}=\left\{b_1;b_2;b_3\right\}$:

1) $\overline{a}\times\overline{b}=0$ тоді й тільки тоді, коли вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні;

2) $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$;

3) $\lambda\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a}\times\lambda\overline{b}=\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$;

4) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$;

5) довжина векторного добутку неколінеарних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах;

6) $\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=0, \overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}, \overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}, \overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}$, де $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ — вектори ортонормованого базису;

7) вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ має координати

$$\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+\overline{j}\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right).$$

Мішаним добутком трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторів $\overline{a}\times\overline{b}$ і $\overline{c}$.

Позначають мішаний добуток так:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right).$$

Властивості мішаного добутку

1. $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{c},\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{b},\overline{c},\overline{a}\right)=-\left(\overline{b},\overline{a},\overline{c}\right)=-\left(\overline{a},\overline{c},\overline{b}\right)$.
2. $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=0$, якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні.
3. $\left(\lambda\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\lambda\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\overline{b},\lambda\overline{c}\right)=\lambda\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$.
4. Модуль мішаного добутку $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, як на суміжних ребрах.
5. Мішаний добуток векторів $\overline{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\overline{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ і $\overline{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right)$ дорівнює визначнику $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$.

Приклад 3.1.1. У паралелограмі $ABCD$ сторони $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AD}=\overline{c}$; M — точка перетину діагоналей (*рис. 3.1.1*). Виразити вектори $\overline{MA}$, $\overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD}$ через вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$.

►Оскільки у паралелограма $ABCD$ протилежні сторони паралельні й рівні, то $\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{c}$. Із трикутника ABC знаходимо, що $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{b}+\overline{c}$, а із трикутника ABD — $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}=\overline{c}-\overline{b}$. Діагоналі паралелограма точкою перетину M діляться навпіл, вектори $\overline{MA}$ і $\overline{AC}$ протилежно напрям-

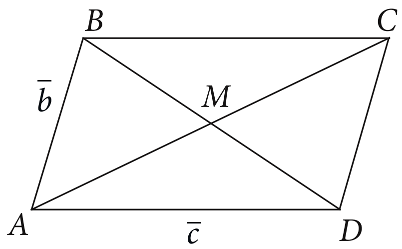


Рис. 3.1.1

лені, тому $\overline{MA} = -\frac{1}{2}\overline{AC}$; вектори $\overline{MC}$ і $\overline{AC}$ однаково напрямлені, тому $\overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Аналогічно $\overline{MB} = -\frac{1}{2}\overline{BD}$, $\overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Отже,

$$\overline{MA} = -\frac{1}{2}\left(\overline{b}+\overline{c}\right),\ \overline{MC} = \frac{1}{2}\left(\overline{b}+\overline{c}\right),\ \overline{MB} = -\frac{1}{2}\left(\overline{c}-\overline{b}\right),\ \overline{MD} = \frac{1}{2}\left(\overline{c}-\overline{b}\right).◄$$

Приклад 3.1.2. Перевірити, чи колінеарні вектори $\overline{a} = (5; 7; -1)$ і $\overline{b} = (-15; -21; 3)$, та встановити, який із них довший і в скільки разів.

►З метою перевірки пропорційності відповідних координат векторів складемо співвідношення: $\frac{5}{-15} = \frac{7}{-21} = \frac{-1}{3}$. Очевидно, що всі три дроби рівні між собою. Отже, вектори колінеарні.

Обчислимо модулі кожного з них: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{5^2+7^2+(-1)^2} = \sqrt{75}$ та $\left|\overline{b}\right| = \sqrt{(-15)^2+(-21)^2+3^2} = \sqrt{675}$. Вектор $\overline{b} = (-15; -21; 3)$ довший за вектор $\overline{a} = (5; 7; -1)$ у $\frac{\sqrt{675}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = 3$ (рази).◄

Приклад 3.1.3. Задано вектори $\overline{a} = \{-2; -1; 3\}$ та $\overline{b} = \{-1; 2; 1\}$. Знайти координати векторного добутку цих векторів.

►Побудуємо визначник згідно з теоремою про векторний добуток векторів: $\left[\overline{a}\times\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Розкладемо його по першому рядку за теоремою Лапласа:

$$\left[\overline{a}\times\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{k}.$$

Отже, координати векторного добутку векторів $\overline{a} = \{-2; -1; 3\}$ та $\overline{b} = \{-1; 2; 1\}$ дорівнюють: $\left[\overline{a}\times\overline{b}\right] = \{-7; -1; -5\}$.◄

Приклад 3.1.4. З'ясувати, чи є компланарними такі вектори: $\overline{a} = \{1; 9; -11\}$, $\overline{b} = \{2; 3; -1\}$, $\overline{c} = \{1; -1; 3\}$.

►Обчислимо мішаний добуток вказаних в умові векторів. З цією метою побудуємо визначник третього порядку, рядками якого будуть координати цих векторів: $\begin{vmatrix} 1 & 9 & -11 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. Обчислимо побудований нами визначник методом перетворення його рядків та стовпчиків згідно з властивостями визначників:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -11 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -14 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -14 \\ 0 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Висновок: оскільки мішаний добуток векторів дорівнює нулю — вони компланарні.◄

3.1.2. Прямі та площини у просторі

(Теоретичні відомості про прямі та площини у просторі, їх взаємне розташування див.: [4], розділ 2, п. 2.2.1).

Приклад 3.1.5. Задано точки A (1; 2; 3) і B (– 3; 6; 5). Через середину відрізка AB провести площину, перпендикулярну до нього.

►Середина відрізка належить шуканій площині. Пряма AB, яка містить точки A і B, перпендикулярна площині. Отже, її напрямний вектор є перпендикуляром до площини.

Напрямний вектор прямої, який ми отримуємо з її канонічного рівняння $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}=\frac{z-z_0}{l}$, може бути використаний у якості нормального вектора $\overline{n}$ до площини. Тоді рівняння площини α, яка проходить через точку $C(x_0; y_0; z_0)$ та перпендикулярна вектору $\overline{n}$, має вигляд: $m(x-x_0)+k(y-y_0)+l(z-z_0)=0$, де $\overline{n}=\{m;k;l\}$, $\overline{n}\perp\alpha$.

Точка $C(x_0; y_0; z_0)$, за умовою задачі, є серединою відрізка AB, тому її координати дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат його кінців: $C\left(\frac{1-3}{2};\frac{2+6}{2};\frac{3+5}{2}\right)$, або $C(-1;4;4)$.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x+3}{1+3}=\frac{y-6}{2-6}=\frac{z-5}{3-5}$ або $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-5}{-2}$.

Отже, нормальний вектор площини має координати $\overline{n}=\{4;-4;-2\}$. Тоді рівняння площини з нормальним вектором $\overline{n}$ набуває вигляду: $4(x+1)-4(y-4)-2(z-4)=0$.◄

Приклад 3.1.6. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-3;\ 4)$ та перпендикулярна прямій $y=-2x+3$.

►Зведемо рівняння прямої до загального: $2x+y-3=0$. Ця пряма має нормальний (тобто перпендикулярний до прямої) вектор: $\vec{n}=\{2;1\}$. Шукана пряма перпендикулярна до заданої прямої і, отже, паралельна до її нормального вектора. Звідси робимо висновок, що цей вектор можна розглядати у якості напрямного вектора шуканої прямої.

Таким чином, ми маємо всі дані для побудови канонічного рівняння прямої: $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{1}$.◄

Приклад 3.1.7. Нехай задано вершини трикутника $A(6;0)$, $B(2;-3)$, $C(8;-1)$. Скласти рівняння сторін трикутника, висоти BD, опущеної на сторону AC, та знайти координати її основи D.

►Скористаємось формулою $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ для знаходження рівняння сторін AB, AC, BC.

AB: $\frac{x-6}{2-6}=\frac{y}{-3-0}\Rightarrow 3x-4y-18=0$;

AC: $\frac{x-6}{8-6}=\frac{y}{-1-0}\Rightarrow x+2y-6=0$;

BC: $\frac{x-2}{8-2}=\frac{y+3}{-1+3}\Rightarrow x-3y-11=0$.

Рівняння висоти трикутника, опущеної з вершини B, будемо шукати у вигляді $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, тобто, $A(x-2)+B(y+3)=0$. Коефіцієнти A, B знайдемо з умови перпендикулярності висоти до прямої AC.

Нормалями прямої AC є вектор $\vec{n}_1=\{1;\ 2\}$, а шуканої висоти — $\overline{n}_2=\{A,\ B\}$. З умови перпендикулярності отримуємо рівняння $A+2B=0$, ненульовий розв'язок якого є $A=2, B=-1$. Отже, рівняння висоти $2x-y-7=0$.

Основа висоти *D* лежить одночасно на висоті *BD* та на стороні *AC*. Тому для знаходження її координат потрібно розв'язати системy рівнянь $\begin{cases} x+2y=6, \\ 2x-y=7. \end{cases}$

Знайшовши розв'язок цієї системи $x=4,\ y=1$, отримуємо координати *D*.◄

Приклад 3.1.8. Знайти кут, який утворює пряма $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{1}$ з площиною $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-5=0$.

►Напрямний вектор прямої $\vec{a}=\{1;0;1\}$ утворює з нормальним вектором площини $\vec{n}=\{\sqrt{2};\sqrt{2};0\}$ кут, який в сумі з кутом між прямою та площиною дорівнює прямому куту. З цього випливає, що синус кута між прямою та площиною дорівнює косинусу кута між напрямним вектором прямої та нормальним вектором площини.

Нехай φ — кут між напрямним вектором прямої та нормальним вектором площини. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2}+1\cdot 0}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Нехай μ — кут між напрямним вектором прямої та площиною. Тоді $\cos\varphi=\sin\mu=\dfrac{1}{2}$. Отже, кут між прямою та площиною дорівнює $\mu=\dfrac{\pi}{6}$.◄

Приклад 3.1.9. З'ясувати, при якому значенні *p* пряма $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{p}=\dfrac{z+1}{-4}$ буде перпендикулярною площині $3x+9y-6z-5=0$.

►Якщо пряма перпендикулярна площині, то її напрямний вектор теж перпендикулярний цій площині. Нормальний вектор площини перпендикулярний цій площині. Отже, нормальний вектор площини є колінеарним напрямному вектору прямої, яка цій площині перпендикулярна. Два вектори колінеарні, якщо їх координати пропорційні. Запишемо необхідну пропорцію координат векторів: $\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{p}=\dfrac{-6}{-4}$. Легко помітити, що при *p* = 6 координати двох векторів пропорційні, а отже, пряма перпендикулярна площині.◄

Приклад 3.1.10. Знайти відстань від площини $2x+3y+3z-14=0$ до прямої $\dfrac{x-9}{6}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{-1}$.

►Для того щоб обчислювати відстань між прямою та площиною, необхідно перевірити їх паралельність. Паралельність прямої та площини рівносильна перпендикулярності нормального вектора $\vec{n}=\{2;3;3\}$ площини та напрямного вектора $\vec{a}=\{6;-3;-1\}$ прямої. Перевіримо, чи буде дорівнювати нулю їх скалярний добуток: $(\vec{a},\vec{n})=6\cdot 2+(-3)\cdot 3+(-1)\cdot 3=0$. Отже, пряма паралельна площині. Знайдемо принаймні одну точку прямої. З канонічного рівняння випливає, що такою точкою може бути точка *M* (9; 0; 2).

Перейдемо від загального рівняння $2x+3y+3z-14=0$ площини до її нормального рівняння. З цією метою помножимо обидві частини рівняння на множник $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+3^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{22}}$.

Отримаємо рівняння, яке задовольняє умови нормального рівняння: $\dfrac{2}{\sqrt{22}}x+\dfrac{3}{\sqrt{22}}y+\dfrac{3}{\sqrt{22}}z-\dfrac{14}{\sqrt{22}}=0$.

Відстань від точки M (9; 0; 2) до площини дорівнює відстані d від прямої до площини і обчислюється як модуль лівої частини нормального рівняння площини при заміні відповідних змінних координатами точки M (9; 0; 2):

$$d=\left|\frac{2}{\sqrt{22}}\cdot 9+\frac{3}{\sqrt{22}}\cdot 0\ +\frac{3}{\sqrt{22}}\cdot 2-\frac{14}{\sqrt{22}}\right|=\frac{10}{\sqrt{22}}.◄$$

3.1.3. Криві другого порядку

Колом називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки $C(x_0, y_0)$ на величину R. Точку $C(x_0, y_0)$ називають центром кола, а величину R — його радіусом.

Рівняння кола $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок площини є величиною сталою, що перевищує відстань між цими точками.

Дві задані точки F_1 і F_2 називаються фокусами еліпса, відстань F_1F_2 — фокусною відстанню, а сталу величину позначають $2a$. Якщо фокуси лежать на осі Ox, то $a > b$, якщо фокуси лежать на осі Oy, то $a < b$.

Для фокусів $F_1\left(-c;0\right), F_2\left(c;0\right)$ при умові $2c<2a$ канонічне (найпростіше) рівняння еліпса представляється у вигляді: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

Числа a і b називаються великою і малою півосями еліпса, початок координат називається його центром. Відношення $\varepsilon=c/a<1$ називається ексцентриситетом еліпса, а прямі $x=\pm a/\varepsilon$ — її директрисами.

Еліпс із центром у точці C $(x_0; y_0)$, і півосями a і b $(a > b)$, що паралельні осям координат, має рівняння: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок є величиною сталою, що менша від відстані між цими точками.

Дві задані точки F_1 і F_2 називаються фокусами еліпса, відстань F_1F_2 — фокусною відстанню, а сталу величину позначають $2a$.

Для фокусів $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ при умові $2c>2a$ канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи представляється у вигляді: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Число a називається дійсною піввіссю, а число b — уявною піввіссю гіперболи, початок координат називається його центром. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ називається ексцентриситетом гіперболи. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ є асимптотами гіперболи, а прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ — її директрисами.

Гіпербола із центром у точці C $(x_0; y_0)$, і півосями a і b $\left(a>b\right)$, що паралельні осям координат, має рівняння:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі Oy, то канонічне рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

Параболою називається геометричне місце точок площини, відстань від яких до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої, що не проходить через задану точку.

Задана точка F називається фокусом, а задана пряма — директрисою параболи. Відстань від фокуса до директриси називають фокальним параметром параболи і, як правило, позначають p.

Для фокуса $F_1\left(\frac{p}{2};0\right)$ та директриси $x=-\frac{p}{2}$ канонічне (найпростіше) рівняння параболи має вигляд: $y^2=2px$.

Парабола симетрична відносно осі Ox, точку перетину її з цією віссю називають вершиною. Отже, вершина параболи знаходиться на початку координат.

Якщо вершина параболи знаходиться на початку координат і парабола симетрична відносно осі Oy, то канонічне рівняння параболи має вигляд: $x^2=2py$. У цьому випадку точка $F(0;p/2)$ є фокусом параболи, а пряма $y=-p/2$ — її директрисою.

Якщо вершина параболи знаходиться в точці $C(x_0, y_0)$ і її вісь симетрії паралельна осі Ox, то її рівняння $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

Приклад 3.1.11. Скласти рівняння кола, якщо:

1) його центр знаходиться в точці $C(3;1)$ і точка $M(5;2)$ лежить на колі;

2) його центр співпадає з початком координат, а пряма $3x-4y-20=0$ є дотичною до кола.

►1. Координатами центра кола є координати точки C, а радіусом кола є відстань між точками C і M: $R^2=(5-3)^2+(2-1)^2=5$. Отже, рівняння кола матиме вигляд: $(x+3)^2+(y-1)^2=5$.

2. Координатами центра кола є точка (0; 0), а радіусом кола є відстань від цієї точки до заданої прямої:

$$R=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 0-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4.$$

Отже, рівняння кола матиме вигляд: $x^2+y^2=16$.◄

Приклад 3.1.12. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо його велика вісь дорівнює 20, а відстань між фокусами — 16.

►Якщо велика вісь дорівнює 20, то піввісь дорівнює 10, тобто $a=10$ в рівнянні еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. У канонічному рівнянні еліпса у знаменнику дробу $\frac{x^2}{a^2}$ знаходиться квадрат саме великої півосі. Якщо відстань між фокусами — 16, то параметр c, який задовольняє співвідношенню $c^2=a^2-b^2$, де b — мала піввісь, дорівнює половині цієї відстані, тобто $c=8$.

Отже, $b^2=100-64=36$. Рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.◄$$

Приклад 3.1.13. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\frac{5}{12}x$, а відстань між фокусами дорівнює 26.

►Використаємо дві формули: $c^2=b^2+a^2$ та $y=\pm\frac{b}{a}x$. З умов задачі випливає, що $\frac{b}{a}=\frac{5}{12}$, $c=13$ та $169=b^2+a^2$. З рівності $\frac{b}{a}=\frac{5}{12}$ отримуємо $b=\frac{5a}{12}$. Підставимо значення b в рівність $169=b^2+a^2$: $169=\left(\frac{5a}{12}\right)^2+a^2$. Розв'язуючи останнє рівняння відносно a^2, отримаємо: $a^2=\frac{144\cdot 169}{169}=144$ та $b^2=25$. Дійсна та уявна півосі знайдені. Рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.◄

Приклад 3.1.14. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо відстань між його фокусами дорівнює 16, а ексцентриситет $e=\frac{4}{5}$.

►Використаємо дві формули: $e=\frac{c}{a}$ та $a^2=b^2+c^2$. З умови задачі випливає, що $c = 8$, а отже, $\frac{4}{5}=\frac{8}{a}$. З цього випливає, що $a = 10$. Підставляючи ці значення в формулу $a^2=b^2+c^2$, отримаємо $10^2=b^2+8^2$. Звідси: $b^2=36$.

Рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.◄

Приклад 3.1.15. Знайти координати фокуса та записати рівняння директриси параболи, заданої рівнянням 1) $y^2 = 12x$, 2) $x^2 = 8y$.

►1. Віссю симетрії параболи $y^2 = 12x$ є вісь Ox, $2p = 12$, $\frac{p}{2}=3$. Отже, фокус — $F(3, 0)$, директриса — $x = -3$.

2. Віссю симетрії параболи $x^2 = 8y$ є вісь Oy, $2p = 8$, $\frac{p}{2}=2$. Отже, фокус — $F(0, 2)$, директриса — $y = -2$.◄

3.2. Завдання для самостійної роботи

Вектори: поняття, властивості, операції з векторами, задачі на використання векторів

1. Обчислити модуль вектора:

   1) $\overline{a}=\{6;3;-2\}$; 2) $\overline{a}=\{6;-3;2\}$; 3) $\overline{a}=\{5;3;4\}$;

   4) $\overline{a}=\{6;1;2\}$; 5) $\overline{a}=\{6;5;-1\}$.

2. Визначити відношення $t=\frac{AC}{CB}$, в якому точка C ділить відрізок AB при наступних даних (за допомогою векторів):

   1) $A(2; -1; 0)$, $B(6; 1; 0)$, $C(4; 4; 4)$;
   2) $A(2; 0; 2)$, $B(4; 6; 9)$, $C(7; -1; 0)$;
   3) $A(-1; 6; 0)$, $B(5; 0; 2)$, $C(3; -1; 0)$;
   4) $A(1; -1; 0)$, $B(13; 6; 0)$, $C(5; 0; 2)$;
   5) $A(5; -1; 0)$, $B(-2; 6; 0)$, $C(-5; 0; 2)$.

3. Обчислити скалярний добуток векторів:

   1) $\overline{a}=\left\{-2;-\frac{3}{6};1\right\}$ та $\overline{b}=\left\{-1;\frac{3}{4};-4\right\}$;

   2) $\overline{a}=\left\{\frac{1}{2};-3;1\right\}$ та $\overline{b}=\left\{-2;\frac{3}{2};4\right\}$;

   3) $\overline{a}=\{4;-7;3\}$ та $\overline{b}=\left\{-\frac{2}{3};-3;5\right\}$;

   4) $\overline{a}=\{5;-2;-1\}$ та $\overline{b}=\{-5;4;5\}$;

   5) $\overline{a}=\{1;-1;1\}$ та $\overline{b}=\{2;-7;5\}$.

4. Знайти кут між векторами:

   1) $\overline{a}=\{-3;-3\}$ та $\overline{b}=\{2;0\}$; 2) $\overline{a}=\{2;2\}$ та $\overline{b}=\{3;0\}$;

   3) $\overline{a}=\{0;2\}$ та $\overline{b}=\{7;7\}$; 4) $\overline{a}=\{1;\sqrt{3}\}$ та $\overline{b}=\{\sqrt{3};1\}$;

   5) $\overline{a}=\{0;\sqrt{3}\}$ та $\overline{b}=\{\sqrt{3};1\}$.

5. Обчислити векторний добуток двох векторів:

   1) $\overline{a}=\{2;-3;1\}$ та $\overline{b}=\{-2;3;4\}$;

   2) $\overline{a}=\{-1;3;11\}$ та $\overline{b}=\{-2;-3;-4\}$;

   3) $\overline{a}=\{-2;3;-1\}$ та $\overline{b}=\{-7;4;4\}$;

   4) $\overline{a}=\{1;-1;1\}$ та $\overline{b}=\{2;-7;5\}$;

   5) $\overline{a}=\{5;-2;-1\}$ та $\overline{b}=\{-5;4;5\}$.

6. Обчислити мішаний добуток трьох векторів:

   1) $\overline{a}=\{6;4;2\}$; $\overline{b}=\{1;-3;1\}$; $\overline{c}=\{3;5;1\}$;

   2) $\overline{a}=\{6;0;3\}$; $\overline{b}=\{1;7;0\}$; $\overline{c}=\{3;5;1\}$;

   3) $\overline{a}=\{3;1;2\}$; $\overline{b}=\{1;-1;0\}$; $\overline{c}=\{2;4;1\}$;

   4) $\overline{a}=\{3;1;2\}$; $\overline{b}=\{1;-1;7\}$; $\overline{c}=\{5;2;1\}$;

   5) $\overline{a}=\{1;-1;1\}$; $\overline{b}=\{-1;2;1\}$; $\overline{c}=\{1;3;-1\}$.

7. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1;3;-2)$, $B(-1;2;5)$ і $C(4;3;-1)$.

8. Обчислити кути (косинуси кутів) трикутника *ABC*, якщо: $A(-2;2;3)$, $B(4;-2;7)$, $C(1;3;-2)$.

9. Знайти об'єм піраміди з вершинами (1; 1; 1), (2; 3; 4), (3; 4; –2), (4; 2; 3).

Прямі та площини у просторі

1. Написати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;0)$ та паралельна прямій $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+1}{-1}$.

2. Написати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-2;3)$ та перпендикулярна прямій $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y}{-3}$.

3. Написати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;-1)$ та паралельна прямій $2x+3y-5=0$.

4. Написати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-2;3)$ та перпендикулярна прямій $x-3y+4=0$.

5. Визначити, чи перетинаються прямі, та знайти кут між ними: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}$, $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+2}{-3}$.

6. Побудувати рівняння прямої, що проходить через середину відрізка *AB*: $A(1;-1)$, $B(0;2)$ перпендикулярно прямій *AB*.

7. Довести перпендикулярність прямих $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}$ та $x=t+1$, $y=2t+5$.

8. Обчислити кут між діагоналями чотирикутника, вершини якого знаходяться в точках $M_0(-4;0)$, $M_1(0;4)$, $M_2(4;0)$, $M_3(0;-4)$.

9. Написати рівняння площини, що проходить через точку *M* та має нормальний вектор $\overline{n}$, якщо $M(3;-1;-1)$, $\overline{n}=(2;1;-5)$.

10. Побудувати площину, яка проходить через точку $M(2;1;-1)$ та паралельна векторам $\overline{a}=(-1;0;4)$, $\overline{b}=(1;1;2)$.

11. Знайти кут, який утворює пряма $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+4}{-2}$ з площиною $3x-y+z-4=0$.

12. Побудувати рівняння площини, яка утворює з прямою $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{-3}$ прямий кут та проходить через точку $(-2;\ 5;1)$.

Криві другого порядку

1. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі *Ox*, якщо його півосі дорівнюють 4 і 3 відповідно.
2. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі *Ox*, якщо його велика вісь дорівнює 20, а відстань між фокусами — 16;
3. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі *Ox*, якщо його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет — $\varepsilon=\frac{3}{5}$.
4. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі *Oy*, якщо його велика вісь дорівнює 20, а відстань між директрисами — 25.
5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *Ox*, якщо її дійсна і уявна осі дорівнюють 24 і 10 відповідно.
6. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *Ox*, якщо відстань між її фокусами дорівнює 10, а ексцентриситет — $\varepsilon=\frac{5}{4}$.
7. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *Ox*, якщо відстань між фокусами дорівнює 26, а уявна вісь — 10.
8. Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon=2$.

9. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.
10. Визначити координати фокусів і рівняння директрис параболи $y^2=4x$.
11. Визначити координати фокусів і рівняння директрис параболи $x^2=-6y$.
12. Визначити координати фокусів і рівняння директрис гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

4.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

4.1.1. Поняття вектор-функції, неперервність, похідна та диференціал

Векторна функція $\overline{r}(t)$ називається *диференційовною* на множині або просто диференційовною, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї множини.

Для вектор-функції мають місце наступні правила диференціювання:

1) якщо $\overline{r}(t)=const$, то $\overline{r}'(t)=0$;

2) $\left(k\overline{r}(t)\right)'=k\overline{r}'(t)$ де $k=\text{const}$;

3) $\left(u(t)\overline{r}(t)\right)'=u'(t)\overline{r}(t)+u(t)\overline{r}'(t)$, де $u(t)$ — скалярна функція;

4) $\left(\overline{r}_1(t)\pm\overline{r}_2(t)\right)'=\overline{r}_1'(t)\pm\overline{r}_2'(t)$;

5) $\left(\overline{r}_1(t)\cdot\overline{r}_2(t)\right)'=\left(\overline{r}_1'(t)\cdot\overline{r}_2(t)\right)+\left(\overline{r}_1(t)\cdot\overline{r}_2'(t)\right)$ — для скалярного добутку;

6) $\left[\overline{r}_1(t),\overline{r}_2(t)\right]'=\left[\overline{r}_1'(t),\overline{r}_2(t)\right]+\left[\overline{r}_1(t),\overline{r}_2'(t)\right]$ — для векторного добутку;

7) якщо $\overline{r}=\overline{r}(t)$ та $t=t(\tau)$, то $\dfrac{d\overline{r}}{d\tau}=\dfrac{d\overline{r}}{dt}\dfrac{dt}{d\tau}$ — правило диференціювання складеної функції.

Приклад 4.1.1. Знайти похідну по t від наступної функції: $\vec{r}^{\,3}$.

►Вважаємо, що задана вектор-функція $\vec{r}(t)$ невідома. Отже, відповідь має містити цю вектор-функцію. З'ясуємо, чому дорівнює $\left(\vec{r}(t)\right)^3=\left(\vec{r}(t)\right)^2\cdot\vec{r}(t)=\left(\vec{r}(t),\vec{r}(t)\right)\cdot\vec{r}(t)$. Враховуючи, що скалярний добуток двох вектор-функцій є функцією скалярною, результат можна записати, зробивши заміну в позначеннях $\left(\vec{r}(t),\vec{r}(t)\right)=\varphi(t)$: $\left(\vec{r}(t)\right)^3=\varphi(t)\cdot\vec{r}(t)$.

За властивостями похідних вектор-функцій матимемо:

$$\left[\left(\vec{r}(t)\right)^3\right]'=\left[\varphi(t)\cdot\vec{r}(t)\right]'=\varphi(t)\cdot\vec{r}(t)+\varphi(t)\cdot\vec{r}'(t).$$

Знайдемо тепер похідну вектор-функції $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t)=\left(\vec{r}(t),\vec{r}(t)\right)'=\left(\vec{r}(t),\vec{r}'(t)\right)+\left(\vec{r}'(t),\vec{r}(t)\right)=2\left(\vec{r}'(t),\vec{r}(t)\right).$$

Підставивши отримане значення похідної вектор-функції $\varphi(t)$ в отриману формулу для похідної $\vec{r}^{\,3}$, отримаємо:

$$\left[\left(\vec{r}(t)\right)^3\right]'=\varphi'(t)\cdot\vec{r}(t)+\varphi(t)\cdot\vec{r}'(t)=2\left(\vec{r}'(t),\vec{r}(t)\right)\cdot\vec{r}(t)+\left(\vec{r}(t),\vec{r}(t)\right)\cdot\vec{r}'(t).◄$$

4.1.2. Крива та її параметри

(Теоретичні відомості з питань диференціальної геометрії, а саме з теми «Гладкі криві. Природна параметризація лінії. Кривина кривої» див.: [4], розділ 2, п. 2.2.2).

Кривиною k_1 просторової кривої γ в її точці M_0 називається границя модуля відношення кута $\Delta\varphi$ між дотичними до кривої в близьких її точках M_0 і M до довжини дуги Δs між точками дотику, якщо $\Delta s \to 0$: $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$.

Кожна регулярна крива γ задана рівнянням у природній параметризації $\vec{r} = \vec{r}(s)$, де $\vec{r}(s)$ — двічі неперервно диференційовна вектор-функція, в кожній своїй точці має певну кривину k, яка визначається за формулою: $k_1 = \left|\vec{r}''(s)\right|$.

Якщо крива задана векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(s)$, де t — довільний параметр, то її кривина обчислюється за формулою: $k = \frac{\left|\left[\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\right]\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$.

Якщо крива плоска і задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то її можна розглядати як просторову лінію з параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$. Тому для обчислення кривини такої лінії у попередній формулі слід покласти $z' = z'' = 0$.

Формула матиме вигляд: $k_1 = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|x'y'' - x''y'\right|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$.

Радіусом кривини плоскої кривої в даній її точці називається величина, обернена до кривини кривої у цій точці. Позначають $\rho = \frac{1}{k_1}$.

Скрутом просторової кривої в довільній її точці M_0 називається число $\chi = \lim\limits_{M \to M_0}\frac{\Delta\theta}{\left|\Delta s\right|}$, де $\Delta\theta$ — кут між стичними площинами до кривої в точках M_0 і M, а $\left|\Delta s\right|$ — довжина дуги M_0M кривої.

Кожна регулярна крива, задана вектор-функцією $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де $\vec{r}(s)$ — тричі неперервно диференційовна вектор-функція, має в кожній своїй точці, де її кривина k_1 відмінна від нуля, певний скрут, який обчислюється за формулою: $\chi = \frac{\left|\left(\vec{r}'\,\vec{r}''\,\vec{r}'''\right)\right|}{k_1^2}$.

Якщо крива задана векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t — довільний параметр, то її скрут обчислюється за формулою: $\chi = \frac{\left(\vec{r}'\,\vec{r}''\,\vec{r}'''\right)}{\left[\vec{r}'\,\vec{r}''\right]^2}$.

У координатах ця формула має вигляд:

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}.$$

1. Для того щоб два вектори були ортогональними (перпендикулярними), необхідно й досить, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю.
2. Вектор дотичної до кривої, заданої вектор-функцією, колінеарний її похідній.
3. Перша та друга похідні вектор-функції кривої колінеарні стичній площині кривої у визначеній точці.
4. Векторний добуток першої та другої похідних вектор-функції кривої колінеарний вектору бінормалі кривої.
5. Вектор бінормалі кривої є нормальним вектором стичної площини кривої в точці.
6. Головна нормаль кривої в просторі є одиничним вектором, напрям якого співпадає з векторним добутком вектора дотичної на вектор бінормалі.

Приклад 4.1.2. Довести, що головна нормаль гвинтової лінії $\vec{r}(t)=\{a\cos t; a\sin t; bt\}$ перпендикулярна її осі.

►Вісь гвинтової лінії $\vec{r}(t)=\{a\cos t; a\sin t; bt\}$ має напрям вектора $\vec{k}=\{0;0;1\}$. Отже, достатньо довести, що скалярний добуток вектора головної нормалі вказаної лінії та вектора $\vec{k}=\{0;0;1\}$ дорівнює нулю.

Обчислимо вектор дотичної до кривої. Він дорівнює першій похідній вектор-функції $\vec{r}(t)=\{a\cos t; a\sin t; bt\}$: $\vec{r}'(t)=\{-a\sin t; a\cos t; b\}$. Обчислимо другу похідну вектор-функції $\vec{r}(t)=\{a\cos t; a\sin t; bt\}$: $\vec{r}''(t)=\{-a\cos t; -a\sin t; 0\}$. Ці дві похідні визначають разом з точкою кривої стичну площину в цій точці. Тому векторний добуток цих векторів колінеарний вектору бінормалі. Обчислимо його:

$$\left[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-a\sin t&a\cos t&b\\-a\cos t&-a\sin t&0\end{vmatrix}=\{ab\sin t; -ab\cos t; a^2\}=\vec{\beta}(t).$$

Векторний добуток вектора бінормалі на вектор дотичної колінеарний вектору головної нормалі. Обчислимо цей вектор:

$$\left[\vec{r}'(t)\times\vec{\beta}(t)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-a\sin t&a\cos t&b\\ab\sin t&-ab\cos t&a^2\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\left(a^3+ab^2\right)\cos t; \left(a^3+ab^2\right)\sin t; 0\right\}=\vec{\nu}(t).$$

З'ясуємо, чи буде вектор $\vec{\nu}(t)$ перпендикулярним вектору $\vec{k}=\{0;0;1\}$. З цією метою обчислимо скалярний добуток цих векторів:

$$\left(\vec{\nu}(t),\vec{k}\right)=\left[\left(a^3+ab^2\right)\cos t\right]\cdot 0+\left[\left(a^3+ab^2\right)\sin t\right]\cdot 0+0\cdot 1=0.$$

Отже, ми довели, що ці два вектори є ортогональними, тобто перпендикулярними.◄

Приклад 4.1.3. Обчислити кривину кривої $\vec{r}(t)=\{2(t-\sin t); 2(1-\cos t)\}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t_0=\dfrac{\pi}{2}$.

►Для зручності додамо третю координату вектор-функції: $\vec{r}(t)=\{2(t-\sin t); 2(1-\cos t); 0\}$. Це дозволить використовувати звичайну для тривимірного простору формулу обчислення кривини: $k=\dfrac{\left|\left[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right]\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$.

Обчислимо першу та другу похідні вектор-функції: $\vec{r}'(t)=\{2(1-\cos t); 2(\sin t); 0\}$; $\vec{r}''(t)=\{2(\sin t); 2(\cos t); 0\}$.

Знайдемо векторний добуток отриманих похідних:

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2(1-\cos t)&2(\sin t)&0\\2(\sin t)&2(\cos t)&0\end{vmatrix}=$$

$$=0\cdot\vec{i}-0\cdot\vec{j}+\left(4(\cos t-\cos^2 t)-4\left(\sin^2 t\right)\right)\vec{k}=4\left(\cos t-1\right)\vec{k}.$$

Обчислимо модуль векторного добутку:

$$\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|=8\left|\sin^2\frac{t}{2}\right|.$$

Знаменник дробу $k=\dfrac{\left|\left[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right]\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$ дорівнює кубу модуля скалярної функції, який є коренем скалярного добутку похідної $\vec{r}'(t)$ на себе:

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \sqrt{\left(\vec{r}'(t), \vec{r}'(t)\right)} = 2\sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} =$$

$$= 2\sqrt{2-2\cos t} = 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Звідси: $\left|\vec{r}'(t)\right|^3 = 64\left|\sin^3\frac{t}{2}\right|$. Підставляючи у формулу кривини отримані вирази, запишемо результат:

$$k = \frac{8\left|\sin^2\frac{t}{2}\right|}{64\left|\sin^3\frac{t}{2}\right|} = \frac{1}{8\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

Підставивши у формулу значення аргументу, отримаємо числове значення кривини:

$$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8\left|\sin^2\frac{\pi}{4}\right|} = \frac{1}{4}.◄$$

Приклад 4.1.4. Знайти скрут гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$ у довільній її точці.

►Знайдемо похідні першого, другого і третього порядків у довільній точці, якій відповідає деякий параметр t:

$$x' = -a\sin t,\ y' = a\cos t,\ z' = c;$$
$$x'' = -a\cos t,\ y'' = -a\sin t,\ z'' = 0;$$
$$x''' = a\sin t,\ y''' = -a\cos t,\ z''' = 0.$$

Підставимо їх у формулу скруту у координатній формі:

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & c \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\cos t & c \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{a^2c}{a^2c^2 + a^4} = \frac{a^2c}{a^2\left(c^2+a^2\right)} = \frac{c}{c^2+a^2}.$$

Отже, скрут гвинтової лінії сталий у всіх її точках.◄

4.1.3. Квадратичні форми поверхонь та їх застосування

Першою квадратичною формою поверхні $\overline{r}(u,v)$ називається вираз вигляду

$$I = \left(d\overline{r}(u,v)\right)^2 = \left(\overline{r}_u'(u,v)\right)^2(du)^2 +$$
$$+2\left(\overline{r}_u'(u,v), \overline{r}_v'(u,v)\right)dudv + \left(\overline{r}_v'(u,v)\right)^2(dv)^2$$

або скорочено $d\overline{r}^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$.

Одиничним вектором нормалі до поверхні $\overline{r}(u,v)$ називається вектор, нормальний до площини, яка є дотичною до даної поверхні.

Цей вектор визначається співвідношенням:

$$\vec{n} = \frac{\overline{r}_u'(u,v)\times\overline{r}_v'(u,v)}{\left|\overline{r}_u'(u,v)\times\overline{r}_v'(u,v)\right|}.$$

Другою квадратичною формою поверхні $\overline{r}(u,v)$ називається вираз вигляду $II = L(du)^2 + 2Mdudv + N^2(dv)^2$, де $L = \left(\overline{r}_{uu}'', \vec{n}\right)$, $M = \left(\overline{r}_{uv}'', \vec{n}\right)$, $N = \left(\overline{r}_{vv}'', \vec{n}\right)$.

Приклад 4.1.5. Обчислити першу квадратичну форму поверхні $\overline{r}(u,v) = \left(\cos v - u\sin v; \sin v + u\cos v; u+v\right)$.

►Оскільки перша квадратична форма I є квадратом першого диференціалу вектор-функції $\overline{r}(u,v)$, тобто $I=\left(d\overline{r}\left(u,v\right)\right)^2$, то нам спочатку потрібно обчислити диференціал $d\overline{r}\left(u,v\right)$.

Цей диференціал має вигляд $d\overline{r}\left(u,v\right)=\overline{r}_u'\left(u,v\right)du+\overline{r}_v'\left(u,v\right)dv$. Обчислимо похідні вектор-функції $\overline{r}(u,v)$ по обох змінних: $\overline{r}_u'\left(u,v\right)=\left(-\sin v;\cos v;1\right)$ та $\overline{r}_v'(u,v)=\left(-\sin v-u\cos v;\cos v-u\sin v;1\right)$.

Оскільки $\left(d\overline{r}(u,v)\right)^2=\left(\overline{r}_u'(u,v)du+\overline{r}_v'(u,v)dv\right)^2=\left(\overline{r}_u'(u,v)\right)^2(du)^2+$ $+2\left(\overline{r}_u'(u,v),\overline{r}_v'(u,v)\right)dudv+\left(\overline{r}_v'(u,v)\right)^2(dv)^2$, то нам потрібно знайти скалярні квадрати похідних $\overline{r}_u'\left(u,v\right)$ і $\overline{r}_v'\left(u,v\right)$ та їх скалярний добуток.

З властивостей векторів маємо:

$$\left(\overline{r}_u'(u,v)\right)^2=(-\sin v)^2+(\cos v)^2+1^2=2,$$

$$\left(\overline{r}_u'(u,v)\right)^2=(-\sin v-u\cos v)^2+(\cos v-u\sin v)^2+1^2=$$

$$=\sin^2 v+2u\sin v\cos v+u^2\cos^2 v+\cos^2 v-2u\sin v\cos v+u^2\sin^2 v+1^2=$$

$$=\sin^2 v+\cos^2 v+2u\sin v\cos v-2u\sin v\cos v+u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v+1=$$

$$=1+1+u^2\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)=2+u^2.$$

$$\left(\overline{r}_u'\left(u,v\right),\overline{r}_v'\left(u,v\right)\right)=\sin^2 v+u\sin v\cos v+\cos^2 v-u\sin v\cos v+1=$$

$$=2+u\sin v\cos v-u\sin v\cos v=2.$$

Підставляючи отримані скалярні функції у формулу

$$\left(\overline{r}_u'\left(u,v\right)\right)^2\left(du\right)^2+2\left(\overline{r}_u'\left(u,v\right),\overline{r}_v'\left(u,v\right)\right)dudv+\left(\overline{r}_v'\left(u,v\right)\right)^2\left(dv\right)^2,$$

отримаємо вираз першої квадратичної форми $I=2\left(du\right)^2+4dudv+\left(2+u^2\right)\left(dv\right)^2$.◄

4.1.4. Криві на поверхні, їх кривина, кути між кривими

Нормальним перетином в точці M поверхні у напрямку, заданому вектором $\overline{p}$, називається крива μ, яка є перетином цієї поверхні площиною ω, що проходить через цю точку та визначається вектором $\overline{p}$ та вектором головної нормалі поверхні $\vec{n}$.

Кривиною нормального перетину кривої β, що лежить на поверхні $\overline{r}(u,v)$, в точці M називається кривина нормального перетину поверхні за напрямом дотичного вектора прямої.

Кривина k кривої ψ, що лежить на поверхні $\overline{r}\left(u,v\right)$, обчислюється за формулою: $k\cos\theta=\dfrac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}=\dfrac{II}{I}$,

θ — кут між стичною площиною кривої ψ та площиною нормального перетину поверхні у напрямку цієї кривої.

Кутом між кривими γ_1 та γ_2 називається кут між дотичними до цих ліній в їх спільній точці M.

Нехай $d\overline{r}_1$ та $d\overline{r}_2$ — вектори дотичних до ліній γ_1 та γ_2 в точці M. Тоді $\cos\varphi=\dfrac{d\overline{r}_1 d\overline{r}_2}{\left|d\overline{r}_1\right|\left|d\overline{r}_2\right|}$ або, в координатах, враховуючи, що $\left|\overline{x}\right|=\sqrt{\left(\overline{x},\overline{x}\right)}$ для довільного вектора $\overline{x}$, маємо:

$$\cos\varphi=\frac{Edu_1\,du_2+F(du_1\,dv_2+dv_1du_2)+Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^{\,2}+2Fdu_1dv_1+Gdv_1^{\,2}}\sqrt{Edu_2^{\,2}+2Fdu_2dv_2+Gdv_2^{\,2}}}.$$

Площа поверхні обчислюється за формулою:

$$\sigma=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Т в е р д ж е н н я. Для другої квадратичної форми існує ортонормований базис в дотичній площині, в якому форма має канонічний вигляд $II(du,dv)=\lambda_1 du^2+\lambda_2 dv^2$, де числа λ_1, λ_2 називаються головними кривинами (екстремальними значеннями кривин).

Добуток $K = \lambda_1\lambda_2$ називається *гаусовою або повною кривиною поверхні* в даній точці, півсума $(\lambda_1 + \lambda_2) / 2$ — середньою кривиною.

За допомогою головних кривин обчислюється нормальна кривина в довільному напрямку за формулою (Ейлера): $k_n = \lambda_1\cos^2\varphi + \lambda_2\sin^2\varphi$, де φ — кут між вказаним напрямком та напрямком першого базисного вектора.

Приклад 4.1.6. На поверхні $\{z=x^2\}$ знайти кривину нормального перетину у точці $A(2;\,2;\,4)$ у напрямку дотичної до кривої, яка задається рівняннями $\left\{y=\dfrac{x^2}{2}\right\}$ та $\{z=x^2\}$.

►Будь-який нормальний перетин циліндричної поверхні $\{z=x^2\}$, за виключенням напряму, що співпадає з твірною, не буде еліптичним. Отже, крива не є колом або еліпсом. Для того щоб розв'язати задачу про кривину поверхні, потрібно її належним чином параметризувати. Покладемо $x = u$ та $y = v$. Тоді поверхня задається наступним чином: $\overline{r}(u,v)=\{u;v;u^2\}$.

Таким чином, точці $A(2;2;4)$ відповідає значення вектор-функції $\overline{r}(2,2)=\{2;2;2^2\}=\{2;2;4\}$. Знайдемо вектор нормалі поверхні. З цією метою знайдемо обидві похідні $\overline{r}'_u(u,v)=\{1;0;2u\}$; $\overline{r}'_v(u,v)=\{0;1;0\}$ та їх векторний добуток:

$$\left[\overline{r}'_u(u,v)\times\overline{r}'_v(u,v)\right]=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & 2u\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\{-2u;0;1\}.$$

У точці $A(2;2;4)$ цей добуток дорівнює $\left[\overline{r}'_u(2,2)\times\overline{r}'_v(2,2)\right]=\{-4;0;1\}$. Саме через цей вектор будуть проходити всі площини, що утворюватимуть нормальний перетин.

Тепер з'ясуємо питання напряму. Він, за умовою задачі, визначається напрямом дотичної до кривої, яка задається рівняннями $\left\{y=\dfrac{x^2}{2}\right\}$ та $\{z=x^2\}$. Параметризуємо її за допомогою вектор-функції $\overline{\rho}(t)=\left\{t;\dfrac{t^2}{2};t^2\right\}$. Очевидно, що $\overline{\rho}(2)=\left\{2;\dfrac{2^2}{2};2^2\right\}=\{2;2;4\}$. Отже, крива проходить через точку $A(2;\,2;\,4)$.

Для з'ясування напряму кривої у цій точці знайдемо вектор дотичної: $\overline{\rho}'(t)=\{1;t;2t\}$. У самій точці $\overline{\rho}'(2)=\{1;2;4\}$. На поверхні напрям визначається відношенням $u:v$; враховуючи позначення $x=u$ та $y=v$, маємо $u:v=x:y$. Разом із значенням перших двох координат похідної $\overline{\rho}'(2)=\{1;2;4\}$ отримуємо $u:v=x:y=1:2=\dfrac{1}{2}$. У підсумку напрям визначається співвідношенням: $u:v=\dfrac{1}{2}$.

Кривина нормального перетину поверхні визначається відношенням другої квадратичної форми до першої. Для першої квадратичної форми маємо $I=\left(\overline{r}'_u(u,v)du+\overline{r}'_v(u,v)dv\right)^2$. Знайдемо відповідні скалярні добутки $\left(\overline{r}'_u(u,v)\right)^2=1+4u^2$; $\left(\overline{r}'_v(u,v)\right)^2=1$; $\left(\overline{r}'_u(u,v),\,\overline{r}'_v(u,v)\right)=0$. У заданій точці $\left(\overline{r}'_u(2,2)\right)^2=1+4\cdot 2^2=17$. Тому для першої квадратичної форми маємо: $I=\left(\overline{r}'_u(2,2)du+\overline{r}'_v(2,2)dv\right)^2=17du^2+dv^2$.

Знайдемо другу квадратичну форму. Для цього потрібно знайти другі похідні вектор-функції поверхні: $\overline{r}''_{uu}(u,v)=\{0;0;2\}$;

$\overline{r}''_{uv}(u,v)=\{0;0;0\}$; $\overline{r}''_{vv}(u,v)=\{0;0;0\}$. Отже, ненульовим буде тільки коефіцієнт $L=\dfrac{\left(\overline{r}''_{uv}(2,2),\overline{n_1}\right)}{\left|\overline{n_1}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Таким чином, вигляд другої квадратичної форми в точці A зведеться до виразу: $I=\dfrac{2}{\sqrt{5}}du^2$.

Нормальна кривина поверхні за заданим напрямом дорівнюватиме: $k=\dfrac{II}{I}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}du^2}{17du^2+dv^2}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{17+\left(\frac{dv}{du}\right)^2}$. Враховуючи співвідношення $u:v=\dfrac{1}{2}$, отримаємо $v = 2u$, звідки $dv = 2du$ або $\dfrac{dv}{du}=2$, або $\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2=4$.

Підставивши отримане значення $\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$ у формулу вище, отримаємо остаточно: $k=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{17+4}=\dfrac{2}{21\sqrt{5}}$.◄

Приклад 4.1.7. Обчислити кут між координатними лініями поверхні, заданої рівняннями $\overline{r}(u,v)=\{u\cos v;u\sin v;v\}$, $(u,v)\in R^2$ в точці $M_1\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$, а також кривину нормального перетину у напрямі $dv:du=2:1$.

►Обчислимо перші та другі похідні вектор-функції: $\overline{r}_u(u,v)=\{\cos v,\sin v,0\}$; $\overline{r}_v(u,v)=\{-u\sin v,u\cos v,1\}$.

У заданій точці:

$$\overline{r}_u\left(1;\frac{\pi}{4}\right)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right\};\ \overline{r}_v\left(1;\frac{\pi}{4}\right)=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};1\right\}.$$

$$\overline{r}_{uu}(u,v)=\{0,0,0\};\ \overline{r}_{uv}(u,v)=\{-\sin v,\cos v,0\};$$

$$\overline{r}_{vv}(u,v)=\{-u\cos v,u\sin v,0\}.$$

У заданій точці: $\overline{r}_{uu}(u,v)=\{0,0,0\}$; $\overline{r}_{uv}(1,\dfrac{\pi}{4})=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right\}$; $\overline{r}_{vv}(1,\dfrac{\pi}{4})=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right\}$.

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$E=\overline{r}_u^2(u,v)=1;\ G=\overline{r}_v^2(u,v)=u^2+1;\ F=\left(\overline{r}_u,\overline{r}_v\right)=0.$$

Перша квадратична форма в довільній точці: $I=du^2+\left(u^2+1\right)dv^2$.

Перша квадратична форма в заданій точці: $I=du^2+2dv^2$.

Обчислимо векторний добуток першої та другої похідних вектор-функції та його модуль:

$$\left[\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & 1\end{vmatrix}=\{\sin v,-\cos v,u\};$$

$$\left|\left[\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right]\right|=1+u^2.$$

У заданій точці отриманий добуток та його модуль матимуть значення:

$$\left[\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right]=\left\{\sin\frac{\pi}{4},-\cos\frac{\pi}{4},1\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};1\right\};\ \left|\left[\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right]\right|=1+1^2=2.$$

Отже, одиничний вектор головної нормалі поверхні у заданій точці:

$$\vec{n}=\frac{\left[\bar{r}_u\times\bar{r}_v\right]}{\left|\left[\bar{r}_u\times\bar{r}_v\right]\right|}=\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right\}.$$

Обчислимо коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$L=\left(\bar{r}_{uu},\vec{n}\right)=0;\; M=\left(\bar{r}_{uv},\vec{n}\right)=-\frac{1}{2};\; N=\left(\bar{r}_{vv},\vec{n}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Квадратична форма має вигляд: $II=-dudv-\frac{1}{2}dv^2$.

Кут φ між координатними лініями поверхні обчислюється за формулою: $\cos\varphi=\frac{F}{\sqrt{EG}}$. Оскільки в заданій точці $F=\left(\bar{r}_u,\bar{r}_v\right)=0$, то $\cos\varphi=0$ і кут $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Кривина нормального перетину обчислюється у даному випадку наступним чином:

$$k_n=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}=\frac{du^2+2dv^2}{-du\,dv-\frac{1}{2}dv^2}=$$

$$=\frac{4+2}{-2-\frac{1}{2}}=-\frac{12}{5}=-2,4.\ ◄$$

4.2. Завдання для самостійної роботи

Поняття вектор-функції, неперервність, похідна та диференціал

1. Знайти похідну по t від наступної функції $\vec{r}'^2$.
2. Знайти границю вектор-функції $\vec{r}(t)=\left\{\frac{\sin t}{t};\ \frac{t-1}{t+1};\ tg\,\frac{t}{2}\right\}$ в точці $t=0$.
3. Знайти похідну по t від наступної функції $\sqrt{\left[\vec{r}\,\vec{r}''\right]^2}$.
4. Знайти границю вектор-функції $\vec{r}\left(t\right)=\left\{\frac{1-\sin t}{\frac{\pi}{2}-t};\ \frac{t-\frac{\pi}{2}}{ctgt};\ tg\,\frac{t}{2}\right\}$ в точці $t=\frac{\pi}{2}$.
5. Визначити період вектор-функції $\vec{r}(t)=\left\{\cos t;\cos 2t;\cos\frac{t}{2}\right\}$.
6. Знайти похідну по t від наступної функції $\sqrt[3]{\vec{r}^{\,4}}$.
7. Довести векторну рівність $\left|\bar{r}_1\times\bar{r}_2\right|^2=\bar{r}_1^{\,2}\cdot\bar{r}_2^{\,2}-\left(\bar{r}_1,\bar{r}_2\right)^2$.

Крива та її параметри

1. Обчислити кривину кривої $\vec{r}(t)=\left\{a(t-\sin t);\ a(1-\cos t)\right\}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t_0=\frac{\pi}{3}$.
2. Обчислити кривину кривої $\vec{r}(t)=\left\{\sqrt{3}\cos t;\ \sin t\right\}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t_0=\frac{\pi}{3}$.
3. Обчислити кривину кривої $\vec{r}(t)=\left\{t^4;t^3\right\}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t_0=1$.

4. Обчислити кривину кривої $\vec{r}(t)=\{a\cos t;\ b\sin t\}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t_0=\frac{\pi}{4}$.
5. Обчислити кривину кривої $\vec{r}(t)=\{e^t; e^{-t}\}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t_0=1$.
6. Обчислити скрут лінії $\overline{r}(t)=\{e^t\sin t, e^t\cos t, e^t\}$.
7. Обчислити нормальну площину до кривої $\vec{r}=\{3t-t^3;\ 3t^2;\ 3t+t^3\}$ в точці $t_0=1$.
8. Обчислити нормальну площину до кривої $\vec{r}\ (t)=\{2t,\ \ln t,\ t^2\}$ в точці $t_0=1$.
9. Скласти рівняння нормалі до кривої $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ в точці, яка відповідає значенню $t_0=\frac{\pi}{3}$.
10. Обчислити стичну площину до кривої $\vec{r}=\{3t-t^3;\ 3t^2;\ 3t+t^3\}$ в точці $t_0=1$.
11. Обчислити спрямляючу площину до кривої $\vec{r}(t)=\left\{\sin t; \sin\frac{t}{5}; 2\cos 3t\right\}$ в точці, яка відповідає значенню $t_0=\frac{\pi}{3}$.
12. Обчислити стичну площину до кривої $\vec{r}(t)=\{e^t\sin t; e^t\cos t; e^t\}$ в точці, яка відповідає значенню $t_0=\frac{\pi}{3}$.

Квадратичні форми поверхонь та їх застосування

1. Знайти першу квадратичну форму поверхні, заданої рівняннями $\overline{r}(u,v)=\{u, v, uv\}$, $(u,v)\in R^2$.
2. Знайти першу квадратичну форму поверхні, заданої рівняннями $z=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(tg\frac{y}{x}\right)\right)$, $(x,y)\in D\subset R^2$.
3. Знайти другу квадратичну форму у вказаній параметризації $\vec{r}(u,v)=\left\{u\cos v; u\sin v; \frac{6}{u}\right\}$.
4. Отримати параметризацію у вигляді вектор-функції двох змінних $\vec{r}(u,v)$ поверхні, заданої рівнянням: $x^2+y^2+z^2=16$ (використати сферичні координати).
5. Знайти другу квадратичну форму поверхні $\vec{r}(u,v)=\{u\cos 3v;\ u\sin 4v;\ 2v\}$ в точці $u=\frac{\pi}{3};\ v=\frac{\pi}{4}$.
6. Обчислити площу криволінійного чотирикутника *D*, обмеженого лініями: $u=0,\ u=2,\ v=0,\ v=1$, який лежить на поверхні $\overline{r}(u,v)=\{u\cos v, u\sin v, v\}$.
7. Обчислити площу проєкції чотирикутника *D*, обмеженого лініями: $y=1, y=2, x=1, x=2$ на поверхню: $z=xy$.
8. Обчислити площу криволінійного чотирикутника *D*, обмеженого лініями: $u=1,\ u=2, v=0,\ v=2$, який лежить на поверхні $\overline{r}(u,v)=\{u\cos v, u\sin v, v\}$.
9. Обчислити площу проєкції чотирикутника *D*, обмеженого лініями: $y=0, y=1, x=0, x=1$ на поверхню $z=2x+5y$.

10. Обчислити площу криволінійного чотирикутника D, обмеженого лініями: $u=1,\ u=2, v=1,\ v=2$, який лежить на поверхні $\overline{r}(u,v)=\left\{u, v,\ \dfrac{1}{(u-v)^2}\right\}$.

Криві на поверхні, їх кривина, кути між кривими

1. Обчислити кут між координатними лініями поверхні, заданої рівняннями $\overline{r}(u,v)=\{u\cos v, u\sin v, v\}$, $(u,v)\in R^2$ в точці $M_1\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. Знайти довжину кривої γ, заданої рівнянням $u=\dfrac{v^2}{2}$, якщо крива лежить на поверхні $\overline{r}(u,v)=\{u\cos v, u\sin v, v\}$, $1\le v\le 2$.
3. Знайти довжину координатної кривої γ, яка лежить між точками $M_1(2,6); M_2(3,6)$ на поверхні $\overline{r}(u,v)=\left\{u, v, \dfrac{1}{uv}\right\}$.
4. Чому може дорівнювати кривина кривої, яка є перетином конуса $z^2=x^2+y^2$ та сфери $z^2+x^2+y^2=1$? Відповідь обґрунтувати.
5. Обчислити кут між координатними лініями поверхні, заданої рівняннями $\overline{r}(u,v)=\{u, v, uv\}$, $(u,v)\in R^2$, якщо вони перетинаються в точці $M_1(1,1)$.
6. Знайти довжину кривої γ, заданої рівнянням $2v=u^2$, якщо крива лежить на поверхні $\overline{r}(u,v)=\{v\cos u, v\sin u, u\}$, $1\le u\le 2$.

Розділ 5. ПРОЄКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ

5.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

5.1.1. Проєктивні координати

Проєктивним репером $\mathfrak{R}$ на проєктивній прямій називають впорядковану трійку різних точок $\{A_1, A_2, E\}$.

Проєктивним репером на проєктивній площині називають впорядковану четвірку різних точок $\mathfrak{R}=\{A_1, A_2, A_3, E\}$.

Проєктивними координатами точки відносно деякого репера на прямій називаються координати вектора, що породжує цю точку, відносно базису векторного простору, що, відповідно, породжує проєктивний репер. Записують: $M(m_1 : m_2)_{\mathfrak{R}}$ — для точки на прямій та $M(m_1 : m_2 : m_3)_{\mathfrak{R}}$ — для точки на площині. Оскільки вектор, що породжує точку, визначатиметься координатами з точністю до якогось ненульового множника (наприклад, вектори $\overrightarrow{(2,-1)}$ та $\overrightarrow{(4,-2)}$ лежатимуть на одній прямій, що проходить через початок базису векторного простору $V_2\setminus\{\vec{0}\}$), то проєктивні координати точки деякого проєктивного простору визначені не однозначно, а з точністю до спільного ненульового множника (*див.: частина I, розділ 2, п. 2.2.3*).

Зв'язок між афінними та проєктивними координатами точки

Афінні координати власної точки $M(x)$ на прямій в репері $\left\{A_2, \overline{A_2E}\right\}$ рівні відношенню проєктивних координат $M(x_1 : x_2)$ цієї точки в проєктивному репері із однією невласною координатною точкою $\mathfrak{R} = \{A_{1\infty}, A_2, E\}$: $x = \dfrac{x_1}{x_2}$. Останнє відношення можна записати і як $x = \dfrac{x}{1}$, звідки афінні координати точки $M(x)$ перетворити в проєктивні ще простіше — $M(x:1)$. Координату x називають неоднорідною афінною координатою, пару $(x:1)$ — однорідними афінними координатами точки M на проєктивній прямій. Аналогічно вводиться поняття неоднорідних афінних та однорідних афінних координат точки M на площині: неоднорідні — (x, y), однорідні — $(x:y:1)$. А проєктивні координати точки M на площині співвідносяться із неоднорідними афінними так:

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3}, \tag{5.1.1}$$

де $(x_1 : x_2 : x_3)$ — координати точки M в репері $\mathfrak{R} = \{A_{1\infty}, A_{2\infty}, A_3, E\}$.

Невласна точка матиме однорідні афінні координати вид $(x:0)$ на розширеній евклідовій прямій та $(x:y:0)$ — на площині.

Приклад 5.1.1. У проєктивному репері $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ на прямій знайти координати точки K, якщо відомо, що ці чотири точки рівновіддалені (*рис. 5.1.1*).

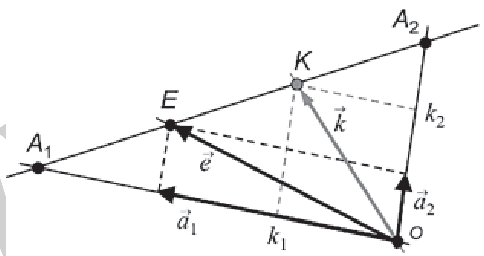


Рис. 5.1.1

►Координатами точки K в репері $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ будуть координати вектора $\vec{k}$ в базисі $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. При цьому, за означенням проєктивного репера, вектор $\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

За умовою, точки E і K розбивають відрізок A_1A_2 на три рівні частини. Тому довжини базисних векторів $|\vec{a}_1| = \dfrac{2}{3}A_1O$, $|\vec{a}_2| = \dfrac{1}{3}A_2O$, а координати вектора $\vec{k}$ тоді $k_1 = \dfrac{1}{3}A_1O = \dfrac{1}{2}|\vec{a}_1|$, $k_2 = \dfrac{2}{3}A_2O = 2|\vec{a}_2|$. Таким чином, проєктивні координати точки $K\left(\dfrac{1}{2}:2\right)$, або $(1:4)$.◄

Якщо загальне рівняння проєктивної прямої на проєктивній площині:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \tag{5.1.2}$$

то числа u_1, u_2, u_3 називаються *координатами цієї прямої.*

Нехай відомо, що пряма проходить через дві точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ і $B(b_1 : b_2 : b_3)$, тоді її координати будуть рівні:

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\quad u_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},\quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{5.1.3}$$

Приклад 5.1.2. Деяка пряма на проєктивній площині проходить через точки $A(2, 1)$ і $B(-2, 0)$. Знайти координати цієї прямої.

►Спочатку переведемо неоднорідні афінні координати точок в однорідні:

$$A(2,1) \to A(2:1:1),\ B(-2,0) \to B(-2:0:1).$$

Далі скористаємось формулами (3) для пошуку координат прямої, що проходить через ці точки:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad u_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad u_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Отже, координати прямої $\{1 : -4 : 2\}$.◄

5.1.2. Проєктивні перетворення простору

Нехай різні точки A, B, C і точка $D \neq A$, які належать одній прямій, в деякому репері мають координати $A(a_1 : a_2)_{\mathfrak{R}}, B(b_1 : b_2)_{\mathfrak{R}}, C(c_1 : c_2)_{\mathfrak{R}}, D(d_1 : d_2)_{\mathfrak{R}}$, тоді відношення

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

називається *складним (подвійним) відношенням чотирьох точок* і позначається (AB, CD) (*теоретичні відомості про складне відношення чотирьох точок див.: частина І, розділ 2, п. 2.2.3*).

Дві форми першого ступеня називаються *проєктивними*, якщо рівні складні (подвійні) відношення чотирьох пар їх відповідних елементів.

Проєктивне перетворення простору — бієктивне відображення $\Phi: P(V) \to P(V)$ простору самого на себе таке, що переводить кожну точку M із заданими координатами в одному репері в точку M' із такими самими координатами в іншому.

Існує одне й тільки одне проєктивне перетворення проєктивного простору $P(V)$, яке переводить один заданий репер в інший.

Властивості проєктивних перетворень:

- збереження інцидентності точок, прямих, площин;
- три точки, які не лежать на одній прямій, переходять в три точки, які також не лежать на одній прямій;
- довільний репер переходить в репер;

- пряма переходить в пряму;
- пучок прямих переходить в пучок прямих;
- зберігається складне відношення будь-якої четвірки точок прямої та прямих пучка на площині;
- комбінація проєктивних перетворень є проєктивним перетворенням, обернене перетворення до проєктивного є проєктивним перетворенням.

При проєктивних перетвореннях *не зберігається*:

- паралельність прямих;
- просте відношення трьох точок прямої;
- довжини відрізків, величини кутів, площі фігур.

Проєктивні перетворення задаються системою рівнянь, які пов'язують координати образу M' із координатами прообразу M відносно одного і того самого репера.

На проєктивній прямій:

$$\begin{cases} \mu x_1' = p_{11}x_1 + p_{12}x_2, \\ \mu x_2' = p_{21}x_1 + p_{22}x_2, \end{cases}$$

де p_{ij} — елементи матриці перетворення у рівнянні, заданому в матричній формі.

На проєктивній площині перетворення буде задаватись, відповідно, системою трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \mu x_1' = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3, \\ \mu x_2' = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3, \\ \mu x_3' = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3. \end{cases}$$

Деякі особливі випадки проєктивних перетворень

- *Інволюція* — нетотожне проєктивне перетворення, яке співпадає з оберненим перетворенням, тобто $\forall M \in P_n(V) : \varphi(\varphi(M)) = M$.
- *Гомологія* — нетотожне проєктивне перетворення, яке має пряму нерухомих точок (вісь гомології).

Приклад 5.1.3. Дано рівняння проєктивного перетворення площини:

$$\begin{cases} \mu x_1' = x_1 - 2x_2, \\ \mu x_2' = x_2 + 3x_3, \\ \mu x_3' = -x_2. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Знайти: а) образ точки $A(0;-2,5)$; б) прообраз точки $B'(-1,5;-0,5)$.

►Спочатку переведемо неоднорідні афінні координати заданих в умові задачі точок в однорідні афінні:

$$A(0;-2,5) \to A(0:-2,5:1) \to A'(0:-5:2),$$
$$B'(-1,5;-0,5) \to B'(-1,5:-0,5:1) \to B'(3:1:-2).$$

1. Для знаходження образу A' точки A підставляємо координати останньої в праву частину рівнянь системи (5.1.4):

$$\begin{cases} \mu x_1' = 0 - 2\cdot(-5) = 10, \\ \mu x_2' = -5 + 3\cdot 2 = 1, \\ \mu x_3' = -(-5) = 5. \end{cases}$$

Скорочуємо на спільний ненульовий множник μ і маємо точку $A'(10:1:5)$.

Переведемо координати точки в неоднорідні афінні: $A'(10:1:5) \to A'(10/5:1/5:1) \to A'(2;0,2)$.

2. Щоб знайти координати прообразу B точки B' підставляємо координати останньої в ліву частину рівнянь системи (5.1.4):

$$\begin{cases} 3\cdot\mu = x_1 - 2x_2, \\ 1\cdot\mu = x_2 + 3x_3, \\ -2\cdot\mu = -x_2. \end{cases}$$

Знаходимо проєктивні координати точки B як розв'язок системи з точністю до ненульового множника μ: $(7\mu:2\mu:-\frac{1}{3}\mu)$.

Скорочуємо їх на цей множник: $(7:2:-\frac{1}{3})$. І, нарешті, переведемо координати точки в неоднорідні афінні: $B(7:2:-1/3) \to B(-21:-6:1) \to B(-21;-6)$.◄

5.1.3. Основні теореми проєктивної геометрії та їх застосування до розв'язування задач на побудову

Тривершинник — це фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох проєктивних прямих, які з'єднують ці точки.

Теорема 5.1.1 (Дезарга)

Якщо три прямі, що проходять через відповідні вершини двох тривершинників, проходять через одну точку, то відповідні сторони цих тривершинників перетинаються в точках, що лежать на одній прямій.

Ці 10 точок, через кожну з яких проходить 3 прямі, та 10 прямих, на кожній з яких лежить три точки, називають конфігурацією Дезарга, тривершинники ABC і $A'B'C'$ називають дезарговими; відповідно точку S та пряму s — дезарговою точкою і прямою (*рис. 5.1.2*).

Теорема 5.1.2 (Дезарга обернена)

Якщо відповідні сторони двох тривершинників перетинаються в точках, що лежать на одній прямій, то прямі, які з'єднують відповідні вершини, сходяться в одній точці.

Інше формулювання теореми Дезарга: якщо два трикутники мають центр перспективи (точка S), то вони мають також вісь перспективи (пряма s), і навпаки.

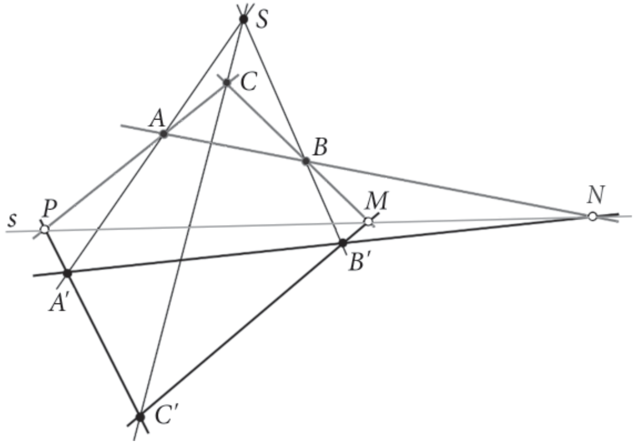


Рис. 5.1.2. Конфігурація Дезарга

Приклад 5.1.4. На площині дано дві різні паралельні прямі й точку, що лежить між ними. Провести через дану точку пряму, паралельну даним, використовуючи лише лінійку.

►Нехай дано паралельні прямі a і b та точку N між ними *(рис. 5.1.3).* Для побудови скористаємось теоремою Дезарга, за якою відповідні сторони дезаргових тривершинників перетинаються в точках, що лежать на одній прямій. Крім того, пам'ятаємо, що серія паралельних прямих перетинається в одній, невласній, точці.

Побудова

1. На прямих a і b обираємо по парі довільних дочок: A і B та A' і B' відповідно.
2. Будуємо прямі AB та $A'B'$, точка $S = AB \cap A'B'$.
3. Будуємо довільну, третю пряму l через точку S.
4. Будуємо пряму через точки A і N, точка $C = l \cap AN$.
5. Будуємо пряму через точки N і A', точка $C' = l \cap NA'$.
6. Будуємо прямі через точки C і B та через точки C' і B', точка $P = CB \cap C'B'$.
7. Будуємо пряму через точки N і P.
8. Пряма $c = NP$ — шукана.

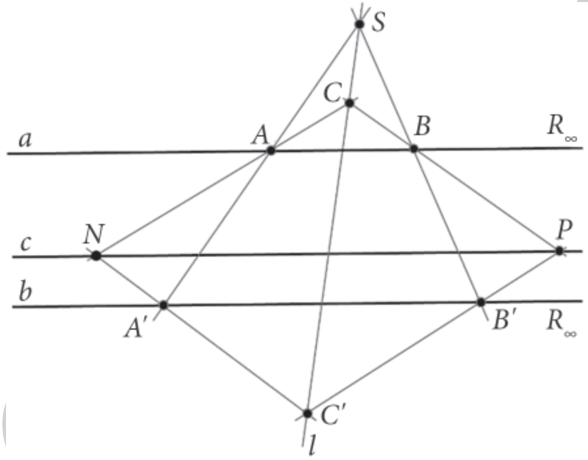
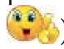


Рис. 5.1.3

Доведення. За побудовою тривершинники ABC і $A'B'C$ — дезаргові із дезарговою точкою S. Тому точки перетину їх відповідних сторін — $N = AC \cap A'C'$, $P = CB \cap C'B'$, $R = AB \cap A'B'$ — лежать на одній прямій c ($c = NP$). Але, за умовою, прямі a і b, на яких лежать сторони AB і $A'B'$, — паралельні, тому $R = R_\infty$ — невласна, а прямі a, b і c, які проходять через цю точку, — паралельні.

Дослідження. Розв'язок єдиний, оскільки через точку поза прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній (в евклідовій геометрії ). При цьому дезаргових конфігурацій, що містять дані в умові задачі елементи, можна побудувати нескінченно багато.◄

Повний чотиривершинник — фігура, яка складається з чотирьох точок (вершин) проєктивної площини, жодні три з яких не лежать на одній прямій, і шести прямих (сторін), які з'єднують попарно ці точки *(рис. 5.1.4).*

Сторони, які не мають спільних вершин, називають протилежними, точки перетину протилежних сторін — діагональні точки, прямі, що попарно з'єднують діагональні точки, — діагоналі.

Гармонічні властивості чотиривершинника: всі четвірки точок на сторонах і діагоналях повного чотиривершинника, які складаються з розділених пар, — гармонічні.

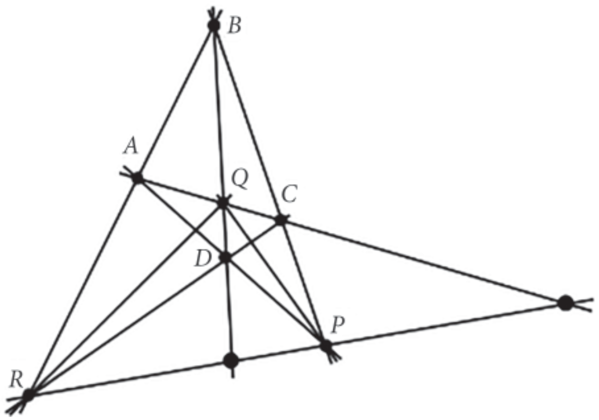


Рис. 5.1.4. Повний чотиривершинник $ABCD$;
Q, R, P — діагональні точки; QR, RP, QP — діагоналі

Приклад 5.1.5. На прямій a дано відрізок AB і його середину — точку M. Через точку N поза прямою провести пряму, паралельну до прямої a, використовуючи тільки лінійку.

►Для побудови скористаємось гармонічною властивістю чотиривершинника та властивістю складного відношення чотирьох точок: $(AB, MP_\infty) = -1,$ тоді й тільки тоді, коли точка M — середина відрізка AB.

Побудова (рис. 5.1.5)

1. Будуємо пряму через точки A і N.
2. Будуємо пряму через точки B і N.
3. Будуємо довільну пряму l через точку A, точка $K = l \cap BN$.
4. Будуємо пряму через точки M і K, точка $R = MK \cap AN$.
5. Будуємо прямі через точки R і B та через точки A і K, точка $L = RB \cap AK$.
6. Будуємо пряму через точки N і L.
7. Пряма $b = NL$ — шукана.

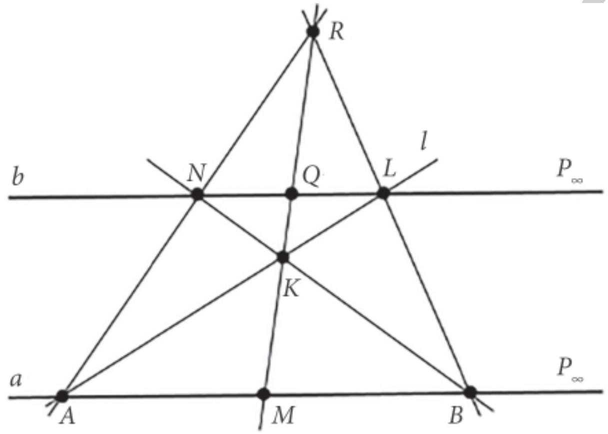


Рис. 5.1.5

Доведення. Розглянемо чотиривершинник $NRLK$. Його діагональні точки A, B, Q, точки M і P — точки перетину діагоналі AB зі сторонами, які проходять через іншу діагональну точку (NL та RK). Тому четвірка точок A, B, M і P — гармонічна, тобто $(AB, MP) = -1$. Але, оскільки точка M, за умовою, — середина відрізка AB, то точка $P = P_\infty$ — невласна, а прямі a і b, які проходять через цю точку, — паралельні.

Дослідження. Розв'язок єдиний, оскільки через точку поза прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній.◄

Теорема 5.1.3 (Паскаля)

Точки перетину протилежних сторін шестивершинника, вписаного в овальну лінію другого порядку, лежать на одній прямій (прямій Паскаля) *(рис. 5.1.6)*.

Теорема 5.1.4 (Паскаля обернена)

Якщо точки перетину протилежних сторін шестивершинника лежать на одній прямій, то всі його вершини лежать на овальній лінії.

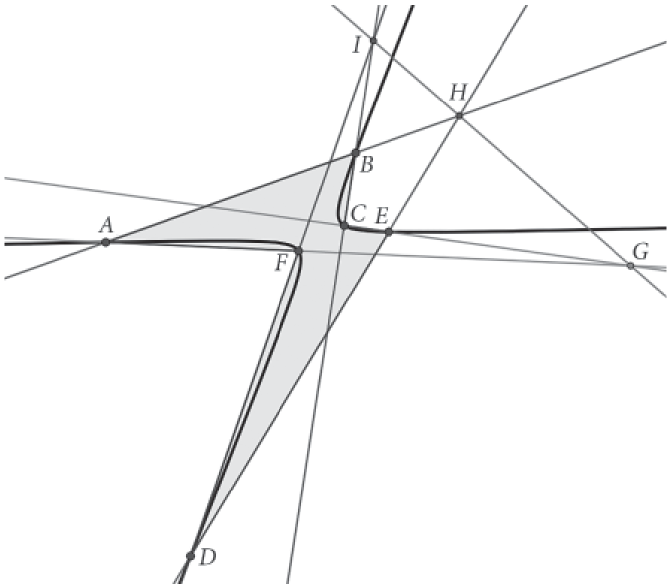


Рис. 5.1.6. До теореми Паскаля.
ABCEDF — вписаний шестивершинник, *HG* — пряма Паскаля

Примітка: *побудова здійснена в середовищі GeoGebra. Пропонуємо читачам повторити цю побудову, а також дослідити виконання теореми Паскаля для різних видів кривої II порядку: коло, еліпс, парабола, а також для різних видів вписаних шестивершинників: прості (опуклі, неопуклі), непрості.*

Теорема 5.1.5 (Бріаншона)

Три прямі, які сполучають протилежні вершини шестикутника (діагоналі шестикутника), описаного навколо овальної лінії, мають спільну точку (точку Бріаншона) (*рис. 5.1.7*).

Теорема 5.1.6 (Бріаншона обернена)

Якщо три діагоналі шестикутника перетинаються в одній точці, то сторони цього шестикутника є дотичними деякої овальної лінії II порядку.

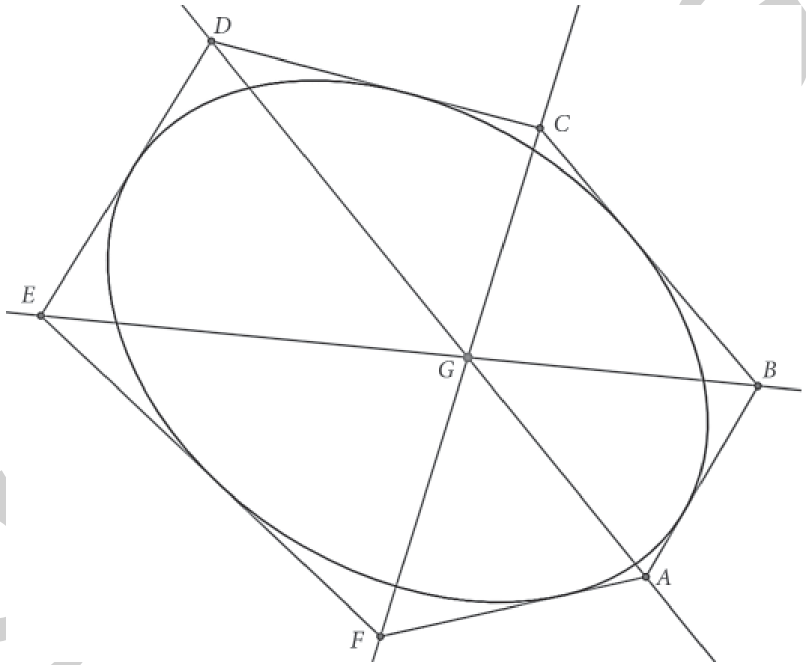


Рис. 5.1.7. До теореми Бріаншона.
ABCDEF — описаний шестикутник, *G* — точка Бріаншона

Приклад 5.1.6. На площині дано п'ять точок деякого кола. З допомогою тільки лінійки побудувати ще одну точку цього кола.

►Нехай дано п'ять різних точок *A, B, C, D, F*, про які відомо, що вони належать деякому колу *(рис. 5.1.8)*. Будуватимемо шосту точку, яка лежить на колі між точками *B* і *D*. Скористаємось теоремою Паскаля для шестивершинника, вписаного в коло.

Побудова

1. Будуємо дві прямі AD та BC, точка $G = AD \cap BC$.
2. Через точку G проводимо довільну пряму p.
3. Будуємо пряму через точки F і C, точка $K = FC \cap p$.
4. Будуємо пряму через точки K і D.
5. Будуємо пряму через точки A і F, точка $E = AF \cap p$.

6. Будуємо пряму через точки E і B.
7. Будуємо точку $J = EB \cap KD$. Точка J — шукана.

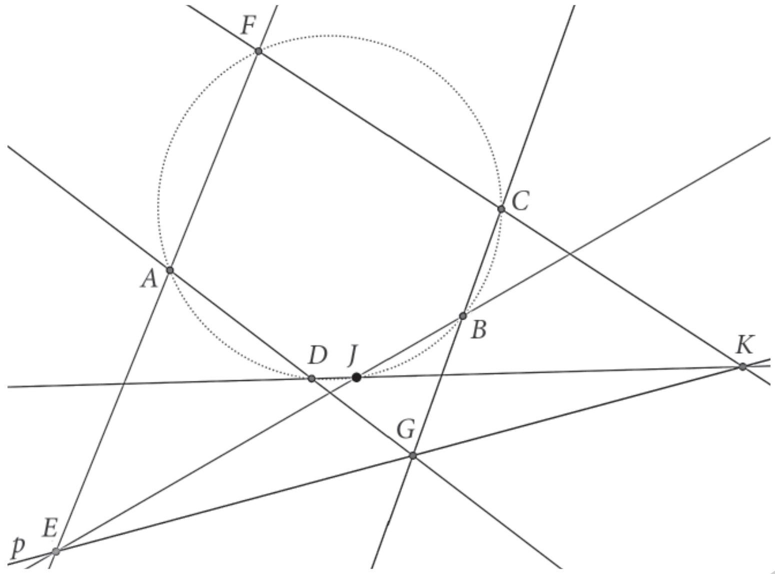


Рис. 5.1.8

Доведення. Розглянемо шестивершинник $AFCBJD$. Точки перетину його протилежних сторін E, G, K лежать на одній прямій. Тоді, за оберненою теоремою Паскаля, — шестивершинник вписаний в овальну лінію II порядку. Оскільки п'ять із вершин належать деякому колу за умовою, то й шоста вершина J належить цьому колу.

Дослідження. Побудована точка — не єдина. Оскільки пряма p була проведена через точку G довільно, то можна побудувати безліч точок, що належать цьому колу, змінюючи положення прямої p. Фактично так, по точках, можна побудувати все коло.◄

5.2. Завдання для самостійної роботи

1. Точки $A(2)$, $B(-3)$, $C(0{,}5)$ — три точки на розширеній евклідовій прямій. Знайти їх однорідні афінні координати.
2. Знайти координати прямих, що проходять через фундаментальні точки проєктивного репера на площині $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$.
3. Дано неоднорідні афінні координати чотирьох точок евклідової прямої: $A(3)$, $B(-1)$, $C(1)$, $D(0)$. Знайти складне відношення (AB, CD).
4. Вершини чотиривершинника задані проєктивними координатами: $(1{:}1{:}1)$, $(1{:}1{:}-1)$, $(1{:}-1{:}1)$, $(-1{:}1{:}1)$. Знайти координати його діагональних точок.
5. Дано рівняння проєктивного перетворення площини:
$$\begin{cases} \lambda x_1' = -x_1 - 2x_2, \\ \lambda x_2' = x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \lambda x_3' = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$
Знайти прообраз точки $A'(0{:}7{:}-6)$ в цьому перетворенні.
6. Приймаючи довільну пряму конфігурації Дезарга за дезаргову пряму, знайти Дезаргову точку та відповідні трикутники.
7. Трапеція вписана в чотирикутник так, що її непаралельні (бічні) сторони перетинаються на одній із діагоналей чотирикутника. Довести, що паралельні сторони (основи) трапеції паралельні іншій діагоналі чотирикутника.
8. На прямій дано три точки A, B, C. Користуючись гармонічною властивістю повного чотиривершинника, побудувати четверту гармонічну точку.
9. На площині дано довільну трапецію. Побудувати точку — середину нижньої основи трапеції, використовуючи тільки лінійку.
10. Виконати рисунок до теореми Паскаля у випадку, коли пряма Паскаля є невласною, а крива II порядку — еліпс.

Розділ 6.
ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

6.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

6.1.1. Збіжність послідовності дійсних (комплексних) чисел і точок простору R^n. Границя функції

(Для розв'язування задач цього пункту корисним буде теоретичний матеріал: [4], розділ 2, п. 2.3.1).

А. Задачі на використання означення границі

Нехай маємо послідовність $\{z_n\}$ комплексних (зокрема дійсних) чисел.

Означення 6.1.1. Число a називається границею послідовності $\{z_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0, що для всіх $n > n_0$ виконується умова $|z_n - a| < \varepsilon$.

Позначають цей факт так: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Нехай функція $f(z)$ комплексної (зокрема дійсної) змінної визначена в деякому околі точки z_0, крім, можливо, самої точки z_0.

Означення 6.1.2. Число a називається границею функції $f(z)$ в точці z_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх z, які задовольняють умову $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - a| < \varepsilon$.

Позначають цей факт так: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a$.

В означеннях *6.1.1* та *6.1.2* число a і точка z_0 не є нескінченними. Нескінченні границі та границі на нескінченності слід розуміти так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall R > 0\ \exists n_0 = n_0(R): |z_n| > R\ \forall n > n_0;$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall R > 0\ \exists \delta = \delta(R): 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > R;$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta = \Delta(\varepsilon): |z| > \Delta \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon;$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall R > 0\ \exists \Delta = \Delta(R): |z| > \Delta \Rightarrow |f(z)| > R.$$

Нехай маємо послідовність точок $(x_n; y_n) \in R^2$.

Означення 6.1.3. Точка $(a; b)$ називається границею послідовності $\{(x_n; y_n)\}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \rho((x_n; y_n), (a; b)) = 0$, тобто якщо відстань між точками $(x_n; y_n)$ послідовності й точкою $(a; b)$ прямує до нуля із зростанням номера членів послідовності.

Означення границі послідовності точок простору R^n, де $n > 2$, нічим принципово не відрізняється від означення *6.1.3* границі послідовності точок простору R^2.

Приклад 6.1.1. Довести, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$. Скільки членів послідовності $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ міститься за межами інтервалу (–0,001; 0,001)?

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{3x}=\dfrac{2}{3}$; 3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-i}{n+1}=2$.

►1. Згідно з означенням (Коші) границі числової послідовності треба показати, що яке б (мале) додатне ε ми не взяли, обов'язково буде член послідовності, заданої формулою $x_n=\dfrac{n}{n+1}$, з деяким номером n_0, такий, що всі наступні члени послідовності відрізнятимуться від числа 1 менше ніж на ε, тобто задовольнятимуть нерівність $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$. Звідси знаходимо: $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$, або $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. У ролі n_0 можна взяти $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$ — цілу частину числа $\dfrac{1}{\varepsilon}-1$ або будь-яке ціле число, більше за $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$.

Таким чином, ми довели, що, яке б не взяли ε > 0, існує номер $n_o=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$, такий, що для всіх $n>n_o$ виконується нерівність $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$, а це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

З'ясуємо тепер, скільки членів послідовності не потрапляють в окіл радіуса 0,001 точки 1. Для $\varepsilon=0{,}001$ маємо $n_0=\left[\dfrac{1}{0{,}001}-1\right]=999$. Отже, перші 999 членів послідовності містяться поза інтервалом (–0,001; 0,001).

2. Візьмемо довільне ε > 0 і покажемо, що існує таке $\Delta>0$, що з нерівності $|x|>\Delta$ випливає $\left|\dfrac{2x+5}{3x}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$, або рівносильна їй нерівність $|x|>\dfrac{5}{3\varepsilon}$.

Отже, для довільного ε > 0 існує $\Delta>0$, а саме $\Delta=\dfrac{5}{3\varepsilon}$, наприклад, таке, що для всіх *x*, які задовольняють нерівність $|x|>\dfrac{5}{3\varepsilon}$ (тобто $|x|>\Delta$), значення дробу $\dfrac{2x+5}{3x}$ відрізняються від $\dfrac{2}{3}$ менше ніж на ε. А це означає, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

3. Задамо довільне ε > 0. Покажемо, що можна знайти такий проколений δ-окіл точки $x_0=-2$, що для всіх *x* з цього околу виконується нерівність $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right|<\varepsilon$. Ураховуючи, що $x\neq-2$ (функція $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ в точці $x_0=-2$ невизначена), скоротимо дріб у лівій частині нерівності й матимемо $|x-2+4|<\varepsilon$, або те саме, що $|x+2|<\varepsilon \Leftrightarrow -2-\varepsilon<x<-2+\varepsilon$.

Таким чином, маючи довільне ε > 0, досить взяти $\delta=\varepsilon$ (або $\delta\le\varepsilon$), і тоді з нерівності $|x-(-2)|<\delta$ випливає нерівність $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right|<\varepsilon$, яка й означає, що $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

4. Візьмемо довільне ε > 0 і покажемо, що існує такий номер n_0, що для всіх $n>n_0$ виконується нерівність: $\left|\dfrac{2n-i}{n+1}-2\right|<\varepsilon$. Розв'яжемо записану нерівність відносно *n*. Маємо:

$$\left|\frac{2n-i}{n+1}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-i-2n-2}{n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|-2-i|}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}-1.$$

Тобто, в ролі n_0 можна взяти $\left[\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}-1\right]$.◄

Приклад 6.1.2. Довести, що:

1) послідовність, задана формулою n-го члена $x_n=(-1)^n$, не має границі;

2) функція $y=\sin x$ не має границі на нескінченності;

3) функція Діріхле $D(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x \text{ — раціональне,}\\ 0, \text{ якщо } x \text{ — ірраціональне}\end{cases}$

не має границі в жодній точці.

►1. Припустимо, що послідовність має границю, яка дорівнює a. Тоді для будь-якого ε > 0, наприклад, для $\varepsilon=\frac{1}{2}$, знайдеться таке натуральне число n_0, що для всіх $n>n_0$ виконується нерівність $|x_n-a|<\frac{1}{2}$. Оскільки x_n набуває лише двох значень: 1 (якщо n — парне) і –1 (якщо n — непарне), виконуються нерівності: $|1-a|<\frac{1}{2}$ і $|-1-a|<\frac{1}{2}$ (або те саме, що $|1+a|<\frac{1}{2}$), враховуючи які, запишемо:

$$2=|1-a+a+1|\le|1-a|+|1+a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Таким чином, ми отримали неправильну нерівність: 2 < 1. Одержане протиріччя доводить, що припущення неправильне, і тому дана послідовність границі не має.

2. Візьмемо дві нескінченно великі послідовності аргументів, $x_n=\pi n$ і $\overline{x}_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, і запишемо відповідні послідовності значень функції: $y_n=\sin x_n=\sin\pi n=0$ і $\overline{y}_n=\sin\overline{x}_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$.

Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x}_n=\infty$, але $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{y}_n=1$. Тобто, не виконується означення границі функції на мові послідовностей (за Гейне), оскільки для двох нескінченно великих послідовностей аргументів відповідні їм послідовності значень функції мають різні границі. Тому $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не існує.

3. Нехай $x_0\in R$ — довільно обрана точка. Візьмемо деяку послідовність $\{x_n\}$ раціональних точок, збіжну до x_0. Тоді $D(x_n)=1$. Візьмемо тепер послідовність ірраціональних точок $\{\overline{x}_n\}$, збіжну до x_0. Тоді $D(\overline{x}_n)=0$ і, відповідно, $\lim\limits_{n\to\infty}D(\overline{x}_n)=0$

На підставі означення границі на мові послідовностей (за Гейне) робимо висновок, що $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ не існує.◄

Приклад 6.1.3. Довести, що послідовність точок $(x_n;y_n)\in R^2$, де $x_n=\frac{2}{n}$, $y_n=\frac{n+1}{n-1}$, збігається до точки (0; 1).

►Для доведення покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\rho\big((x_n;y_n),(0;1)\big)=0$.

Відповідно до означення метрики в просторі R^2 маємо:

$$\rho^2\big((x_n;y_n),(0;1)\big)=(x_n-0)^2+(y_n-1)^2=\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2=\frac{5n^2-6n+5}{n^2(n-1)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho^2\big((x_n;y_n),(0;1)\big)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-6n+5}{n^2(n-1)^2}=0,$$

$$\text{звідки } \lim_{n\to\infty}\rho\big((x_n;y_n),(0;1)\big)=0.◄$$

Б. Задачі на знаходження границь

При розв'язуванні задач на знаходження границь функцій дійсної змінної (зокрема й числових послідовностей) в точці x_0 (скінченній чи нескінченній) використовують наступні твердження (окремо чи в комбінації).

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ (границя сталої дорівнює цій же сталій).

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = a_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = a_2$, …, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$, то

   а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right) =$
   $= \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) + \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) + \ldots + \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

   б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\right) =$
   $= \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) \ldots \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Коротко (і спрощено) цю теорему формулюють так: границя суми дорівнює сумі границь, а границя добутку дорівнює добутку границь.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, C — стала, то $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = Ca$

(сталу можна виносити за знак границі).

4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = a_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = a_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{a_1}{a_2}$

(границя частки дорівнює частці границь).

5. Зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих:

   а) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)} = 0$; схематично: $\dfrac{1}{\infty} = 0$;

   б) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ і $f(x_0) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)} = \infty$; схематично: $\dfrac{1}{0} = \infty$.

Примітка. Усі вищенаведені арифметичні властивості границь мають місце й для функції комплексної змінної.

6. Розкриття невизначеності типу $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_n}, \text{ якщо } m = n, \\ \infty, \text{ якщо } m > n, \\ 0, \text{ якщо } m < n. \end{cases}$$

Зазначимо, що та ж ситуація буде, якщо в чисельнику та знаменнику дробу не обов'язково многочлени, а будь-які степеневі вирази, у яких найвищий степінь змінної x дорівнює m та n відповідно. Тобто, границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях змінної в чисельнику і знаменнику, якщо ці степені рівні, границя є нескінченною, якщо степінь чисельника більший за степінь знаменника, і дорівнює нулю, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника.

7. Нехай $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$ і $\beta_1(x)$ — нескінченно малі в точці x_0 (при $x \to x_0$), де x_0 — число або нескінченність, і $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ в точці x_0, то:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

тобто границя відношення нескінченно малих не зміниться при заміні їх еквівалентними нескінченно малими.

8. Деякі важливі границі:

   а) $\left[\dfrac{0}{0}\right]$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;

   б) $\left[1^\infty\right]$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

в) $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

г) $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$;

д) $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$.

9. Збіжність у просторі R^n означає покоординатну збіжність, тобто:

$$\lim_{k\to\infty}(x_k^1;x_k^2;\ldots;x_k^n)=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}x_k^1=a_1,\\ \lim\limits_{k\to\infty}x_k^2=a_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lim\limits_{k\to\infty}x_k^n=a_n.\end{cases}$$

10. Якщо функція комплексної змінної записана у вигляді $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, а $z_0=x_0+iy_0$, то існування границі $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ рівнозначне існуванню двох границь: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)$ і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)$, причому $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)+i\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)$.

11. Якщо функція $f(x)$, де $x\in R^n$, неперервна в точці $x_0\in R^n$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

12. Якщо функція $f(z)$ комплексної неперервна в точці $z_0\in C$, то це означає, що $\lim\limits_{x\to x_0}f(z)=f(z_0)$.

Наведемо приклади розв’язування задач.

Приклад 6.1.4. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2+3x-4}{2x+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+7n-4}{n^2+5}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5x}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt[3]{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2-4}-\sqrt[3]{x^4+3x-1}}{\sqrt[4]{x^3+2}-\sqrt[5]{2x^7+1}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$; 9) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{4+3x}-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x\cos\frac{1}{x}\right)$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x}$; 13) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$;

14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\mathrm{arctg}\beta x}$, $\beta\neq0$; 15) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\sin3x}$; 16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$;

17) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin4x}{\sin3x}$; 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

►1. Враховуючи неперервність функції $f(x)=\frac{3x^2+3x-4}{2x+3}$ в точці $x=2$, маємо: $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2+3x-4}{2x+3}=\frac{3\cdot2^2+3\cdot2-4}{2\cdot2+3}=2$.

2. Маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Оскільки старші степені змінної n у чисельнику і знаменнику однакові, то границя дробу дорівнює відношенню коефіцієнтів при цих степенях (*див. вище твердження 6*), тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+7n-4}{n^2+5}=\frac{3}{1}=3$.

3. Маємо невизначеність типу $\infty - \infty$. Помножимо і поділимо вираз під знаком границі на спряжений до нього вираз. Усе розв'язування виглядає так:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

4. У чисельнику і знаменнику дробу, границю якого на нескінченності шукаємо, маємо нескінченно великі функції. Старші степені змінної однакові й дорівнюють 1. Тому границя дробу дорівнює відношенню коефіцієнтів 1 і $\sqrt{2}$ відповідно при цих старших степенях:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5x}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Старший степінь змінної x у чисельнику дорівнює $\frac{4}{3}$, а у знаменнику — $\frac{7}{5}$. Оскільки $\frac{4}{3}<\frac{7}{5}$, то:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2-4}-\sqrt[3]{x^4+3x-1}}{\sqrt[4]{x^3+2}-\sqrt[5]{2x^7+1}}=0.$$

Зазначимо, що цей результат можна отримати й розкриваючи невизначеність діленням чисельника та знаменника дробу на $x^{7/5}$; але при цьому доведеться виконати громіздкі перетворення.

6. Скористатися теоремою про границю суми n доданків (*див.* вище твердження *2а*) не можемо, бо $n\to\infty$. Тому спочатку перетворимо суму, границю якої шукаємо. Для цього кожен доданок представимо у вигляді суми двох дробів з невідомими (поки що) чисельниками A та B:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}.$$

Значення A та B тут неважко вгадати ($A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$), однак використаємо загальний прийом їх знаходження. Зведемо до спільного знаменника дроби у правій частині останньої рівності:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Отримали тотожну рівність двох дробів з однаковими знаменниками, яка, очевидно, можлива лише за умови тотожної рівності їх чисельників. Тому для всіх n виконується умова: $1=A(2n+1)+B(2n-1)$, або те саме, що $(2A+2B)n+A-B=1$, звідки маємо:

$$\begin{cases}2A+2B=0,\\ A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0,\\ A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2A=1,\\ 2B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2},\\ B=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Отже, $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

Користуючись цим розкладом, перетворимо вираз під знаком границі:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Очевидно, що в дужках взаємно знищуються всі доданки, крім першого і останнього. Тому перетворювана сума дорівнює:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

Тепер легко знаходимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

7. Ураховуючи, що при $0<a<1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$, а при $a>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, розглянемо всі можливі випадки.

а) якщо $a=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^n}{1+1^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$;

б) якщо $0<a<1$, то $a^n\to 0$ при $n\to\infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}=\dfrac{0}{1+0}=0$;

в) якщо $a>1$, то $a^n\to\infty$ при $n\to\infty$ і ми маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$. Щоб її розкрити, поділимо чисельник і знаменник дробу на a^n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{a^n}+a^n}=\frac{1}{0+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!(n+1-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

9. Підставивши $x=-1$ у вираз, границю якого шукаємо, бачимо, що маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Щоб її розкрити, помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до знаменника, тобто на суму $\sqrt{4+3x}+1$ (звичайно ж, ми помітили, що таким чином матимемо у знаменнику вираз $(x+1)$, на який дріб скоротимо, а отже, позбудемося невизначеності; інакше додатковий множник у чисельнику і знаменнику дробу нічого не дасть).

Записуємо розв'язання:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{4+3x}-1}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{4+3x}+1\right)}{\left(\sqrt{4+3x}-1\right)\left(\sqrt{4+3x}+1\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{4+3x}+1\right)}{4+3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{4+3x}+1\right)}{3(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{4+3x}+1}{3}=\frac{\sqrt{4+3\cdot(-1)}+1}{3}=\frac{2}{3}.$$

10. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Скористаємося тим же прийомом, що й у попередньому прикладі — переведення ірраціональності із чисельника в знаменник або, навпаки, із знаменника в чисельник. Тому помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\left(\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\sqrt[3]{8+x}+4\right)$, який доповнює чисельник до різниці кубів. А далі виконаємо скорочення дробу на x, тобто на вираз, який, власне, і «створює проблеми», тобто дає невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Записуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8+x}-2\right)\left(\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\sqrt[3]{8+x}+4\right)}{x\left(\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\sqrt[3]{8+x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8+x-8}{x\left(\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\sqrt[3]{8+x}+4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\sqrt[3]{8+x}+4}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4}=\frac{1}{12}.$$

Знайдемо цю границю іншим способом, а саме — зведемо її до важливої границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$ (*8д*). Маємо:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8\left(1+\frac{x}{8}\right)}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}-1\right)}{8\cdot\frac{x}{8}}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}-1}{\frac{x}{8}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

11. Для обчислення границь тригонометричних виразів часто буває зручно користуватися важливою тригонометричною границею $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$ *(див. вище твердження 8а)*. Скористуємося й ми цією формулою, виконавши спочатку деякі елементарні перетворення виразу, що під знаком границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x\cos\frac{1}{x}\right)\overset{[\infty-\infty]}{=}\lim_{x\to\infty}x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\overset{[\infty\cdot0]}{=}\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot2\sin^2\frac{1}{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{2x}\right)^2}{\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2\cdot\frac{1}{2x}\right)=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=1^2\cdot0=0.$$

12. Маємо невизначеність типу 1^∞. Розкриємо її за допомогою другої важливої границі *(8б)*. Схема розв'язання задач такого типу виглядає так: вираз u^v, де $u\to1$, $v\to\infty$, послідовно перетворюємо так, щоб виділити в ньому групу $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$, границя якої при $t\to\infty$ дорівнює e:

$$u^v=\left(1+\frac{1}{t}\right)^v=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{1}{t}\cdot v}=\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{\frac{v}{t}}=\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{v(u-1)}.$$

Тоді $\lim\limits_{\substack{u\to1\\ v\to\infty}}u^v=\left(\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{\lim\limits_{\substack{u\to1\\ v\to\infty}}v(u-1)}=e^{\lim\limits_{\substack{u\to1\\ v\to\infty}}v(u-1)}.$

Отже, маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)+4}{2x-1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{2x-1}{4}\cdot\frac{4}{2x-1}\cdot3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{12x}{2x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{2x-1}}=e^6.$$

13. Тут також маємо невизначеність 1^∞. Перетворимо вираз, що під знаком границі, за схемою:

$$u^v=\left(1+(u-1)\right)^v=\left(\left(1+(u-1)\right)^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v}.$$

Тоді $\lim\limits_{\substack{u\to1\\ v\to\infty}}u^v=\left(\lim\limits_{u\to1}\left(1+(u-1)\right)^{\frac{1}{u-1}}\right)^{\lim\limits_{\substack{u\to1\\ v\to\infty}}((u-1)v)}.$

У нашому випадку запишемо:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}\overset{[1^\infty]}{=}\lim_{x\to0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{1/x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to0}\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

Знайдемо окремо границю, що в показнику степеня:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=-\frac{1}{2}\cdot1^2=-\frac{1}{2}.$$

Тепер остаточно маємо: $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{1/x^2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

14. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, тобто границю відношення двох нескінченно малих. Замінимо їх еквівалентними нескінченно малими ($\sin\alpha x\sim\alpha x$; $\operatorname{arctg}\beta x\sim\beta x$), після чого скоротимо дріб і отримаємо результат:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\operatorname{arctg}\beta x}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha x}{\beta x}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

15. Як і в попередньому прикладі, замінимо границю відношення нескінченно малих границею відношення еквівалентних їх нескінченно малих і будемо мати:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

16. Безпосередньою підстановкою значення $x=\frac{\pi}{2}$ у вираз, що під знаком границі, з'ясовуємо, що маємо справу з невизначеністю $\frac{0}{0}$. Щоб її розкрити, виконаємо деякі елементарні тотожні перетворення виразу $\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$. Зокрема, чисельник запишемо у вигляді однієї тригонометричної функції, а саме — синуса, увівши допоміжний аргумент, а до знаменника застосуємо спочатку т. зв. формулу доповняльного аргументу ($\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$), а потім — формулу синуса подвійного аргументу ($\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$). Маємо:

$$\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}.$$

Тепер

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos0}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Примітка. Цей приклад показує, що обчислення границь тригонометричних виразів (навіть у випадку невизначеності $\frac{0}{0}$) необов'язково зводиться до важливої тригонометричної границі.

17. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Однак тут не можна, як ми це робили вище, замінити $\sin4x$ на $4x$, а $\sin3x$ на $3x$, бо відповідні вирази не є еквівалентними при $x\to\pi$ (вирази $4x$ і $3x$ не є навіть

нескінченно малими в точці π). І все ж, зведемо дану границю до важливої границі: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$. Для цього запишемо очевидні тотожності:

$$\sin 4x=\sin\left(4x-4\pi\right)=\sin 4\left(x-\pi\right),$$

$$\sin 3x=-\sin\left(3x-3\pi\right)=-\sin 3\left(x-\pi\right)$$

і виконаємо заміну: $x-\pi=t$. З неї випливає, що $t\to 0$, якщо $x\to\pi$.

Тоді $\sin 4t\sim 4\text{t}$, $\sin 3t\sim 3\text{t}$, а шукана границя —

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 4\left(x-\pi\right)}{\sin 3\left(x-\pi\right)}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin 4t}{\sin 3t}=-\lim_{t\to 0}\frac{4t}{3t}=-\frac{4}{3}.$$

18. Перетворимо вираз, що під знаком границі. Помножимо й поділимо його на $2^n\sin\frac{x}{2^n}$ і застосуємо, для спрощення чисельника, n разів формулу синуса подвійного аргументу. Після кожного кроку кількість множників у чисельнику зменшується на один, добуток поступово «згортається» справа наліво. Маємо:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{2^n\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot 2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot 2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot 2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\ldots=\frac{2\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Тепер шукана границя набуває вигляду:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot 1=\frac{\sin x}{x}.\blacktriangleleft$$

Приклад 6.1.5. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n;y_n\right)$, де $x_n=\frac{\cos n^2}{n}$, $y_n=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

►1. Знайдемо окремо границі послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n^2}{n}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-3}}\right)^{\frac{n+2}{-3}}\right)^{-\frac{3(3n+1)}{n+2}}=e^{-9}.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n;y_n\right)=\left(0;e^{-9}\right)$.

2. Перейдемо у знаменнику дробу до синуса й скористаємося тригонометричною важливою границею, замінивши синус еквівалентною нескінченно малою. Маємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2\left(x^2+y^2\right)}{2\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy^2}{x^2+y^2}.$$

Ураховуючи очевидну нерівність $2xy \le x^2 + y^2$ (яка випливає з того, що $(x - y)^2 \ge 0$), оцінимо модуль виразу, до якого ми прийшли під знаком границі:

$$0\le\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{2xy\cdot y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot y}{x^2+y^2}\right|=\left|y\right|\to 0.$$

Звідси робимо висновок, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}=0$.

3. Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

У полярних координатах функція, границю якої шукаємо, набуває вигляду:

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2}=\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Ураховуючи, що умова $x \to 0$ і $y \to 0$ рівнозначна тому, що $\rho \to 0$ (бо $\rho^2 = x^2 + y^2$), маємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \acute{o}\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\left(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)=\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\lim_{\rho\to 0}\rho^2=0. \blacktriangleleft$$

6.1.2. Неперервність функції

Наведемо короткі теоретичні відомості, необхідні для дослідження неперервності функції.

1. Функція $f(x)$ (x — дійсна змінна чи точка простору R^n) називається неперервною в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2. До неперервної в точці x_0 функції однієї дійсної змінної це означення пред'являє такі вимоги:

— $f(x)$ має бути визначеною в точці x_0 (існує $f(x_0)$);
— існують скінченні односторонні границі $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$;
— $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ — односторонні границі в точці x_0 рівні між собою, тобто існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
— ця границя дорівнює значенню функції в точці x_0 ($f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$).

Якщо хоч одна із перерахованих чотирьох умов не виконується, — функція $f(x)$ не є неперервною в точці x_0.

3. Властивості функцій, неперервних у точці:

а) якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервні й функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ і $\frac{f(x)}{g(x)}$ (остання при $g(x_0) \ne 0$);

б) складна функція $f(x(t))$ неперервна в точці t_0, якщо внутрішня функція $x(t)$ неперервна в точці t_0, а функція $f(x)$ неперервна в точці $x_0 = x(t_0)$ (або спрощено: неперервна функція від неперервної функції є неперервною);

в) якщо неперервна в точці x_0 функція додатна (від'ємна) в цій точці, то вона додатна (від'ємна) й у деякому околі точки x_0;

г) якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона обмежена в деякому околі цієї точки.

4. Точки розриву функції і їх класифікація. Точка x_0 називається точкою розриву функції $f(x)$, якщо функція в цій точці не є неперервною. Інакше кажучи, якщо не виконується хоча б одна із чотирьох умов, вказаних у п. 2.

Залежно від того, яка із цих умов не виконується, розрізняють точки розриву першого й другого роду.

Точка розриву x_0 функції $f(x)$ є точкою розриву першого роду цієї функції, якщо в цій точці існують (скінченні) односторонні границі $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$ (відповідно й про функцію $f(x)$ кажуть, що вона має в точці x_0 розрив першого роду).

На *рис. 6.1.1* (*а*, *б*, *в*) схематично зображено криві, які в точці x_0 мають розрив першого роду.

Розриви першого роду в свою чергу поділяються на так звані усувні розриви і стрибки.

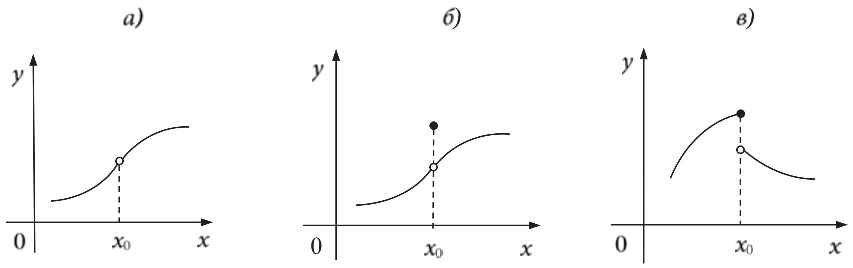


Рис. 6.1.1 *(а, б, в)*

Точка розриву x_0 є точкою усувного розриву функції $f(x)$, якщо в цій точці існують і рівні між собою односторонні границі функції ($f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$), тобто якщо існує границя функції в цій точці $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *(рис. 6.1.1 (а, б))*.

Доцільність терміна «усувний розрив» очевидна, оскільки цей розрив можна «усунути», змінивши значення функції всього лише в одній точці x_0. На *рис. 1 (а)* функція в точці x_0 не визначена, тому довизначивши її в цій точці, а саме поклавши $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, матимемо неперервну в точці x_0 функцію. На *рис. 1 (б)* функція в точці x_0 визначена, але $f(x_0) \ne \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, тому, змінивши її значення в точці x_0, а саме поклавши $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, матимемо неперервну в точці x_0 функцію.

Функція $f(x)$ має в точці x_0 стрибок, якщо в цій точці існують (скінченні) односторонні границі, але вони не рівні між собою: $f(x_0 - 0) \ne f(x_0 + 0)$ *(рис. 6.1.1 (в))*.

Модуль різниці цих односторонніх границь $|f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ називають стрибком функції в точці x_0.

Примітка. Зауважимо, що зустрічається й такий підхід до класифікації, коли до розривів першого роду відносять лише стрибки, а усувні розриви виділяють в окрему групу.

Точка розриву x_0 є точкою розриву другого роду функції $f(x)$, якщо хоча б одна з односторонніх границь функція в цій точці не існує (є нескінченною, або ні скінченною, ні нескінченною); відповідно й про функцію кажуть, що вона має в точці x_0 розрив другого роду.

Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ має в точці $x_0 = 0$ розрив другого роду, бо в цій точці односторонні границі (навіть обидві) є нескінченними (у подібному випадку ще кажуть, що функція має в точці нескінченний розрив); функція $g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ в точці $x_0 = 0$ також має розрив другого роду, бо в цій точці вона не має ні скінченної, ні нескінченної границі.

5. Неперервність функції на проміжку. Функція називається неперервною на проміжку X, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

6. Неперервність елементарних функції. Усі елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення.

Приклад 6.1.6. Знайти точки розриву функції $f(x)$ і з'ясувати характер розривів:

$$1)\ f(x) = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x < 1, \\ 2, \text{ якщо } x = 1, \\ 3x - 1, \text{ якщо } x > 1; \end{array}\right. \qquad 2)\ f(x) = \left[\begin{array}{l} x\sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x < 0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x > 0. \end{array}\right.$$

►1. Функція задана трьома аналітичними виразами, кожен із яких у свою чергу задає елементарну функцію, що, як відомо, неперервна у своїй області визначення. Тому точкою розриву функції $f(x)$ є $x = 0$, бо в цій точці невизначена функція $-\frac{1}{x}$. Крім того, функція може мати розрив у точці «стику» $x = 1$, тобто в точці, де змінюється її аналітичне задання. Шукаємо границі (або односторонні границі) функції у цих двох точках:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty$, отже $x = 0$ — точка розриву другого роду (точка нескінченного розриву);

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(3x-1)=2;$$

отже односторонні границі існують (скінченні), але вони не рівні між собою, тому в точці $x = 1$ функція має розрив першого роду, а саме — стрибок.

Примітка. Оскільки правостороння границя функції $f(x)$ в точці $x = 1$ дорівнює значенню функції в цій точці ($f(1) = 2$), то кажуть, що $f(x)$ неперервна в точці $x = 1$ справа.

2. $x = 0$ — єдина точка розриву функції, бо $f(x)$ у цій точці невизначена. З'ясуємо характер розриву.

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$, бо добуток нескінченно малої і обмеженої функцій є нескінченно мала;

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$ не існує. Отже, $x = 0$ — точка розриву другого роду.◄

Приклад 6.1.7. Функція $f(x)$ не визначена в точці $x = 0$. Довизначити її (якщо це можливо) в точці $x = 0$ так, щоб вона стала неперервною:

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; 2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

►1. Оскільки $f(x)$ не визначена в точці $x = 0$, вона в цій точці має розрив. Згідно з означенням неперервної в точці функції, щоб цей розрив усунути, треба домогтися, щоб $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Звідси і спосіб розв'язання: якщо існує скінченна границя функції в точці $x = 0$, то розрив можна усунути, поклавши $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, якщо ж скінченної границі в точці $x = 0$ не існує, то функцію не можна довизначити в точці $x = 0$ так, щоб вона стала в цій точці неперервною.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, тому слід покласти $f(0) = 1$ і матимемо неперервну в точці $x = 0$ функцію:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 1, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. Функція в точці $x = 0$ має правосторонню нескінченну границю, тобто в цій точці функція має розрив другого роду, а тому розрив у цій точці не можна усунути.◄

Приклад 6.1.8. Чи має функція $f(x;y)=\frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$ точки розриву? Якщо так, то усунути, якщо це можливо, ці розриви.

►Функція має єдину точку розриву — (0; 0), бо вона в цій точці не визначена. З'ясуємо характер розриву.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{x^2y^2}{2\left(x^2+y^2\right)}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{1}{2\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)}\overset{\left[\frac{1}{\infty}\right]}{=}0.$$

(При обчисленні границі ми спочатку замінили нескінченно малу в точці (0; 0) функцію $\sqrt{1+x^2y^2}-1$ еквівалентною їй нескінченно малою $\frac{x^2y^2}{2}$ (*див. вище твердження 8д*), а далі поділили чисельник і знаменник дробу на x^2y^2).

Отже, в точці (0; 0) функція має усувний розрив і її можна довизначити в цій точці так, щоб вона стала неперервною, а саме:

$$F(x;\,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}, \text{ якщо } (x;\,y)\neq(0;0),\\ 0, \text{ якщо } (x;\,y)=(0;0).\end{cases} ◄$$

6.1.3. Застосування неперервності функцій до розв'язування рівнянь та нерівностей

Теорема 6.1.1 (Вейєрштрасса)

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\,b]$, то вона на цьому відрізку: а) обмежена; б) має найменше й найбільше значення.

Теорема 6.1.2 (перша теорема Больцано-Коші)

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\,b]$ і на його кінцях набуває значення різних знаків, то на проміжку $(a;\,b)$ знайдеться (принаймні одна) точка c, в якій функція перетворюється на нуль.

Наслідок. Неперервна на проміжку функція між сусідніми своїми нулями зберігає знак.

Теорема 6.1.3 (друга теорема Больцано-Коші, або теорема про проміжне значення неперервної функції)

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\,b]$ і на його кінцях набуває різних значень ($f(a)=A, f(b)=B, A\neq B$), то вона

на цьому відрізку набуває будь-якого значення C, яке міститься між A та B, тобто для будь-якого C, що міститься між A та B існує $c\in(a;\,b)$ таке, що $f(c)=C$.

Приклад 6.1.9. Чи має рівняння $\sin x - x + 1 = 0$ на відрізку $[0;\,\pi]$ хоча б один корінь?

►Так, має. Справді, функція $f(x)=\sin x - x + 1$ неперервна на відрізку $[0;\,\pi]$ (це елементарна функція) і на кінцях відрізка набуває значення різних знаків ($f(0)=\sin 0 - 0 + 1 = 1 > 0$, $f(\pi)=\sin\pi-\pi+1=1-\pi<0$). За першою теоремою Больцано-Коші, між точками 0 і π є принаймні одна точка x_0, в якій значення функції $f(x)$ дорівнює нулю, тобто $\sin x_0 - x_0 + 1 = 0$.◄

Приклад 6.1.10. Чи може неперервна на відрізку $[a;\,b]$ функція мати областю значень множину R усіх дійсних чисел?

►Ні, не може, бо, за теоремою Вейєрштрасса, неперервна на відрізку функція є обмеженою, отже, не може мати областю визначення необмежену множину R.◄

Наслідок із першої теореми Больцано-Коші лежить в основі т. зв. *методу інтервалів* розв'язування нерівностей. У чому полягає цей метод?

Нехай треба розв'язати нерівність $f(x)>0$ або $f(x)<0$ (знак нерівності може бути й нестрогий), де $f(x)$ — визначена і неперервна на проміжку X функція. Нехай $x_1<x_2<\ldots<x_n$ — усі нулі функції $f(x)$, тобто корені рівняння $f(x)=0$. Точки $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ розбивають проміжок X на інтервали, на кожному з яких, згідно з наслідком, функція $f(x)$ зберігає знак. Тому достатньо взяти на кожному з інтервалів одну (пробну) точку і з'ясувати, який знак має функція $f(x)$ в цій точці. Такий самий знак вона має й на всьому інтервалі. Це дозволить віднайти всі проміжки, де $f(x)>0$ ($f(x)<0$). Їх об'єднання є шуканим розв'язком нерівності.

Приклад 6.1.11. Розв'язати нерівність методом інтервалів:

1) $\sqrt{2-x}<\sqrt[4]{10+x}$; 2) $\dfrac{x(1-x)(x+3)^2(5-3x)}{(x-4)^3}\le 0$.

►1. $\sqrt{2-x}<\sqrt[4]{10+x} \Leftrightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt[4]{10+x}<0$. Область визначення (область допустимих значень змінної) виразу $\sqrt{2-x}-\sqrt[4]{10+x}$ знаходимо із системи $\begin{cases}2-x\ge 0,\\ 10+x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2,\\ x\ge -10\end{cases} \Leftrightarrow -10\le x\le 2$, а нулі лівої частини — із рівняння:

$$\sqrt{2-x}=\sqrt[4]{10+x} \Rightarrow (2-x)^2=10+x \Leftrightarrow x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=6.\end{array}\right.$$

Корінь $x = 6$ — зайвий , а точка $x = -1$ розбиває область визначення на два проміжки: $[-10, -1]$ та $(-1, 2]$ *(рис. 6.1.2)*.

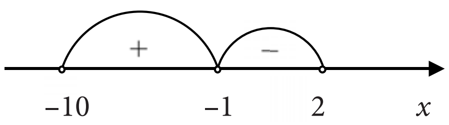


Рис. 6.1.2

Встановлюємо знак виразу $\sqrt{2-x}-\sqrt[4]{10+x}$ на кожному із інтервалів $[-10, -1]$ та $(-1, 2]$. Для цього оцінимо його значення у двох точках, взятих по одній із кожного інтервалу: $x = -7$ та $x = 1$, наприклад. Маємо: $\sqrt{2-(-7)}-\sqrt[4]{10+(-7)}>0$, $\sqrt{2-1}-\sqrt[4]{10+1}<0$. Тепер легко записати відповідь: $x \in (-1, 2]$.

2. Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{x(1-x)(x+3)^2(5-3x)}{(x-4)^3}$. Вона неперервна на множині $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$, а її нулі $x_1 = -3$, $x_2 = 0$,

$x_3 = 1$, $x_4=\dfrac{5}{3}$ розбивають цю множину на шість проміжків (*рис. 6.1.3*).

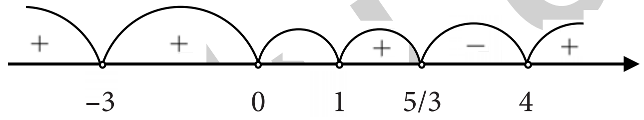


Рис. 6.1.3

На кожному з утворених інтервалів функція $f(x)$ зберігає сталий знак. Встановлюємо ці знаки і «читаємо» відповідь: $x\in[0,1]\cup\left[\dfrac{5}{3},4\right)\cup\{-3\}$.◄

6.2. Завдання для самостійної роботи

Збіжність послідовності дійсних чисел. Границя функції

1. Довести, користуючись означенням границі, що:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n-1}=\dfrac{3}{5}$. Скільки членів послідовності $\left\{\dfrac{3n+2}{5n-1}\right\}$ міститься за межами ε-околу точки $\dfrac{3}{5}$, якщо: а) ε = 0,01; б) ε = 0,001?

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}=0$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}=1$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}=\infty$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{n\pi}{2}$ не існує; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ не існує.

2. Обчислити границі послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-5n^2+n+7}{9n^3+5n-3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+4n-7}{2n^3-3n+5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^4}{4n^2+n-3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2-(n-2)^2}{7n+5}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(3n-2)^2}{8n^2+5n-3}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+1}{7n+5}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-(n+1)^3}{n^2+(n-1)^2}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n-1)!}{(n-1)!+n!}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{n!(n-1)}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{2n+\sqrt{n-1}}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+n^4}}{(2n-1)^2}$.

3. Обчислити границі функції на нескінченності:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x-1)}{4x^3+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{(x+1)(x-2)}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)(x-2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3-3x+5}}{5x+2}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-3x+1}}{\sqrt[4]{x^6+2x^5+3}}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^6+x^2-1}}{\sqrt[4]{x^8+4x^6+3x^2}}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{\sqrt{4x^2+x+3}}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{5x+2}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]\right\}$; 13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

4. Обчислити границі функції в точці:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x+1}{2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x(x-2)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{3-x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$.

5. Використовуючи визначні границі, обчислити:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^{2x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{2x}\right)^{2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x}\right)^{2x+1}$.

6. Обчислити односторонні границі функції $f(x)$ у точці x_0:

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-1}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$, $x_0=0$;

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sin \pi x}$, $x_0=1$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{e^{\cos\frac{\pi}{2}x}-1}$, $x_0=1$; 6) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

7) $f(x)=\dfrac{\cos x}{3-2^{\frac{1}{\sin x}}}$, $x_0=0$; 8) $f(x)=\left[\begin{array}{l}3-x,\ \text{якщо}\ x\le 2,\\ x^2-1,\ \text{якщо}\ x>2,\end{array}\right.$ $x_0=2$;

9) $f(x)=\left[\begin{array}{l}e^x,\ \text{якщо}\ x<1,\\ \ln x-1,\ \text{якщо}\ x\ge 1,\end{array}\right.$ $x_0=1$;

10) $f(x)=\left[\begin{array}{ll}-1, & \text{якщо}\ x<1,\\ 3, & \text{якщо}\ x=1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо}\ x>1,\end{array}\right.$ $x_0=1$.

Неперервність функції

1. Дослідити функцію на неперервність і з'ясувати характер точок розриву:

1) $y=\dfrac{x-3}{x^2-9}$; 2) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$; 3) $y=\dfrac{\sin x}{2x}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

5) $y=e^{\frac{1}{x-1}}$; 6) $y=\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$; 7) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

8) $y=\begin{cases}x-1, & x\ne 2,\\ 0, & x=2\end{cases}$; 9) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; 10) $y=\begin{cases}x, & x<2,\\ 3, & x\ge 2\end{cases}$;

11) $y=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ x, & x\ge 0\end{cases}$; 12) $y=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}$.

2. Довизначити (якщо це можливо) функцію $f(x)$ у точці $x=0$ так, щоб вона стала в цій точці неперервною:

1) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 2) $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$; 5) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$; 6) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$;

7) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; 8) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

9) $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 10) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}$.

3. Довизначити (якщо це можливо) функцію $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) так, щоб вона стала в цій точці неперервною:

1) $f(x;y)=\dfrac{\sin xy}{2x}$, $(x_0;y_0)=(0;1)$;

2) $f(x;y)=\dfrac{\sin xy^2}{x}$, $(x_0;y_0)=(0;3)$;

3) $f(x;y)=\dfrac{\operatorname{tg}xy}{x}$, $(x_0;y_0)=(5;0)$;

4) $f(x;y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $(x_0;y_0)=(0;0)$;

5) $f(x;y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$, $(x_0;y_0)=(0;0)$;

6) $f(x;y)=\dfrac{xy^2}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}$, $(x_0;y_0)=(0;0)$;

7) $f(x;y)=(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, $(x_0;y_0)=(0;0)$;

8) $f(x;y)=(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}$, $(x_0;y_0)=(0;0)$;

9) $f(x;y)=\dfrac{\sin xy}{\arcsin y^2}$, $(x_0;y_0)=(0;1)$;

10) $f(x;y)=\dfrac{2x+xy}{xy^2+xy-6x}$, $(x_0;y_0)=(0;2)$.

Застосування неперервності функцій до розв'язування рівнянь та нерівностей

1. Довести, що рівняння мають корені на вказаних проміжках:

1) $x^3-7x+1=0$; $[1;3]$; 2) $x^5-2x+2=0$; $[-2;0]$;

3) $2x^4+3x-1=0$; $[0;1]$; 4) $x^5-6x^2+3x-1=0$; $[0;2]$;

5) $x^3-|x|+2=0$; $[-2;0]$; 6) $8^x-3\cdot 2^x-\cos x=0$; $[0;2]$;

7) $\ln x=\cos x$; $[1;e]$; 8) $x^2=e^x+1$; $[-4;0]$;

9) $\ln x+x=0$; $\left[\dfrac{1}{e};e\right]$; 10) $3x+e^x=0$; $[-1;0]$.

2. Розв'язати нерівності методом інтервалів:

1) $(1-x^2)\arcsin x>0$;

2) $\log_2(x+5)\cdot\log_\pi(3-x)\cdot\sqrt{(x+5)(3-x)}<0$;

3) $\left|x^2-5x\right|<6$; 4) $(x^4-1)\cdot\sqrt{16-x^2}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(10-x)\ge 0$;

5) $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}<0$; 6) $\dfrac{(x^3-1)(x+2)^2(x-5)}{x^2(x^2-9)(x^4+1)}\ge 0$;

7) $\left|2x^2-9x+15\right|\ge 20$; 8) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$;

9) $\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0$; 10) $\dfrac{(x^2-1)(x^2-5x+6)\ln x}{x^2-4x-21}\le 0$.

Розділ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

7.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

7.1.1. Похідна, її геометричний та механічний зміст

Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і деякому її околі. Тоді похідна цієї функції в точці x_0 задається рівністю

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо така границя скінченна, то функція $f(x)$ називається диференційовною в точці x_0.

Геометрично похідна $f'(x_0)$ означає кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці з абсцисою x_0. Рівняння цієї дотичної —

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

А рівняння нормалі до кривої $f(x)$ у цій же точці —

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Похідна функції $f(z)$ комплексної змінної означається так само, як і похідна функції дійсної змінної *(див.: [4], розділ 2 п. 2.3.5)*. Ідентичними є й правила диференціювання. Наприклад,

якщо $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, то, використовуючи правило диференціювання дробу, будемо мати: $f'(z) = -\dfrac{2}{(z-1)^2}$.

Приклад 7.1.1. На кривій $f(x) = x^3 - 3x + 5$ знайти точки, в яких дотична перпендикулярна до прямої $y = -\dfrac{x}{9}$.

►Кутовий коефіцієнт дотичної в точці з абсцисою x $k_{\text{дот}} = 3x^2 - 3$, а кутовий коефіцієнт даної прямої $-\dfrac{1}{9}$. Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих (добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює –1), маємо рівняння для знаходження абсцис шуканих точок:

$$-\frac{1}{9}\left(3x^2 - 3\right) = -1,$$

звідки $3x^2 = 12$, а $x = \pm 2$. Далі знаходимо $f(-2) = 3$, $f(2) = 7$. Отже, на кривій є дві точки $M_1(-2; 3)$ та $M_2(2; 7)$, у яких дотичні перпендикулярні до прямої $y = -\dfrac{x}{9}$.◄

Приклад 7.1.2. Через точку (1; 0) провести дотичну до кривої $f(x) = x^4$.

►Нехай $\left(x_0; x_0^4\right)$ — точка дотику. Тоді рівняння дотичної запишеться так:

$$y - x_0^4 = 4x_0^3(x - x_0).$$

Координати точки (1; 0) це рівняння задовольняють, оскільки дотична через зазначену точку проходить. Тому маємо:

$$0 - x_0^4 = 4x_0^3\left(1 - x_0\right) \Leftrightarrow x_0^3\left(3x_0 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0, \\ x_0 = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Знаходимо тепер $f(0) = 0$, а також $f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$. Отже, маємо дві дотичні:

$$y=0 \quad \text{та} \quad y-\frac{81}{256}=\frac{27}{16}\left(x-\frac{3}{4}\right)\Leftrightarrow y=\frac{27}{16}\left(x-\frac{9}{16}\right).◄$$

Похідна $f'(x)$ характеризує швидкість зміни функції в точці x. Тому, якщо $S = S(t)$ — закон прямолінійного руху матеріальної точки (S — відстань, t — час), то $v(t) = S'(t)$ — швидкість руху точки в момент часу t, а $a(t) = v'(t)$ — прискорення в момент t.

Приклад 7.1.3. Точка рухається по кубічній параболі $12y = x^3$. Яка із її координат змінюється швидше?

►Враховуючи, що координати x та y є функціями часу t, диференціюємо обидві частини рівняння кривої по t, після чого маємо: $12y'_t=3x^2\cdot x'_t$. Звідки $\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{x^2}{4}$.

Отже, $\forall x:|x|<2$ відношення швидкості зміни ординати до швидкості зміни абсциси $\frac{y'_t}{x'_t}<1$, тобто швидше змінюється абсциса; в точках $x = \pm 2$ відношення $\frac{y'_t}{x'_t}=1$, тобто швидкості зміни координат однакові; $\forall x:|x|>2$ відношення $\frac{y'_t}{x'_t}>1$, тобто швидше змінюється ордината.◄

7.1.2. Диференційовність функції. Застосування диференціала до наближених обчислень

Функція $f(x)$, де x — дійсна чи комплексна змінна, є диференційовною в точці x_0, тоді й тільки тоді, коли виконується співвідношення:

$$\Delta f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\Delta x+o\left(\Delta x\right).$$

Лінійна частина приросту диференційовної функції в точці x_0 є диференціалом функції в цій точці, тобто: $df\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\Delta x$, або, у випадку, коли x — незалежна змінна, — $df\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)dx$.

Аналогічно означають і диференційовану функцію багатьох змінних. А саме: функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається диференційовною в точці $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$, якщо її повний приріст у цій точці можна записати у вигляді:

$$\Delta f(x_1^0,\ldots,x_n^0)=f(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}A_k\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Delta x_k,$$

де $A_k=A_k\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$, $\quad \alpha_k=\alpha_k\left(x_1^0,\ldots,x_n^0,\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\right)\to 0$, якщо усі $\Delta x_k\to 0, k=\overline{1,n}$.

Лінійна частина приросту диференційованої в точці $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається її диференціалом у цій точці й позначається $df(x_1^0,\ldots,x_n^0)$.

Щоб записати зміст сталих A_k, нагадаємо означення частинних похідних функції.

Частинні похідні функції n змінних $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точці $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ визначаються рівностями:

$$\frac{\partial f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_k f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)}{\Delta x_k},$$

де

$$\Delta_k f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)=f\left(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k^0+\Delta x_k,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0\right)-$$

$$-f\left(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k^0,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0\right) \text{ —}$$

частинний приріст функції по змінній x_k, $k=\overline{1,n}$.

Інші позначення частинних похідних: $f'_{x_k}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$.

Виявляється, що A_k є значенням k-ї частинної похідної функції f в точці $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$, тобто диференційовність функції в точці $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ означає виконання співвідношення:

$$\Delta f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)=\sum_{k=1}^{n}f'_k\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Delta x_k,$$

де $\alpha_k=\alpha_k\left(x_1^0,\ldots,x_n^0,\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\right)\to 0$, якщо усі $\Delta x_k\to 0, k=\overline{1,n}$.

Тоді диференціал функції в точці $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ дорівнює:

$$d\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)=\sum_{k=1}^{n}f'_k\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\Delta x_k,$$

або, у випадку, коли $x_1, \ldots, x_n$ — незалежні змінні:

$$d\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)=\sum_{k=1}^{n}f'_k\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)dx_k.$$

Існує проста для перевірки ознака диференційовності функції n змінних у точці: це існування усіх її частинних похідних в околі даної точки та їх неперервність у самій точці.

Необхідні й достатні умови диференційовності функції комплексної змінної (див.: [4], розділ 2, п. 2.3.5)

Диференціал функції застосовують при наближених обчисленнях. Із означення диференціала функції безпосередньо випливає наближена, при малих приростах аргументів, рівність:

$$\Delta f\left(x_0\right)\approx df\left(x_0\right)$$

(чи $\Delta f\left(x_1^0,...,x_n^0\right)\approx df\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ для функції n змінних),

звідки маємо формулу для наближених обчислень значень диференційовної функції у «незручній» точці через значення функції та її похідних у зручній (але близькій!) точці:

а) $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x$ (для функції однієї змінної);

б) $f\left(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_n^0+\Delta x_n\right)\approx f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}f'_k\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\Delta x_k$

(для функції n змінних).

Приклад 7.1.4. Знайти наближене значення виразу:

1) $\sqrt{1{,}08}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}96}{1{,}04}-2\right)$.

►1. Перефразуємо умову завдання так: знайти значення функції $f(x)=\sqrt{x}$ в точці 1,08.

Використаємо формулу

$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, де $f(x+\Delta x)=\sqrt{1{,}08}$.

Підкореневий вираз зручно записати у вигляді:

$x+\Delta x=1+0{,}08$, тобто $x=1$, $\Delta x=0{,}08$.

Обчислюємо $f(1)=\sqrt{1}=1$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$.

Підставляючи у формулу отримані значення, знайдемо наближене значення виразу $\sqrt{1{,}08}\approx 1+\dfrac{1}{2}\cdot 0{,}08\approx 1{,}04$.

2. Перефразуємо умову: знайти значення функції $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}-2\right)$ у точці (1,96; 1,04).

Використаємо формулу

$$f\left(x+\Delta x,\,y+\Delta y\right)\approx f\left(x,\,y\right)+f_x'\left(x,\,y\right)\Delta x+f_y'\left(x,\,y\right)\Delta y\,,$$

де $f\left(x+\Delta x,\,y+\Delta y\right)=arctg\left(\dfrac{1{,}96}{1{,}04}-2\right)$. Звідси: $x + \Delta x = 2 - 0{,}04$, $y + \Delta y = 1 + 0{,}04$. Відповідно $x = 2$, $\Delta x = -0{,}04$, $y = 1$, $\Delta y = 0{,}04$.

Точка (2; 1) близька до нашої «незручної» точки (1,96; 1,04). Обчислюємо $f(2;1)=arctg\left(\dfrac{2}{1}-2\right)=0$ і відповідні частинні похідні в точці (2; 1) $f_x'\left(2;1\right)=\left.\dfrac{y}{y^2+\left(x-2y\right)^2}\right|_{x=2,\ y=1}=1$;

$$f_y'\left(2;1\right)=\left.\frac{-x}{y^2+\left(x-2y\right)^2}\right|_{x=2,\ y=1}=-4\,.$$

Підставляючи у формулу отримані значення, знайдемо наближене значення виразу

$$arctg\left(\frac{1{,}96}{1{,}04}-2\right)\approx 0+1\cdot\left(-0{,}04\right)-4\cdot 0{,}04\approx -1{,}2.$$ ◄

7.1.3. Частинні похідні в задачах геометрії

А. Дотична і нормаль до плоскої кривої

Якщо криву задано рівнянням $F(x,\,y) = 0$, де функція $F(x,\,y)$ диференційована в точці $(x_0,\,y_0)$ цієї кривої, то рівняння дотичної і нормалі до кривої у зазначеній точці відповідно мають вигляд:

$$F_x'(x_0,\,y_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,\,y_0)(y-y_0)=0$$

та

$$F_y'(x_0,\,y_0)(x-x_0)+F_x'(x_0,\,y_0)(y-y_0)=0.$$

В. Дотична площина та нормаль до поверхні

Якщо поверхню задано рівнянням $F(x,\,y,\,z) = 0$, де функція $F(x,\,y,\,z)$ диференційована в точці $(x_0,\,y_0,\,z_0)$ цієї поверхні, то дотична площина і нормаль до поверхні у зазначеній точці відповідно мають рівняння:

$$F_x'(x_0,\,y_0,\,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,\,y_0,\,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,\,y_0,\,z_0)(z-z_0)=0$$

(або $z-z_0=f_x'(x_0,\,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,\,y_0)(y-y_0)$, якщо поверхня задана явно рівнянням $z = f(x,\,y)$) та

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,\,y_0,\,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,\,y_0,\,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,\,y_0,\,z_0)}.$$

Приклад 7.1.5. Написати рівняння дотичної до кривої $x^2 + y^2 - xy = 21$, паралельної прямій $2x + y = 1$.

►Скористаємося рівняннями, наведеними у *п. А*. Записуємо:

$$F(x,\,y) = x^2 + y^2 - xy - 21,\ F'_x(x,\,y) = 2x - y,\ F'_y(x,\,y) = 2y - x.$$

Нехай точка дотику (невідома поки що) — $(x_0,\,y_0)$. Тоді рівняння дотичної до кривої у цій точці запишеться так:

$$(2x_0 - y_0)(x - x_0) + (2y_0 - x_0)\,(y - y_0) = 0.$$

Вектор нормалі цієї прямої $\vec{n}_1=\left\{2x_0-y_0;\,2y_0-x_0\right\}$, а прямої, даної в $\vec{n}_2=\left\{2;1\right\}$. Оскільки прямі мають бути паралельними, то їх нормальні вектори мають бути колінеарні. З умови колінеарності векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ знайдемо точку $(x_0,\,y_0)$.

Маємо:

$$\frac{2x_0-y_0}{2}=\frac{2y_0-x_0}{1}=t\text{, звідки }\begin{cases}2x_0-y_0=2t,\\2y_0-x_0=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{5}{3}t,\\[2mm] y_0=\dfrac{4}{3}t.\end{cases}$$

Точка лежить на кривій, тому знайдені її координати задовольняють рівняння кривої, тобто:

$$\frac{25}{9}t^2+\frac{16}{9}t^2-\frac{20}{9}t^2=21\Leftrightarrow t^2=9\Leftrightarrow t\pm 3\,.$$

Отже, маємо дві точки дотику, які відповідають значенням $t_1 = 3$ та $t_2 = -3$: $\left(x_0^{(1)};\,y_0^{(1)}\right)=\left(5;\,4\right)$ та $\left(x_0^{(2)};\,y_0^{(2)}\right)=\left(-5;\,-4\right)$.

Знаходимо

$$F'_x\left(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}\right) = F'_x(5,4) = 2\cdot 5 - 4 = 6,$$

$$F'_y\left(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}\right) = F'_y(5,4) = 2\cdot 4 - 5 = 3$$

і записуємо рівняння першої дотичної: $6(x-5)+3(y-4)=0$ або $2x+y-14=0$. Аналогічно знаходимо рівняння іншої дотичної $2x+y+14=0$.◄

Приклад 7.1.6. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=\frac{x}{y}+\cos\frac{y}{x}$ у точці $\left(2;\pi;\frac{2}{\pi}\right)$.

►Скористаємося рівняннями, наведеними у *п. В.* Записуємо:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{y}-\sin\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right);\quad f'_x(2,\pi)=\frac{1}{\pi}+\frac{\pi}{4}=\frac{4+\pi^2}{4\pi};$$

$$f'_y(x,y)=-\frac{x}{y^2}-\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x};\quad f'_y(2,\pi)=-\frac{2}{\pi^2}-\frac{1}{2}=-\frac{4+\pi^2}{2\pi^2}.$$

Тепер рівняння дотичної площини набуває вигляду:

$$z-\frac{2}{\pi}=\frac{4+\pi^2}{4\pi}(x-2)-\frac{4+\pi^2}{2\pi^2}(y-\pi).$$

Нормаль до поверхні в точці $\left(2;\pi;\frac{2}{\pi}\right)$ має рівняння:

$$\frac{4\pi(x-2)}{4+\pi^2}=-\frac{2\pi^2(y-\pi)}{4+\pi^2}=\frac{z-\frac{2}{\pi}}{-1}.$$

Або в параметричній формі: $\begin{cases} x=2+\frac{4+\pi^2}{4\pi}t, \\ y=\pi-\frac{4+\pi^2}{2\pi^2}t, \\ z=\frac{2}{\pi}-t. \end{cases}$ ◄

7.1.4. Застосування похідної до обчислення границь

У *розділі 6* розглянуто різні методи обчислення границь функцій в точці та на нескінченності, способи розкриття невизначеностей. Застосування похідної також може бути ефективним інструментом при обчисленні границь.

Наступна теорема вказує спосіб, який дозволяє, при певних умовах, розкрити невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 7.1.1 (правило Лопіталя)

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені й диференційовні в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, і

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty.$$

Тоді, якщо існує скінченна або нескінченна границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}(g'(x)\neq 0)$, то існує й границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Примітки

1. Зазначимо, що теорема справедлива й у випадку, коли $x\to\infty$.

2. Якщо похідні функцій $f'(x)$ та $g'(x)$ задовольняють ті самі умови, що й функції $f(x)$ та $g(x)$, то теорему можна застосувати неодноразово, до тих пір, доки не усунеться невизначеність або з'ясується, що потрібні границі не існують.

3. За допомогою правила Лопіталя також можна розкривати невизначеності виду $[0\cdot\infty],[\infty-\infty],[\infty^0],[0^\infty]$, які зводяться до основних невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right],\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

4. Теорема дає лише достатні умови існування границі (скінченної чи нескінченної) відношення нескінченно малих чи нескінченно великих функцій; якщо умови теореми не виконуються, то це не означає, що шукана границя не існує, а означає лише, що її не можна знайти за допомогою правила Лопіталя.

Приклад 7.1.7. Знайти границю функції:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x};\ 2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

►1. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Скористаємося правилом Лопіталя (в існуванні потрібних похідних і границь будемо переконуватися по ходу перетворень).

Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\sin x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

2. Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Зведемо її до невизначеності $\frac{0}{0}$, а тоді застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.◄$$

7.1.5. Похідна для дослідження властивостей функцій однієї та двох дійсних змінних

Дуже важливу роль відіграє похідна при аналітичному дослідженні функції. Послідовність *повного дослідження* функції однієї змінної з побудовою її графіка може бути такою.

1. Знайти область визначення функції.
2. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
3. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
4. Дослідити функцію на неперервність.
5. Знайти асимптоти функції або з'ясувати, що їх немає.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції та знайти екстремуми (якщо вони існують).
7. Визначити напрями опуклості графіка функції та точки перегину.
8. Знайти контрольні точки та провести деякі додаткові дослідження, наприклад: під яким кутом графік функції перетинає вісь абсцис (за потреби).
9. Побудувати ескіз графіка.

Дослідження функції на екстремуми і монотонність та напрями опуклості і точки перегину її графіка (п. 6 та 7 цієї схеми) проводять за допомогою похідної. Наведемо короткі теоретичні відомості, необхідні для того, щоб таке дослідження провести.

Ознаки монотонності функції

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;\ b)$. Тоді:

а) для того щоб функція була *неспадною* (*незростаючою*) на $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$) для всіх $x\in(a;\ b)$;

б) для того щоб функція була *зростаючою* (*спадною*) на $[a;\ b]$, достатньо, щоб $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для всіх $x\in(a;\ b)$.

Максимуми й мінімуми функції

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку X, то внутрішня точка x_0 цього проміжку називається *точкою* (*локального*) *мак-*

симуму (*мінімуму*) цієї функції, якщо існує окіл точки x_0, у якому для всіх x виконується умова $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$).

Точки максимумів та мінімумів функції називаються точками (локальних) екстремумів цієї функції, а значення функції в точках (локальних) екстремумів — її (локальними) екстремумами, максимумами чи мінімумами відповідно.

Необхідна умова точки екстремуму. У точках екстремумів похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Достатні умови екстремумів:

а) якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0, і при переході через цю точку похідна функції змінює знак з «+» на «–» (тобто $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) < 0$ при $x > x_0$), то x_0 — точка максимуму; якщо ж при переході через цю точку похідна функції змінює знак з «–» на «+» (тобто $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) > 0$ при $x > x_0$), то x_0 — точка мінімуму; якщо ж при переході через точку x_0 похідна функції знака не змінює, то в цій точці функція екстремуму не має;

б) якщо $f(x)$ двічі диференційовна в точці x_0 і $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), то x_0 — точка максимуму (мінімуму);

в) нехай $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \ne 0$. Тоді, якщо n парне, то при $f^{(n)}(x_0) < 0$ ($f^{(n)}(x_0) > 0$) в точці x_0 функція має максимум (мінімум), якщо ж n непарне, то екстремуму в точці x_0 немає.

Приклад 7.1.8. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ на монотонність та екстремуми.

►Область визначення функції — усі дійсні числа, крім числа 0. Обчислюємо похідну даної функції: $y' = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)' = \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Знаходимо критичні точки (точки з області визначення функції, в яких $y' = 0$ або не існує): $\dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$; розбиваємо область визначення функції критичними точками на інтервали й на кожному з інтервалів встановлюємо знак похідної $y' = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

Результати занесемо в таблицю:

Інтервал	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	+	0	–	не існує	–	0	+
$y(x)$	зростає	max	спадає	не існує	спадає	min	зростає

Із таблиці видно, що функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$, спадає на проміжках $(-1; 0)$ та $(0; 1)$; точками екстремумів є $x_1 = 1$ (точка *мінімуму*) та $x_2 = -1$ (точка *максимуму*); відповідно екстремуми функції $y_{\min} = y(1) = 2$, $y_{\max} = y(-1) = -2$. Точка $x = 0$ не може розглядатися як потенційна точка екстремуму, бо в ній функція не визначена.◄

Напрями опуклості й точки перегину графіка функції

Крива називається *опуклою вгору* (*вниз*), якщо усі її точки, крім однієї, лежать нижче (вище) від будь-якої дотичної до кривої (тією єдиною точкою, про яку тут зазначено, є точка дотику).

Точка кривої називається *точкою її перегину*, якщо при переході через цю точку крива змінює напрям опуклості.

Якщо $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) $\forall x \in (a; b)$, то в цьому інтервалі крива $f(x)$ опукла вгору (вниз).

Точки перегину кривої $f(x)$ можуть бути там, де $f''(x) = 0$ або не існує.

Приклад 7.1.9. Дослідити напрями опуклості графіка функції $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ і знайти точки його перегину (якщо такі є).

►Дану в умові функцію ми досліджували в попередньому прикладі на екстремуми і монотонність. Скористаємося виразом уже знайденої похідної і запишемо похідну другого порядку:

$$y'' = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \frac{2x\cdot x^2 - 2x\cdot\left(x^2-1\right)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \neq 0 .$$

Складемо таблицю:

Інтервал	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$y''(x)$	–	не існує	+
$y(x)$	$\cap$	не існує	$\cup$

З таблиці бачимо, що крива опукла вгору на проміжку $(-\infty; 0)$ і опукла вниз на проміжку $(0; +\infty)$. Хоча у точці $x = 0$ друга похідна функції не існує, однак вона не може бути абсцисою точки перегину, бо й сама функція в цій точці не існує.◄

Екстремуми функції двох змінних

Якщо функція $f(x, y)$ визначена в деякій області D, то внутрішня точка (x_0, y_0) цієї області називається *точкою* (локального) *максимуму* (*мінімуму*) цієї функції, якщо існує окіл точки (x_0, y_0), у якому для всіх $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ виконується умова $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$.

Як і у випадку функції однієї змінної, точки максимумів та мінімумів функції називаються точками (локальних) екстремумів цієї функції, а значення функції в точках (локальних) екстремумів — її (локальними) екстремумами, максимумами чи мінімумами відповідно.

Необхідна умова точки екстремуму. У точках екстремумів диференційовної функції $f(x, y)$ її частинні похідні дорівнюють нулю (точка, у якій обидві частинні похідні функції дорівнюють нулю, називається *стаціонарною*).

Достатня умова екстремуму. Нехай функція $f(x, y)$ має в деякому околі стаціонарної точки (x_0, y_0) неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Уведемо позначення $f''_{x^2}(x_0, y_0) = A,\quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B,\quad f''_{y^2}(x_0, y_0) = C$ і розглянемо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. Якщо $\Delta > 0$, то точка (x_0, y_0) є точкою локального екстремуму, причому вона — точка мінімуму, якщо $A > 0$ і точка максимуму, якщо $A < 0$. Якщо ж $\Delta < 0$, то в точці (x_0, y_0) функція екстремуму не має.

Приклад 7.1.10. Дослідити функцію $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ на екстремум.

►Складемо систему рівнянь для знаходження стаціонарних точок:

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0, \\ z'_y = \sqrt{x} - 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язком є пара (4; 4). Отже, маємо єдину стаціонарну точку (4; 4).

Шукаємо частинні похідні другого порядку функції $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ і обчислюємо їх значення в точці (4; 4):

$$z''_{x^2}(4;4) = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}\bigg|_{x=4,\ y=4} = -\frac{1}{8},\quad z''_{y^2}(4;4) = -2,$$

$$z''_{xy}(4;4) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=4,\ y=4} = \frac{1}{4}.$$

Отже, $A = -\frac{1}{8}$, $C = -2$, $B = \frac{1}{4}$ і $\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0$. Значить точка (4; 4) є точкою екстремуму даної функції, а з огляду на те, що $A < 0$, робимо висновок, що в точці (4; 4) функція $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ має максимум. Знайдемо його: $\max z\,(4; 4) = 12$.◄

Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа

Задача на відшукання умовного екстремуму функції $f(x, y)$ полягає в тому, що потрібно знайти екстремум функції за умови, що точки (x, y) з області визначення функції задовольняють співвідношення $\varphi(x, y) = 0$ (*рівняння зв'язку*). Якщо рівняння зв'язку вдається розв'язати відносно будь-якої зі змінних, то, підставивши її значення у вираз для функції, задача буде зведена до дослідження функції однієї змінної на (звичайний) екстремум. Однак із рівняння зв'язку не завжди можливо виразити одну змінну через іншу. Універсальним способом знаходження точок умовного екстремуму, який не потребує зведення задачі до випадку функції однієї змінної, є *метод множників Лагранжа*. Суть методу така.

Конструюємо функцію Лагранжа:

$$L=\left(x,y,\lambda\right)=f\left(x,y\right)+\lambda\varphi\left(x,y\right),$$

де λ — деякий параметр (*множник Лагранжа*), поки що невідомий.

Необхідна умова точки умовного екстремуму. Точки умовного екстремуму функції $f(x, y)$ можуть бути лише в стаціонарних точках функції Лагранжа. Отже, шукаємо потенційні точки умовних екстремумів функції $f(x, y)$ із системи:

$$\begin{cases} L_x{}'\left(x,y,\lambda\right)=0,\\ L_y{}'\left(x,y,\lambda\right)=0,\\ L_\lambda{}'\left(x,y,\lambda\right)=0. \end{cases}$$

Останнє рівняння цієї системи є рівнянням зв'язку.

Достатня умова існування умовного екстремуму. Нехай (x_0, y_0, λ_0) — розв'язок системи (*стаціонарна точка*). Тоді, якщо функції f і φ двічі неперервно диференційовані в околі стаціонарної точки (x_0, y_0), що відповідає параметру λ_0, функція $L=\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)+\lambda_0\varphi\left(x,y\right)$ і $d^2L\left(x_0,y_0\right)>0\left(d^2L\left(x_0,y_0\right)<0\right)$, то (x_0, y_0) — є точкою умовного мінімуму (максимуму) функції $f(x, y)$. При цьому залежність між dx і dy визначається із рівності $d\varphi(x_0, y_0) = 0$.

Приклад 7.1.11. Методом множників Лагранжа дослідити на екстремум функцію $f(x, y) = xy$ у точках прямої $2x + 3y - 1 = 0$.

►Маємо рівняння зв'язку $2x + 3y - 1 = 0$. Отже, $\varphi(x, y) = 2x + 3y - 1$. Утворюємо функцію Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 1)$ та записуємо систему для знаходження стаціонарних точок: $\begin{cases} L'_x = y+2\lambda=0,\\ L'_y = x+3\lambda=0,\\ 2x+3y-1=0, \end{cases}$ розв'язавши яку, маємо єдину стаціонарну точку $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$, $\lambda = 2$.

Перевіряємо достатню умову. При $\lambda = 2$ функція Лагранжа запишеться так: $L(x, y) = xy + 2(2x + 3y - 1)$. Знаходимо $d^2L\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$. Для цього обчислимо частинні похідні другого порядку функції Лагранжа в точці $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$. Маємо: $L''_{x^2}(x, y)=0$, $L''_{y^2}(x, y)=0$, $L''_{xy}(x, y)=1$. Отже,

$$d^2L\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)=L''_{x^2}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)dx^2+2L''_{xy}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)dxdy+L''_{y^2}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)dy^2=2dxdy.$$

Із такого запису диференціала не можемо зробити висновок про його знак. Тому знайдемо залежність між dx і dy. Для цього диференціюємо рівняння зв'язку: $d(2x + 3y - 1) = d0 \Leftrightarrow 2dx + 3dy = 0$. Звідси: $dy=-\frac{2}{3}dx$, яке підставимо у вираз для диференціала другого порядку і матимемо:

$$d^2L\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)=2dx\cdot\left(-\frac{2}{3}dx\right)=-\frac{4}{3}(dx)^2<0.$$

Отже, $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$ — точка умовного максимуму функції, і цей умовний максимум дорівнює: $f\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$.◄

7.1.6. Задачі на найменше та найбільше значення

Якщо функція задана і неперервна на компакті (тобто на відрізку, якщо це функція однієї змінної або у зв'язній обмеженій замкненій області, якщо це функція двох змінних), то вона набуває на ньому своїх найменшого та найбільшого значень.

Щоб знайти ці значення, треба:

1) знайти всі критичні точки функції всередині області задання;
2) обчислити значення функції в цих критичних точках;
3) обчислити значення функції на кінцях відрізка (якщо функція однієї змінної) або знайти найменше та найбільше значення функції на межі області (якщо це функція двох змінних);
4) із усіх знайдених у пунктах 2 та 3 значень функції вибрати найменше та найбільше.

Приклад 7.1.12. Знайти найменше та найбільше значення функції $z=x^2+2xy-3y^2+y$ в області $\overline{D}=\left\{(x;\,y)\in R^2:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1\right\}$.

►Область $\overline{D}$ являє собою прямокутний трикутник, обмежений додатними півосями координат і прямою $x + y = 1$ (*рис. 7.1.1*). Критичні (усі вони стаціонарні) точки функції шукаємо із системи: $\begin{cases} z'_x=2x+2y=0, \\ z'_y=2x-6y+1=0. \end{cases}$ Система має єдиний розв'язок $\left(-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right)$. Однак ця точка області $\overline{D}$ не належить, тож нема потреби обчислювати значення функції в ній.

Досліджуємо функцію на межі області. Оскільки межа — трикутник і одним рівнянням не задається, то розіб'ємо її на три ділянки (сторони трикутника) і знаходитимемо найменше та найбільше значення функції на кожній із них.

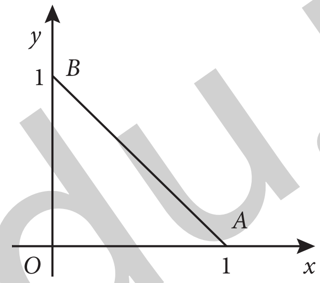


Рис. 7.1.1

1. Беремо сторону OA, $A(1;0)$. Ця ділянка задана рівнянням $y = 0$, $x \in [0;\,1]$. З урахуванням цього, функція запишеться рівнянням $z=x^2$. Очевидно, що ця функція на відрізку $[0;\,1]$ строго зростає, тому найменшого свого значення набуває в точці $x = 0$, тобто в початку координат, а найбільшого — при $x = 1$, тобто в точці A. Знайдемо ці значення: $z\,(0;\,0)= 0$, $z\,(1;\,0)= 1$.

2. Розглянемо сторону OB, де $B(0;1)$. Рівняння цієї сторони $x = 0$, $y \in [0;\,1]$. Ураховуючи це, маємо рівняння $z = -3y^2 + y$. Дослідимо цю функцію однієї змінної. Маємо: $z'=-6y+1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{6}$. Стаціонарна точка $\left(0;\frac{1}{6}\right)$, а значення функції в ній $z\left(0;\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$. Знайдемо ще значення функції у вершині B: $z(0;\,1) = -2$.

3. І, нарешті, дослідимо функцію на ділянці AB, заданій рівнянням $y = 1 - x$, $x \in [0;\,1]$. Підставимо $y = 1 - x$ у вираз для функції z і дістанемо: $z = -4x^2 + 7x - 2$. Тоді $z' = -8x + 7 = 0$. Звідки $x=\frac{7}{8}$, а $y=1-x=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$. Значення функції у знайденій стаціонарній точці $z\left(\frac{7}{8};\frac{1}{8}\right)=\frac{17}{16}$.

Обираючи із п'яти знайдених значень функції найменше і найбільше, записуємо: $z_{\min} = z(0; 1) = -2$, $z_{\max} = z\left(\frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16}$.◄

Приклад 7.1.13. На колі $x^2 + y^2 = 10$ знайти точку, сума квадратів відстаней якої до точок $A(3; 5)$ та $B(6; -2)$ була б найменшою.

►Це задача на умовний екстремум. Нехай $(x; y)$ — шукана точка кола. Тоді потрібно знайти найменше значення функції $f(x; y) = (x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 2(x^2 + y^2 - 9x - 3y + 27)$ при умові $x^2 + y^2 = 10$ (рівняння зв'язку).

Утворюємо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 2(x^2 + y^2 - 9x - 3y + 27) + \lambda(x^2 + y^2 - 10).$$

Стаціонарні точки шукаємо із системи:

$$\begin{cases} L'_x = 4x - 18 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 4y - 6 + 2\lambda x = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 10 = 0. \end{cases}$$

Система має два розв'язки: а) (3; 1) при $\lambda = 4$; б) (–3; –1) при $\lambda = -8$:

а) $L(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 9x - 3y + 27) + 4(x^2 + y^2 - 10)$; $L''_{x^2} = 12$, $L''_{y^2} = 12$, $L''_{xy} = 0$. Отже, $d^2L(3; 1) = 12dx^2 + 12dy^2 > 0$, із чого випливає, що (3; 1) — точка умовного мінімуму функції, тобто шукана точка;

б) $L(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 9x - 3y + 27) - 8(x^2 + y^2 - 10)$; $L''_{x^2} = -12$, $L''_{y^2} = -12$, $L''_{xy} = 0$. Отже, $d^2L(3; 1) = -12dx^2 - 12dy^2 < 0$ і точка (–3; –1) є точкою умовного максимуму. Тому вона нашу задачу не задовольняє.◄

7.2. Завдання для самостійної роботи

Похідна, її геометричний та механічний зміст

1. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої:
   а) $\operatorname{arctg} xy = 2x - y + 3$ у точці (0; 3);
   б) $x^5 - 2xy + 3y^3 + 5x + 14 = 0$ у точці (1; –2);
   в) $x^3 + y^3 - 5xy = 1$ у точках її перетину з осями координат.
2. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхонь:
   а) $e^{xyz} + \sqrt{x^2 + y^2} - z^3 = 6$ у точці (4; 3; 0);
   б) $z = \arcsin xy$ у точці (1; 0; 0).
3. Знайти дотичну площину до поверхні $z = x^3 + y^3$, яка перпендикулярна до прямої $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{12} = \frac{z+2}{-1}$.
4. Точка рухається по кубічній параболі $12y = x^3$. Яка із її координат змінюється швидше?
5. На колі $x^2 + y^2 = 25$ знайти точки, у яких дотична до кола паралельна прямій $3x + 4y - 12 = 0$. Скласти рівняння дотичних. Побудувати коло, пряму та дотичні.

Диференційовність функції. Голоморфні функції

1. Використовуючи правила знаходження похідних, продиференціювати функції:

   1) $y = \sqrt{16 - x^5} + \frac{7}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \operatorname{tg} x \cdot \ln(x + \sin x)$;

   3) $y = \frac{\sin(x^2 + 2)}{\ln x^3}$; 4) $y = \frac{\sin^3 x}{\ln \operatorname{tg} x^3}$; 5) $y = \sqrt[3]{21 + x^5} - \ln x$;

6) $y=\sqrt{\operatorname{tg}x+2}-5x$; 7) $y=\ln(\sin 4x)$;

8) $y=\sqrt[4]{2x+x^5}-6$; 9) $y=2^{\ln x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$; 10) $y=\arcsin^3 4x^2$.

2. Знайти похідну показниково-степеневої функції:

1) $y=(\sin\sqrt{x})^{\operatorname{arctg}x}$; 2) $y=(x+x^2)^x$; 3) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

4) $y=(\sin\sqrt{x})^{\arcsin x}$; 5) $y=(\cos x)^{\ln x}$;

6) $y=(\cos\sqrt{2x})^{\operatorname{arctg}x}$; 7) $y=x^{\sqrt{\cos x}}$; 8) $y=(2x+x^2)^{\sqrt{x}}$;

9) $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$; 10) $y=x^{\operatorname{arctg}x}$.

3. Знайти похідну функції однієї змінної, заданої неявно:

1) $yx^2+y\ln xy=1$; 2) $\sqrt{xy}+x\sqrt{y}=5y^2$;

3) $7^x+15^y=3^{x+y}$; 4) $e^{xy}+y\cos x=5y$;

5) $\sin xy=x^2y^3+2x-y$; 6) $x^2-2y+3\sin xy=1$;

7) $x^2y+e^{xy}+y\cos x=5$; 8) $xy^2+x\ln y=0$;

9) $\sin(x^2+y)=\dfrac{x}{y^2}$; 10) $x^3+y^2+x\ln y=0$.

4. Знайти повний диференціал функцій двох змінних:

1) $z=x^2y^4-x^3y^3$; 2) $z=\sin(x^2y)-xy^3$; 3) $z=e^xy^3$;

4) $z=2\ln(x^2+y^2)$; 5) $z=\sin x^3y$; 6) $z=\cos(x^3-y^3)$;

7) $z=e^{xy}+\cos xy$; 8) $z=\sqrt{xy-2x}$; 9) $z=(x+2y)^3$;

10) $z=\arcsin x^3y+y^2$.

5. Знайти диференціали другого порядку функцій:

1) $z=\sqrt{2xy}$; 2) $z=\cos(x^2+y^2)$; 3) $z=x^6y-xy^3+e^{xy}$;

4) $z=3x^2y^3+5x^2-2y$; 5) $z=e^{x^2+y^2}$; 6) $z=\ln(3x^2-y^4)$;

7) $z=\operatorname{arctg}(x+y)$; 8) $z=\ln(xy-4)$; 9) $z=\sin\sqrt{xy}$;

10) $z=ctg\dfrac{x}{y}$.

6. Дослідити на голоморфність функції (*теоретичний матеріал див.: частина І, розділ 2, п. 2.3.5*):

1) $f(z)=1+i2y$; 2) $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$;

3) $f(z)=(\operatorname{Re}z)^2$; 4) $f(z)=x^2+i2xy$;

5) $f(z)=\operatorname{Im}(z^2)$; 6) $f(z)=\operatorname{Re}(z^2)$; 7) $f(z)=(\operatorname{Im}z)^2$;

8) $f(z)=x-i2y$; 9) $f(z)=z+\overline{z}$;

10) $f(z)=e^{2x}\cos 2y+ie^{2x}\sin 2y$.

7. Знайти голоморфну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частиною $v(x,y)$ (*теоретичний матеріал див.: частина І, розділ 2, п. 2.3.5*):

1) $v(x,y)=2xy$; 2) $v(x,y)=x^3-3xy^2$;

3) $u(x,y)=-2xy$; 4) $v(x,y)=e^x\sin y$;

5) $u(x,y)=-y$; 6) $u(x,y)=e^{2x}\cos 2y$;

7) $v(x,y)=y$; 8) $u(x,y)=-e^{3x}\sin 3y$.

8. Знайти нулі функцій $f(z)$ та визначити їх порядок (*теоретичний матеріал див.: частина I, розділ 2, п. 2.3.5*):

   1) $f(z)=z(z-1)^2$; 2) $f(z)=z^4e^{z^2}$; 3) $f(z)=z\sin(z-1)$;

   4) $f(z)=(z-1)^2\cos(z-1)$; 5) $f(z)=z+z(z-1)^2$;

   6) $f(z)=\sin z\cdot\cos 2z$; 7) $f(z)=z^3\cos z$;

   8) $f(z)=z^5\sin(z^2)$.

Застосування диференціала до наближених обчислень

1. Обчислити наближено значення виразів:

   1) $\frac{1}{2}\left(0,98+\sqrt{5-0,98^2}\right)$; 2) $\arcsin 0,498$; 3) $\ln 0,96$;

   4) $\sqrt[4]{80}$; 5) $\sin 45°28'$; 6) $\cos 62°$; 7) $\lg 101$; 8) $\frac{1}{0,9937}$;

   9) $\sqrt{1,08}$; 10) $\mathrm{tg}\, 61°$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2\cdot(1,78)^2+1}}$; 12) $1,02^{3,04}$;

   13) $\ln(0,09^2+0,99^2)$; 14) $\sqrt[3]{3,02^2-0,98}$.

Застосування похідної до обчислення границь

1. Використовуючи правила Лопіталя, знайти границі функції однієї змінної:

   1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\mathrm{tg}x}$;

   4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\mathrm{arctg}4x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 4x}$;

   7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^x}{x+e^x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\sin x}-x}{\sin x-x}$.

Застосування диференціального числення до дослідження функції

1. Дослідити функцію на монотонність та знайти точки екстремуму, якщо вони існують:

   1) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 2) $y=\frac{x^2+1}{x}$; 3) $y=\frac{x^2-3x+20}{x-4}$; 4) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$;

   5) $y=\frac{x^3+1}{x^2}$; 6) $y=\frac{x}{3-x^2}$; 7) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$; 8) $y=\frac{x^2-3x+20}{x-4}$.

2. Дослідити функцію на опуклість та знайти точки перегину, якщо вони існують:

   1) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 2) $y=\frac{x^2+1}{x}$; 3) $y=\frac{x^2-3x+20}{x-4}$; 4) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$;

   5) $y=\frac{x^3+1}{x^2}$; 6) $y=\frac{x}{3-x^2}$; 7) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$; 8) $y=\frac{x^2-3x+20}{x-4}$.

3. Дослідити функцію двох змінних на локальний екстремум:

   1) $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$; 2) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$;

   3) $z=(x-5)^2+y^2+1$; 4) $z=y\sqrt{x}-2xy^2-x+14y$;

   5) $z=4(x-y)x^2-y^2$; 6) $z=x^3+8y^3-6xy+5$;

   7) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$; 8) $z=x^3y^2(1-x-y)$.

4. Методом множників Лагранжа дослідити на умовний екстремум функцію:

   1) $f(x,y)=x^2+2y^2+1$, $x-y=5$;

   2) $f(x,y)=x^2+2y^2-3xy+1$, $5x-2y+1=0$;

   3) $f(x,y)=2x+3y-1$, $y=x^2$;

   4) $f(x,y)=2x^2+y^2$, $x-2y-1=0$;

   5) $f(x,y)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}$, $x+y=2$;

   6) $f(x,y)=x^2+y^2$, $2x-y-1=0$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = x^3 \cdot e^{-3x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;

4) $y = \ln(x^2 - 1)$; 5) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$; 6) $y = x - \ln(x+1)$;

7) $y = \dfrac{2}{x^2+2x}$; 8) $y = 2^{x(x-2)}$; 9) $y = \dfrac{e^x}{1+x}$; 10) $y = 2 - \sqrt[3]{x-1}$.

Задачі на найменше та найбільше значення

1. Необхідно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом V. Які мають бути розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?
2. Із квадратного листа жерсті зі стороною a необхідно виготовити відкриту зверху коробку, вирізавши по кутах квадратики та загнувши утворені краї. Яка має бути сторона коробки, щоб її об'єм був найбільший?
3. На сторінці текст повинен займати 384 кв. см. Верхнє та нижнє поля повинні бути по 3 см, праве та ліве — по 2 см. Якщо брати до уваги тільки економію паперу, то які мають бути найвигідніші розміри сторінки?
4. Вартість алмазу пропорційна квадрату його маси. Обробляючи алмаз, його розкололи на дві частини. Яка маса цих частин, якщо при цьому відбулася максимальна втрата вартості алмазу?
5. Відвідувач музею розглядає картину, нижній край якої розміщено на 75 см, а верхній — на 3 м вище рівня його очей. На якій відстані від стіни має стати спостерігач, щоб побачити картину під найбільшим кутом?
6. На площині xOy знайти таку точку $M(x; y)$, щоб сума квадратів відстаней її до трьох прямих $x = 0$, $y = 0$ і $x - y + 1 = 0$ була найменшою.

Розділ 8. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

8.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

8.1.1. Невизначений та визначений інтеграли функції дійсної змінної

А. Невизначений інтеграл, властивості, основні методи інтегрування

Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ $\left(\int f(x)dx\right)$ на проміжку X називають множину всіх первісних функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто таких функцій, похідні яких дорівнюють $f(x)$.

Отже, $\int f(x)dx = F(x) + C,\ x \in X$, де $F(x)$ — будь-яка первісна для функції $f(x)$ на проміжку X, C довільна стала.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C,\ \int df(x) = f(x) + C$.

Властивості 1–2 випливають із означення інтеграла й відображають той факт, що операції інтегрування (знаходження первісної чи невизначеного інтеграла) та диференціювання (знаходження похідної чи диференціала) є взаємнообереними.

3. $\int\left[k_1 f_1(x)+\ldots+k_n f_n(x)\right]dx = k_1\int f_1(x)dx+\ldots+k_n\int f_n(x)dx$, якщо існують усі інтеграли $\int f_i(x)dx,\ i=\overline{1,n}$, k_i — сталі (лінійність).

4. $\int f(x(t))x'(t)dt = F(x(t))+C$, якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$ на проміжку X, $x(t)$ — диференційовна на деякому проміжку T і $x(t)\in X$. Ця властивість стверджує інваріантність форми первісної. Кажучи схематично, кожна формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці у неї замість незалежної змінної будь-якої диференційовної функції, тобто якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то й $\int f(u)du = F(u)+C$ (чи $\int f(x)dx = F\big(\varphi(t)\big)+C$), де $u=\varphi(x)$ (чи $x=\varphi(t)$) — диференційовна функція.

Таблиця 8.1.1

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

$\int 0\cdot dx = C$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
$\int x^p dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}+C, p\neq -1$	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$
$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C, \int e^x dx=e^x+C$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert+C$
$\int\sin x\cdot dx=-\cos x+C,$ $\int\cos x\cdot dx=\sin x+C$	$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=$ $=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$, $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$	$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=$ $=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert+C$

Основні методи інтегрування

1. *Метод розкладу* ґрунтується на властивості лінійності інтеграла. Цей метод досягає мети, якщо інтеграли $\int f_i\left(x\right)dx$, $i=\overline{1,n}$, є табличними, або такими, спосіб обчислення яких нам відомий.

2. *Метод заміни змінної (підстановки)* використовує інваріантність форми первісної $\int f(x(t))x'(t)dt=\int f(x)dx = F(x(t))+C$, де $F(x)$ — первісна для $f(x)$.

Є два варіанти заміни змінної.

Перший із них полягає в тому, що незалежну змінну (змінну інтегрування) x заміняють за формулою $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ — неперервно диференційовна функція, яка має обернену $t=\varphi^{-1}(x)$. Тоді шуканий інтеграл запишеться так:

$$\int f\left(x\right)dx=\int f\big(\varphi(t)\big)d\big(\varphi(t)\big)=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt=\int g(t)dt=G(t)+C,$$

де $G(t)$ — первісна для $g(t)$. Щоб повернутися до змінної x, треба замість t підставити його значення $t=\varphi^{-1}\left(x\right)$, знайдене із рівняння заміни. Остаточно матимемо: $\int f\left(x\right)dx=G\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)+C$.

Очевидно, така заміна доцільна, якщо отриманий (новий) інтеграл є табличним або метод його обчислення відомий.

Другий варіант заміни змінної передбачає позначення новою змінною деякого виразу, тобто вважаємо $u=\psi(x)$. Ця заміна (підстановка) відрізняється від попередньої тим, що якщо у попередній незалежну змінну x заміняли функцією $\varphi(t)$, то тепер не сама незалежна змінна, а деяка її функція $\psi(x)$ заміняється новою змінною u. У результаті такої заміни підінтегральний вираз перетвориться в інший: $f(x)dx = g(u)du$. Заміна має смисл, якщо інтеграл $\int g(u)du$ табличний або спосіб його обчислення відомий. Найчастіше новою змінною інтегрування *u* обирають функцію, похідна якої є множником у підінтегральному виразі, і добуток цієї похідної на диференціал незалежної змінної записують у вигляді диференціала нової змінної. Тоді шуканий інтеграл $\int f(x)dx$ набуває потрібного вигляду $\int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int g(\psi(x))d\psi(x) = \int g(u)du$. Наприклад, для обчислення інтеграла $\int \frac{\ln x}{x}dx$ доцільно покласти $u = \ln x$, бо $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, $\frac{dx}{x} = d\ln x = du$.

Тоді $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d\ln x = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

Зазначимо, що при виконанні заміни за другим варіантом не завжди є потреба записувати у явному вигляді підстановку $u = \psi(x)$ і переходити в інтегралі до змінної *u*, важливо (і достатньо) цю заміну бачити. Наприклад, перетворивши інтеграл $\int \frac{\ln x}{x}dx$ до вигляду $\int \ln x d\ln x$, бачимо, що роль нової змінної інтегрування тут відіграє $\ln x$, тому, не записуючи цього явно, одразу за правилом інтегрування степеня маємо остаточний результат $\frac{\ln^2 x}{2} + C$. Аналогічно:

$$\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-5x+2} = \int \frac{(x^2-5x+2)'dx}{x^2-5x+2} = \int \frac{d(x^2-5x+2)}{x^2-5x+2} = .$$
$$= \ln\left|x^2-5x+2\right| + C.$$

Такий, «прихований», спосіб заміни називають ще внесенням певного виразу під знак диференціала (у наведених вище прикладах під знак диференціала внесли вирази $\frac{1}{x}$ та $2x - 5$ відповідно).

Виконуючи заміну за другим варіантом, легко встановити, що якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$. Цю формулу зазвичай використовують одразу, не виконуючи самої заміни. Наприклад, $\int \frac{dx}{\cos^2(2-5x)} = -\frac{1}{5}\operatorname{tg}(2-5x) + C$.

3. *Інтегрування частинами:* якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на проміжку X і на цьому проміжку існує первісна для функції $u'(x)v(x)$, то $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$, або скорочено: $\int udv = uv - \int vdu$.

Очевидно, що застосовувати формулу інтегрування частинами доцільно тоді, коли інтеграл у правій її частині простіший за шуканий інтеграл лівої частини. Є кілька стандартних випадків застосування методу інтегрування частинами. До них належать наступні.

I. Інтеграли $\int P(x)a^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\beta x dx$, $\int P(x)\cos\beta x dx$, де $P(x)$ — многочлен *n*-го степеня, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Для їх обчислення слід покласти $u = P(x)$. Після *n*-кратного застосування формули інтегрування частинами ці інтеграли зводяться до таких: $\int a^{\alpha x}dx$, $\int \sin\beta x dx$, $\int \cos\beta x dx$.

Приклад 8.1.1. Обчислити інтеграл:

1) $\int(7x-1)e^{2x}dx$; 2) $\int x^2\cos xdx$.

$$\blacktriangleright 1.\ \int(7x-1)e^{2x}dx=\left|\begin{array}{c} u=7x-1\Rightarrow du=7dx; \\ dv=e^{2x}dx; \\ v=\frac{1}{2}e^{2x}. \end{array}\right|=$$

$$=(7x-1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 7dx=\frac{1}{2}(7x-1)e^{2x}-\frac{7}{4}e^{2x}+C.$$

$$2.\ \int x^2\cos xdx=\left|\begin{array}{c} u=x^2\Rightarrow du=2xdx; \\ dv=\cos xdx; \\ v=\sin x. \end{array}\right|=x^2\sin x-2\int x\sin xdx=$$

$$=x^2\sin x-\left|\begin{array}{c} u=x\Rightarrow du=dx; \\ dv=\sin xdx; \\ v=-\cos x. \end{array}\right|-2\left(-x\cos x+\int\cos xdx\right)=$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.\blacktriangleleft$$

Примітка. Інтегруючи частинами, дуже важливо вдало обрати функцію u, інакше результату можна й не отримати. Наприклад, якщо в першому інтегралі позначити: $u=e^{2x}, dv=(7x-1)dx$, то $du=2e^{2x}dx,\ \ v=\frac{7}{2}x^2-x$ й інтегрування результативним не буде, навпаки, інтеграл тільки ускладниться:

$$\int(7x-1)e^{2x}dx=e^{2x}\left(\frac{7}{2}x^2-x\right)-2\int\left(\frac{7}{2}x^2-x\right)e^{2x}dx.$$

II. Інтеграли $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$. До цих інтегралів формула інтегрування частинами застосовується послідовно двічі, причому обидва рази через u слід позначити одну й ту ж функцію, показникову або тригонометричну; після двократного інтегрування частинами приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння відносно шуканого інтеграла.

Приклад 8.1.2. Обчислити інтеграл $\int e^{3x}\sin xdx$.

$$\blacktriangleright I=\int e^{3x}\sin xdx=\left|\begin{array}{c} u=e^{3x}\Rightarrow du=3e^{3x}dx; \\ dv=\sin xdx; \\ v=-\cos x \end{array}\right|=$$

$$=-e^{3x}\cos x+3\int e^{3x}\cos xdx=\left|\begin{array}{c} u=e^{3x}\Rightarrow du=3e^{3x}dx; \\ dv=\cos xdx; \\ v=\sin x \end{array}\right|=$$

$$=-e^{3x}\cos x+3\left(e^{3x}\sin x-3\int e^{3x}\sin xdx\right)=e^{3x}(3\sin x-\cos x)-9I+10C.$$

Звідси маємо:

$$I=e^{3x}(3\sin x-\cos x)-9I,\ I=\frac{1}{10}e^{3x}(3\sin x-\cos x)+C.$$

Або, беручи в якості u тригонометричну функцію:

$$I=\int e^{3x}\sin xdx=\left|\begin{array}{c} u=\sin x\Rightarrow du=\cos xdx; \\ dv=e^{3x}dx; \\ v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right|=\frac{1}{3}e^{3x}\sin x-\frac{1}{3}\int e^{3x}\cos xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} u=\cos x\Rightarrow du=-\sin xdx; \\ dv=e^{3x}dx; \\ v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right|=\frac{1}{3}e^{3x}\sin x-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\cos x+\frac{1}{3}\int e^{3x}\sin xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{9}e^{3x}\left(3\sin x-\cos x\right)-\frac{1}{9}I+\frac{10}{9}C, \text{ звідки маємо:}$$

$$I=\frac{1}{9}e^{3x}\left(3\sin x-\cos x\right)-\frac{1}{9}I+\frac{10}{9}C,\ I=\frac{1}{10}e^{3x}\left(3\sin x-\cos x\right)+C.◄$$

Примітка. Зазначимо, що значення $10C$ (чи $\frac{10}{9}C$), взяте нами в якості довільної сталої, дозволяє отримати «красиву» довільну сталу (а саме — C) у кінцевому результаті. Звичайно ж, зовсім не обов'язково спеціально підбирати «зручне» значення довільної сталої.

III. Інтеграли $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}x dx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, де $P(x)$ — многочлен, беруться частинами, якщо через u позначити трансцендентну функцію, яка є множником при многочленові.

Приклад 8.1.3. Обчислити інтеграл $\int x\mathrm{arctg}x dx$.

$$►\int x\,arctgx\,dx=\left|\begin{array}{c} u=arctgx\Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2};\\ dv=xdx;\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}arctgx+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right)arctgx-x\right)+C.◄$$

Примітка. Крім трьох наведених вище (типових) класів інтегралів, частинами беруться й інші інтеграли, наприклад: $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$.

Б. Інтегрування раціональних функцій

Раціональні функції поділяються на цілі раціональні, або многочлени, і дробово-раціональні, що являють собою частку двох многочленів, якщо дільник не є многочленом нульового степеня (тобто числом).

1. *Інтегрування цілих раціональних функцій* цілком ґрунтується на властивості лінійності інтеграла і методом розкладу зводиться до лінійної комбінації табличних інтегралів від степеневих функцій:

$$\int\left(\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right)dx=\sum_{k=0}^{n}\int a_kx^kdx=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{x^{k+1}}{k+1}+C.$$

Наприклад, $\int\left(5x^2-3x+7\right)dx=\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+7x+C$.

2. Що ж до дробових раціональних виразів, то у випадку неправильного дробу потрібно виділити з нього цілу частину і звести таким чином задачу до інтегрування правильного раціонального дробу. А правильний раціональний дріб у свою чергу зводиться до інтегрування так званих елементарних (або простих) дробів, яких є лише чотири типи:

I	II	III	IV
$\dfrac{A}{x-a}$	$\dfrac{A}{(x-a)^n}$	$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$	$\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$

де A, M, N, a, p, q — дійсні числа; $n\in N, n>1$; $D=p^2-4q<0$, тобто квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних нулів.

Інтеграли елементарних дробів I та II типів є майже табличними інтегралами і дорівнюють відповідно:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln\left|x-a\right|+C;$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int(x-a)^{-n}dx = \frac{A(x-a)^{1-n}}{1-n}+C.$$

Щоб обчислити інтеграл елементарного дробу III типу розбиваємо його на два інтеграли, один із яких є логарифмом, а другий арктангенсом. Наведемо у загальному вигляді процес інтегрування дробу III типу:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)-p+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}dx =$$

$$=\frac{M}{2}\left(\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\int\frac{\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}dx\right)=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}=\left|\text{де } a^2=q-\frac{p^2}{4}>0\right|=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

Зазначимо, що отриманий результат (формулу) нема потреби запам'ятовувати; просто потрібно у кожному конкретному випадку виконати аналогічні до наведених перетворення.

Інтеграл від елементарного дробу IV типу таким самим перетвореннями, як і у попередньому випадку, розбиваємо на два доданки. Один із них зводиться до табличного інтеграла $\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, а другий — містить інтеграл виду $I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$, де $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. Останній інтеграл обчислюють за рекурентною формулою:

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right),$$

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

3. І насамкінець *розкладаємо правильний дріб на елементарні дроби.*

Нехай маємо правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, у якого знаменник максимально розкладений на множники, тобто:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}\ldots\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{\beta_l},$$

де $\alpha_1+\ldots+\alpha_k+2(\beta_1+\ldots+\beta_l)=n$ — степінь многочлена $Q(x)$. Тоді $\frac{P(x)}{Q(x)}$ єдиним способом записується у вигляді суми елементарних дробів, причому кожному множнику $(x-a)^r$, $r\in\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$, з розкладу знаменника відповідають r доданків: $\frac{A_1}{x-a}$, … , $\frac{A_r}{(x-a)^r}$, а кожному множнику $\left(x^2+px+q\right)^s$, $s\in\{\beta_1,\ldots,\beta_l\}$, — s доданків: $\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}$, … , $\frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s}$, де всі A_i, M_j, N_j —

невідомі (поки що) коефіцієнти, які знаходимо методом невизначених коефіцієнтів або методом часткових значень. Суть цих методів, алгоритм розкладу правильного раціонального дробу на елементарні та увесь процес інтегрування раціональних функцій проілюструємо на прикладах.

Приклад 8.1.4. Обчислити інтеграл:

1) $\int \frac{2x^3+x^2+x+2}{x(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$; 2) $\int \frac{x^5-5x^3+6x+1}{x^4-5x^2+4}dx$;

3) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

►1. Підінтегральна функція — правильний раціональний дріб, знаменник якого максимально розкладений на множники. Відповідно до описаного вище алгоритму даний дріб дорівнює сумі чотирьох елементарних дробів (один відповідає множнику x, два — множникові $(x-1)^2$ і один — квадратному тричленові). Тобто маємо:

$$\frac{2x^3+x^2+x+2}{x(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти т. зв. методом невизначених коефіцієнтів. Виконаємо додавання у правій частині записаної рівності:

$$\frac{2x^3+x^2+x+2}{x(x-1)^2(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{A(x-1)^2(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+Cx(x^2+x+1)+(Dx+E)x(x-1)^2}{x(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Якщо два дроби з однаковими знаменниками рівні між собою, то рівні їх чисельники. Отже, можемо записати наступне співвідношення:

$$A(x-1)^2(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+Cx(x^2+x+1)+$$
$$+(Dx+E)x(x-1)^2=2x^3+x^2+x+2.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних доданків дістанемо:

$$(A+B+D)x^4+(-A+C-2D+E)x^3+(C+D-2E)x^2+$$
$$+(-A-B+C+E)x+A=2x^3+x^2+x+2.$$

Тепер маємо тотожну рівність двох многочленів. Вона можлива тоді й тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях змінної у лівій і правій частинах однакові, тобто дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & \left\{\begin{array}{l} A+B+D=0, \\ -A+C-2D+E=2, \\ C+D-2E=1, \\ -A-B+C+E=1, \\ A=2, \end{array}\right. \\ x^3 & \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

із якої знаходимо: $A=2,\ B=-1,\ C=2,\ D=-1,\ E=0$.

Тепер можемо остаточно записати розклад дробу на елементарні:

$$\frac{2x^3+x^2+x+2}{x(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{x}{x^2+x+1}.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{2x^3+x^2+x+2}{x(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{x}{x^2+x+1}\right)dx=$$

$$=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\int\frac{x}{x^2+x+1}dx=2\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}dx=2\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=2\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\ln\frac{x^2}{|x-1|\left(x^2+x+1\right)}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2. Дріб $\frac{x^5-5x^3+6x+1}{x^4-5x^2+4}$ неправильний. Діленням чисельника на знаменник виділяємо з нього цілу частину:

$$\frac{x^5-5x^3+6x+1}{x^4-5x^2+4}=x+\frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}.$$

Розкладемо одержаний правильний дріб $\frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}$ на елементарні дроби. На відміну від попереднього прикладу знаменник дробу не розкладений на множники. Однак це неважко зробити:

$$x^4-5x^2+4=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

Тепер можемо записати:

$$\frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}=\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x+1)(x-2)(x+2)+B(x-1)(x-2)(x+2)+C(x-1)(x+1)(x+2)+D(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}.$$

Прирівнюючи чисельники першого (чи другого) і останнього дробів, приходимо до тотожності:

$$A(x+1)(x-2)(x+2)+B(x-1)(x-2)(x+2)+C(x-1)(x+1)(x+2)+$$
$$+D(x-1)(x+1)(x-2)=2x+1.$$

Щоб визначити звідси невідомі коефіцієнти A, B, C, D, застосуємо так званий метод часткових значень, суть якого у наступному. Оскільки тотожність виконується ***при всіх*** значеннях змінної x, то підставимо в неї зручні нам значення. Неважко здогадатися, що такими «зручними» значеннями є $x=\pm1$ та $x=\pm2$, бо кожне із них перетворює в нуль усі, крім одного, доданки лівої частини рівності. Отже, маємо:

$$x=1\Rightarrow -6A=3\Rightarrow A=-\frac{1}{2};\quad x=-1\Rightarrow 6B=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{6};$$

$$x=2\Rightarrow 12C=5\Rightarrow C=\frac{5}{12};\quad x=-2\Rightarrow -12D=-3\Rightarrow D=\frac{1}{4}.$$

Повертаючись до нашого розкладу, записуємо:

$$\frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}=$$
$$=-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{5}{12(x-2)}+\frac{1}{4(x+2)}.$$

Тепер:

$$\int\frac{x^5-5x^3+6x+1}{x^4-5x^2+4}dx=\int\left(x+\frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}\right)dx=$$

$$=\int\left(x-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{5}{12(x-2)}+\frac{1}{4(x+2)}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{5}{12}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+C.$$

3. Під знаком інтеграла елементарний дріб IV типу. Позначимо шуканий інтеграл $I_3 = \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$ і застосуємо до нього рекурентну формулу. Маємо:

$$I_3 = \frac{1}{2(3-1)} \cdot \left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{3-1}} + (2\cdot 3 - 3) I_2 \right) = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3}{4} I_2 .$$

Застосуємо ще раз рекурентну формулу, тепер уже до $I_2 = \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$:

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)} \cdot \left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{2-1}} + (2\cdot 2 - 3) I_1 \right) = \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} I_1 .$$

Підставимо знайдений інтеграл I_2 у вираз для I_3:

$$I_3 = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} I_1 \right) =$$

$$= \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3x}{8\left(1+x^2\right)} + \frac{3}{8} I_1 .$$

Враховуючи, що $I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \tilde{C}$, остаточно маємо:

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3x}{8\left(1+x^2\right)} + \frac{3}{8}\left(\operatorname{arctg} x + \tilde{C}\right) =$$

$$= \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3x}{8\left(1+x^2\right)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C. ◂$$

В. Інтегрування ірраціональних функцій

Зазначимо, що ірраціональна функція задається виразом, який містить змінну під знаком радикала або в степені з дробовим показником. На відміну від інтегрування раціональних функцій інтеграли від ірраціональних функцій не завжди беруться. Розглянемо далі ті ірраціональні функції, інтеграли від яких обчислюються в скінченному вигляді.

1. *Елементарні зведення до табличних інтегралів*

Деякі інтеграли від ірраціональних функцій є табличними. Це, зокрема, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$, $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\, dx$. До них відповідно зводяться інтеграли: $\int \frac{dx}{\sqrt{q + px - x^2}}$, де $p^2 + 4q > 0$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$; $\int \sqrt{\pm x^2 + px + q}\, dx$. Для цього під коренями потрібно виділити квадрат двочлена.

Приклад 8.1.5. Обчислити інтеграл:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 12x - 4x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 6x - 1}}$; 3) $\int \sqrt{x^2 - 4x + 5}\, dx$;

4) $\int \sqrt{2 + 15x - 9x^2}\, dx$.

▸1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-12x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(4x^2 + 12x - 1\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((2x)^2 + 2\cdot 2x \cdot 3 + 9 - 9 - 1\right)}} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((2x+3)^2 - 10\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{10 - (2x+3)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{10}} + C;$$

2. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+6x-1}}=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-\frac12}}=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+2x\cdot\frac32+\frac94\right)-\frac94-\frac12}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac32\right)^2-\frac{11}{4}}}=\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|x+\frac32+\sqrt{x^2+3x-\frac12}\right|+C;$$

3. $$\int\sqrt{x^2-4x+5}\,dx=\int\sqrt{(x-2)^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x+5}+\frac12\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C;$$

4. $$\int\sqrt{2+15x-9x^2}\,dx=\int\sqrt{-\left(9x^2-15x-2\right)}\,dx=$$

$$=\int\sqrt{-\left(3x-\frac52\right)^2+\frac{25}{4}+2}\,dx=\int\sqrt{\frac{33}{4}-\left(3x-\frac52\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac13\left(\frac{3x-\frac52}{2}\cdot\sqrt{2+15x-9x^2}+\frac{33}{4\cdot2}\arcsin\frac{3x-\frac52}{\frac{\sqrt{33}}{2}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{12}\left((6x-5)\sqrt{2+15x-9x^2}+\frac{33}{2}\arcsin\frac{6x-5}{\sqrt{33}}\right)+C.$$ ◄

Деякі ж інші інтеграли від ірраціональних функцій спеціальними замінами вдається раціоналізувати, тобто звести задачу до інтегрування раціональної функції. Розглянемо такі класи інтегралів і відповідні заміни.

2. *Інтегрування функцій виду* $R\left(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\ldots,\sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right)$, або те саме, що $R\left(x,x^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)$, де $m_i,n_i\in N, n_i>1, i=\overline{1,k}$.

Символ $R(\ldots)$ означає раціональну функцію своїх змінних. Інтеграл від такої функції раціоналізується заміною: $\sqrt[n]{x}=t$ (або те саме, що $x=t^n$), де $n=НСК\left(n_1,\ldots,n_k\right)$ — найменше спільне кратне чисел $n_1,\ldots n_k$.

Приклад 8.1.6. Раціоналізувати інтеграл $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}dx$.

►Робимо заміну: $x=t^6$. Тоді $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x^2}=t^4$.

Шуканий інтеграл запишеться так:

$$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}dx=\int\frac{\left(t^6+t^4\right)\cdot6t^5dt}{t^6\left(1+t^3\right)}=6\int\frac{t^5+t^3}{t^3+1}dt.$$

Тобто, ми звели його до інтеграла від раціонального дробу.◄

3. *Інтегрування функцій виду*

$$R\left(x,\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}},\ldots,\sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right),$$ або те саме, що

$$R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right),$$

де $m_i,n_i\in N, n_i>1, i=\overline{1,k}$, $a,b,c,d\in R$.

Інтеграл від такої функції раціоналізується заміною $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$, або те саме, що $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, де $n=НСК\left(n_1,\ldots,n_k\right)$.

Примітка. Очевидно, що при $a=d=1$, $b=c=0$ матимемо випадок 2.

Приклад 8.1.7. Раціоналізувати інтеграл $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow 1-x = t^2(1+x) \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \\ dx = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot t \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \right) dt = -4\int \frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = 4\int \frac{t^2dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}. \blacktriangleleft$$

4. *Заміни Ейлера*

Мова піде про обчислення інтеграла $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, де $R(\ldots)$ — раціональна функція своїх змінних, a, b, c — дійсні числа, $a \neq 0$.

Такий інтеграл раціоналізується однією із трьох наступних замін (підстановок), запропонованих свого часу видатним математиком Леонардом Ейлером:

1) якщо $a > 0$, то використовується заміна

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm x\sqrt{a};$$

2) якщо $c > 0$, то використовується заміна $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$ (знаки в цих двох замінах можна брати в будь-якій комбінації);

3) якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c має дійсні корені α та β ($\alpha \neq \beta$), то використовується одна із замін (будь-яка) $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$ або $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)t$.

Приклад 8.1.8. Обчислити інтеграл:

$$1) \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}; \quad 2) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

►1. Оскільки підкореневий вираз має два дійсні нулі (0 і 4), то використаємо третю підстановку Ейлера:

$$\sqrt{4x-x^2} = xt.$$

Виразимо звідси x та знайдемо dx. Маємо:

$$4x-x^2 = x^2t^2 \Rightarrow x(4-x) = x^2t^2 \Rightarrow 4-x = xt^2 \Rightarrow x(1+t^2) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{1+t^2};$$

$$dx = \left(\frac{4}{1+t^2}\right)' dt = \frac{-8tdt}{(1+t^2)^2}.$$

Шуканий інтеграл запишеться так:

$$\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{\frac{-8t}{(1+t^2)^2}dt}{\left(\frac{2\cdot 4}{1+t^2}-3\right)\cdot\frac{4t}{1+t^2}} = \int \frac{-8tdt}{(8-3-3t^2)\cdot 4t} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{3t^2-5} = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}t-\sqrt{5}}{\sqrt{3}t+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}t-\sqrt{5}}{\sqrt{3}t+\sqrt{5}}\right| + C,$$

де $t = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x}$.

2. У квадратного тричлена під знаком кореня коефіцієнти $a = 1$ та $c = 2$ додатні. Тому можна використовувати будь-яку із замін — першу чи другу.

Якщо зробити заміну $\sqrt{x^2+2x+2} = t - x$, то, після піднесення обох частин до квадрата і зведення подібних доданків, прийдемо до рівняння $2(1+t)x = t^2 - 2$, із якого знайдемо $x = \frac{t^2-2}{2(t+1)}$.

Тоді $dx=\dfrac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt$.

Крім того, $1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-\dfrac{t^2-2}{2(t+1)}=\dfrac{t^2+4t+4}{2(t+1)}$. Підставляючи обчислені окремо вирази в інтеграл, маємо:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{\left(t^2+2t+2\right)\cdot 2(t+1)}{2(t+1)^2\left(t^2+4t+4\right)}dt=\int\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+2)^2}\right)dt=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C,$$

де $t=x+\sqrt{x^2+2x+2}$.◄

Примітки

1. Заміни Ейлера зручні тим, що дозволяють змінну x виразити через змінну t із лінійного рівняння.

2. Однак зазвичай заміни Ейлера призводять до громіздких перетворень. Тому, якщо можна, їх варто уникати. Прикладом, коли таке уникнення можливе, є інтеграл виду $\int\dfrac{dx}{(x+p)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Заміна $x+p=\dfrac{1}{t}$ зводить зазначений інтеграл до інтеграла виду $\int\dfrac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}$, який у свою чергу виділенням квадрата двочлена зводиться до одного з табличних інтегралів: $\int\dfrac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$ або $\int\dfrac{dt}{\sqrt{t^2+a}}$.

Приклад 8.1.9. Обчислити інтеграл $\int\dfrac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

►Цей інтеграл вище уже був обчислений за допомогою підстановки Ейлера (*див. приклад 8.1.8*). Зробимо тепер іншу заміну, а саме $x-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{t}$. Тоді $x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{t}$, $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$. Підставляючи в шуканий інтеграл, матимемо:

$$\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{(4-x)x}}=\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{t}\right)}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{15t^2+4t-4}}=-\frac{1}{\sqrt{15}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{2}{15}\right)^2-\frac{64}{225}}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|t+\frac{2}{15}+\sqrt{t^2+\frac{4}{15}t-\frac{4}{15}}\right|+C,$$

де $t=\dfrac{2}{2x-3}$ (t виражено із формули заміни).◄

5. *Інтегрування біноміального диференціала*

Нехай треба обчислити інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де m, n, p — раціональні числа, $a, b\in R$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ (бо при $a=0$ (або $b=0$) маємо інтеграл степеня, який є табличним інтегралом). За підінтегральним виразом $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ закріпилися назви «біноміальний диференціал» (або «диференціальний біном»).

Інтеграл від біноміального диференціала раціоналізується наступними замінами:

а) якщо p — ціле, то підінтегральна функція буде із класу найпростіших ірраціональностей, які ми розглядали вище, і в цьому випадку інтеграл раціоналізується заміною $x = t^k$, де k — спільне кратне знаменників чисел m та n;

б) якщо p — не ціле, але $\frac{m+1}{n}$ — ціле, то інтеграл раціоналізується заміною $a+bx^n = t^s$, де S — знаменник дробу p;

в) якщо p — не ціле, $\frac{m+1}{n}$ — не ціле, але $\frac{m+1}{n}+p$ — ціле, інтеграл раціоналізується заміною $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$, де s — знаменник дробу p.

Ці три випадки заміни були відомі ще Ісааку Ньютону, але лише в XIX столітті російський математик і механік Пафнутій Чебишов довів, що біноміальний диференціал інтегрується в скінченному вигляді лише у цих трьох випадках. Тобто, якщо $p \notin Z$, $\frac{m+1}{n} \notin Z$ і $\frac{m+1}{n}+p \notin Z$, — інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ не береться. Заміни а), б), в) назвали, на честь цього вченого, замінами (або підстановками) Чебишова.

Приклад 8.1.10. Раціоналізувати, якщо це можливо, інтеграл:

1) $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^5}dx$.

►1. $p = -2$ — ціле, тому маємо перший із трьох випадків. Отже,

$$\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx = \left|\begin{matrix} x=t^3 \\ dx = 3t^2dt\end{matrix}\right| =$$

$$=3\int t^{-3}\left(1+t\right)^{-2}t^2dt = 3\int t^{-1}\left(1+t\right)^{-2}dt = 3\int\frac{dt}{t\left(t+1\right)^2}.$$

2. Запишемо підінтегральний вираз у вигляді біноміального диференціала. Тоді:

$$I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Бачимо, що $p=\frac{1}{3}$ — дробове, $s = 3$, $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=1$ — ціле, отже, маємо випадок б). Робимо заміну: $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$, звідки $x^{\frac{1}{4}}=t^3-1$, $x=(t^3-1)^4$, $dx=4\left(t^3-1\right)^3\cdot 3t^2dt=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt$. Тепер інтеграл набуває вигляду:

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=12\int\left(\left(t^3-1\right)^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}t^2\left(t^3-1\right)^3dt=12\int t^3\left(t^3-1\right)dt.$$

3. $\int\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx=\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l} p=\frac{1}{3}\notin Z, s=3; \\ m=-2, n=3, \frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3}\notin Z; \\ \frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0\in Z; \\ \text{Заміна: } \frac{1+x^3}{x^3}=t^3 \Rightarrow \frac{1}{x^3}=t^3-1 \Rightarrow x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}}; \\ dx=-\frac{1}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot 3t^2dt=-t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}dt \end{array}\right|=$$

$$= -\int\left(\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2}\left(t^3\left(t^3-1\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}} dt =$$

$$= -\int t^3\left(t^3-1\right)^{-1} dt = -\int \frac{t^3 dt}{t^3-1}.$$

Порада. При використанні підстановок Чебишова усі перетворення слід виконувати зі степенями й уникати радикалів.

4. $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^5} dx = \int x^{-5}\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}} dx$. Тут $p = \frac{1}{2} \notin Z$, $s = 3$, $m = -5$, $n = 3$, $\frac{m+1}{n} = \frac{-5+1}{3} = -\frac{4}{3} \notin Z$, $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{4}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6} \notin Z$. Отже, цей інтеграл не береться у скінченному вигляді.◄

Г. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо деякі типи інтегралів від тригонометричних функцій, які інтегруються в скінченному вигляді. Це, зокрема, інтеграли від раціональних функцій відносно $\sin x$ та $\cos x$.

1. *Універсальна заміна*

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\ldots)$ — раціональна функція своїх змінних, заміною $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ (яку називають універсальною) зводиться до інтеграла від раціональної функції. Справді,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Інтеграл, після заміни змінної, набуває вигляду:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt.$$

Примітка. Хоч універсальна заміна завжди раціоналізує інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (і в цьому її перевага!), вона має суттєвий недолік. Неважко помітити, що вона призводить до появи високих степенів змінної t, часто — до інтегрування елементарних дробів четвертого типу, що створює відомі незручності. Тому, якщо можна, універсальної заміни слід уникати.

Приклад 8.1.11. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

$$► \int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t; \\ x = 2\operatorname{arctg} t; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4-t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right| + C. ◄$$

2. *Деякі спеціальні заміни*

Вкажемо заміни, які, в окремих випадках, зручніші за універсальну заміну для раціоналізації інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Таких випадків три:

а) якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то заміна $\cos x = t$;

б) якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то заміна $\sin x = t$;

в) якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то заміна $\operatorname{tg} x = t$.

Приклад 8.1.12. Обчислити інтеграл: 1) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

►1. Підінтегральна функція непарна відносно синуса, тобто при заміні $\sin x$ на $-\sin x$ знак підінтегральної функції зміниться на протилежний. Тому маємо перший (із зазначених трьох) випадок. Робимо заміну: $\cos x = t$. Зазначимо, що для знаходження dx недоцільно визначати x зі співвідношення заміни; краще це співвідношення диференціювати. Маємо:

$$d(\cos x) = dt \Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}.$$

Тепер обчислюємо інтеграл, переходячи в ньому до змінної t:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\int \frac{dt}{\sin^4 x} = -\int \frac{dt}{\left(\sin^2 x\right)^2} = -\int \frac{dt}{\left(1-\cos^2 x\right)^2} = -\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2} = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\ln|1-t| + \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| - \frac{1}{1+t}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| - \frac{2t}{1-t^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| - \frac{2\cos t}{1-\cos^2 x}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\right) + C.$$

2. Обчислимо інтеграл за допомогою заміни $\mathrm{tg}\, x = t$. Із заміни маємо: $x = \mathrm{arctg}\, t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Із тотожності $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ знаходимо

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 x} = \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\mathrm{tg}x\right) + C.◄$$

3. *Використання тотожних перетворень тригонометричних виразів*

Обчислюючи інтеграли від тригонометричних функцій, часто, для перетворення тригонометричного виразу до зручного вигляду, доводиться користуватися тригонометричними формулами перетворення добутку синусів й косинусів функцій у суму та формулами пониження степеня.

Справді, інтеграли $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ зводяться до табличних після перетворення підінтегральних функцій за формулами:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right);$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right);$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right).$$

А в інтегралах $\int \sin^2 x dx$, $\int \cos^2 x dx$ (як і $\int \sin^{2k} x dx$, $\int \cos^{2k} x dx$), очевидно, слід використати формули пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Приклад 8.1.13. Обчислити інтеграл:

1) $\int \cos 3x \cos 5x dx$; 2) $\int \sin^4 x dx$.

►1. Записуючи добуток косинусів під інтегралом у вигляді суми відповідних тригонометричних функцій, матимемо:

$$\int \cos 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 8x + \cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

2. При обчисленні цього інтеграла користуємося формулами пониження степеня. Маємо:

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\right) + C = \frac{1}{32}\left(12x - 8\sin 2x + \sin 4x\right) + C. ◄$$

Д. Обчислення визначеного інтеграла

Наведемо короткі теоретичні відомості, необхідні для обчислення визначених інтегралів.

1. *Формула Ньютона-Лейбніца:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ — будь-яка первісна для підінтегральної функції $f(x)$.

2. *Основні властивості визначеного інтеграла:*

1) $\int_a^b dx = b - a$;

2) $\int_a^b \left(k_1 f_1(x) + \ldots + k_n f_n(x)\right) dx = k_1 \int_a^b f_1(x)dx + \ldots + k_n \int_a^b f_n(x)dx$,

$k_i \in R, i = \overline{1,n}$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

3. *Заміна змінної*

Перший варіант заміни $x = \varphi(t)$ призводить до перетворення інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

При цьому мають виконуватися умови: 1) функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$; 2) функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ — неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$; 3) $\varphi(t) \in [a; b]$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Другий варіант заміни. Якщо виконується заміна $t = \omega(x)$, то знайдена з неї функція $x = \varphi(t)$ має задовольняти умови, вказані у варіанті першому. Нові межі інтегрування: $\alpha = \omega(a)$, $\beta = \omega(b)$.

Усі стандартні заміни в невизначених інтегралах є ефективними й при обчисленні відповідних визначених інтегралів.

4. *Інтегрування частинами*

Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Основні класи функцій, які інтегруються частинами, ті самі, що й у випадку невизначеного інтегрування.

5. *Невласні інтеграли*

Якщо функція $f(x)$ — неперервна на проміжку $[a;+\infty)$, то невласним інтегралом I роду $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають таку границю $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$. Якщо ця границя скінченна, то інтеграл називають збіжним, в іншому випадку — розбіжним.

Означення інтеграла $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ аналогічне: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx$. А інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ розуміють як суму інтегралів: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, де a — будь-яке число. Останній інтеграл вважається збіжним, якщо збіжні обидва інтеграли у правій частині рівності, і розбіжним, якщо хоча б один із них розбіжний.

Якщо в інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ функція $f(x)$ необмежена, то такий інтеграл є невласним інтегралом II роду. Зміст такого інтеграла наступний:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, якщо $\lim_{x\to b} f(x)=\infty$ і $f(x)$ інтегровна на будь-якому відрізку $[a;\, b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$;

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, якщо $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ і $f(x)$ інтегровна на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;\, b]$, де $0<\varepsilon<b-a$;

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, якщо $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$, $c\in(a;\, b)$.

У перших двох випадках інтеграл вважається збіжним, якщо відповідна границя скінченна, а у третьому — якщо збігаються обидва інтеграли у правій частині рівності. Якщо інтеграл не є збіжним, то кажуть, що він розбіжний.

Приклад 8.1.14. Обчислити:

$$1)\ \int_0^1\left(\sin\pi x + 2\operatorname{arctg} x\right)dx;\ 2)\ \int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx.$$

►1. За властивістю лінійності:

$$\int_0^1\left(\sin\pi x + 2\operatorname{arctg} x\right)dx = \int_0^1 \sin\pi x dx + 2\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = I_1 + 2I_2.$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо.

$$I_1 = \int_0^1 \sin\pi x dx = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Другий інтеграл візьмемо частинами.

$$I_2 = \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = x\end{matrix}\right| =$$

$$= x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Отже, остаточно маємо: $\int_0^1\left(\sin\pi x + 2\operatorname{arctg} x\right)dx = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} - \ln 2$.

2. Перетворимо підкореневий вираз $2ax - x^2 = -\left(x^2 - 2ax + a^2 - a^2\right) = a^2 - \left(x-a\right)^2$ і зробимо заміну $x - a = a\sin t$, або те саме, що $x = a + a\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Звідси:

$dx = a\cos t dt$, а підінтегральна функція з урахуванням заміни матиме вигляд:

$$\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)} =$$
$$= \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t.$$

Поміняємо межі інтегрування, враховуючи, що $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

$$x = 0 \to a + a\sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2};$$
$$x = 2a \to a + a\sin t = 2a \Leftrightarrow \sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Тепер остаточно:

$$\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}. ◄$$

Приклад 8.1.15. Обчислити інтеграл або довести, що він розбіжний:

1) $\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

►1. За означенням невласного інтеграла II роду:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-3x}dx = \frac{1}{3}\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-3x}-1\right)\Big|_0^A =$$
$$= -\frac{1}{3}\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-3A} - 1 - e^0 + 1\right) = -\frac{1}{3}\left(0-1-1+1\right) = \frac{1}{3};$$

2. Підінтегральна функція необмежена поблизу точки $x = 1$. Отже,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln\left(\ln x\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln\ln 2 - \ln\ln(1+\varepsilon)\right) = \infty,$$

тобто інтеграл розбіжний.◄

8.1.2. Інтегрування функції комплексної змінної

(Теоретичні відомості див.: [4], розд. 2, п. 2.3.7).

Приклад. 8.1.16. Обчислити інтеграл:

1) $\int_\gamma z dz$, де крива $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0;\pi]$;

2) $\int_L \left(2z + \overline{z}\right)dz$, де L — відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1 - i$ з початком в точці $z_1 = 0$;

3) $I = \int_L \left(z^2 + \sin z\right)dz$, де L — півколо: $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \ge 0$;

4) $\int_L \frac{\overline{z}}{z}dz$, де L — межа області: $\left\{1 < |z| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0\right\}$ (інтегрування здійснюється в додатному напрямі);

5) $\int_L \frac{e^z}{z^2 + 2z}dz$, де крива L — коло, яке задається одним із рівнянь: 1) $|z| = 1$; 2) $|z| = 3$; 3) $|z - 2i| = 1$, (напрям інтегрування вважається додатнім).

►1. Скористаємося формулою Ньютона-Лейбніца *([4], розділ 2, п. 2.3.7)*. Очевидно, що функція $F(z)=\dfrac{z^2}{2}$ є первісною для $f(z) = z$ в усій комплексній площині. Тоді функція $F\left(e^{it}\right)=\dfrac{e^{2it}}{2}$ є первісною для $f(z) = z$ вздовж кривої $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0; \pi]$, а отже,

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz=\frac{e^{2i\pi}}{2}-\frac{e^{0}}{2}=0,$$

бо експоненційна функція є періодичною з періодом $T = 2\pi i$.

2. Задамо криву інтегрування L параметрично: $\gamma_1(t) = (1 - i)t$, $t \in [0; 1]$. Згідно з означенням інтеграла вздовж кривої маємо:

$$I=\int\limits_{L}\left(2z+\overline{z}\right)dz=\int\limits_{0}^{1}(2(1-i)t+(1+i)t)(1-i)dt=\int\limits_{0}^{1}(2(1-i)^2t+2t)dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}-4itdt+\int\limits_{0}^{1}2tdt=-4i\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1+2\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1=-2i+1.$$

3. Підінтегральна функція $f(z) = z^2 + \sin z$ голоморфна в усій комплексній площині. Тому згідно з наслідком із теореми 2.3.11 *([4], розділ 2, п. 2.3.7)* маємо:

$$I=\int\limits_{L}\left(z^2+\sin z\right)dz=\left(\frac{z^3}{3}-\cos z\right)\Bigg|_{-i}^{i}=\frac{i^3}{3}-\cos i-\frac{(-i)^3}{3}+\cos(-i)=-\frac{2}{3}i.$$

4. Крива L, вздовж якої здійснюється інтегрування, являє собою замкнений кусково-гладкий контур $ABCDA$ *(див. рис. 8.1.1)*.

Використовуючи властивість адитивності інтеграла, маємо:

$$I=\int\limits_{AB}f(z)dz+\int\limits_{BC}f(z)dz+\int\limits_{CD}f(z)dz+\int\limits_{DA}f(z)dz.$$

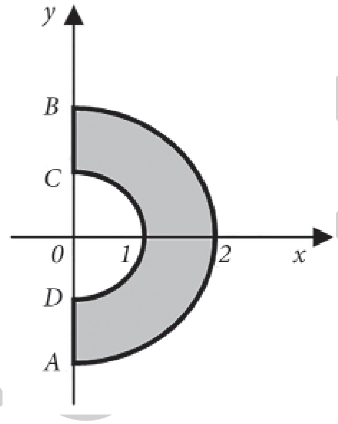


Рис. 8.1.1

Параметризуємо кожну ділянку кривої L. Знаходимо:

$$AB: z=2e^{it}, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\; BC: z=it, t\in[2;1];$$

$$CD: z=e^{it}, t\in\left[\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right];\; DA: z=it, t\in[-1;-2].$$

Тоді за означенням інтеграла вздовж кривої маємо:

$$I=\int\limits_{ABCDA}\frac{\overline{z}}{z}dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2e^{-it}}{2e^{it}}\cdot 2ie^{it}dt+\int\limits_{2}^{1}\frac{-it}{it}\cdot idt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-it}}{e^{it}}\cdot ie^{it}dt+\int\limits_{-1}^{-2}\frac{-it}{it}\cdot idt=$$

$$=2i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-it}dt-i\int\limits_{2}^{1}dt+i\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}e^{-it}dt-i\int\limits_{-1}^{-2}dt=-2e^{-it}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-it\Big|_{2}^{1}-e^{-it}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-it\Big|_{-1}^{-2}=4i.$$

5. Розглядаємо спочатку *випадок I*.

$$I=\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz=\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z(z+2)}dz.$$

Скористаємося інтегральною формулою Коші. Для цього визначимо функцію, для якої потім застосуємо цю формулу. Інтегрування виконується вздовж кола $|z| = 1$, усередині якого знаменник підінтегрального виразу має один нуль: $z = 0$. Виконаємо очевидне перетворення інтеграла до потрібного для застосування формули Коші вигляду. Маємо:

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)}dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{z}dz.$$

Маємо: $f(z) = \frac{e^z}{z+2}$. Очевидно, що ця функція голоморфна всередині кола $|z| = 1$ з центром в точці $z_0 = 0$. Тоді за інтегральною формулою Коші $I = 2\pi i\, f(0)$, тобто:

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{z}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^z}{z+2}\right|_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{e^0}{0+2} = \pi i;$$

Випадок II. Усередині кола $|z| = 3$ знаменник підінтегрального дробу має два нулі: $z = 0$ та $z = -2$. Тому використати безпосередньо методику обчислення інтеграла, як у попередньому випадку, не вдається. Спочатку перетворимо дріб $\frac{1}{z^2+2z}$, записавши його у вигляді суми елементарних дробів. Для цього скористаємося методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{z(z+2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} = \frac{A(z+2)+Bz}{z(z+2)}.$$

Прирівнявши чисельники дробів у лівій і правій частинах останньої рівності, отримуємо рівність $A(z+2)+Bz = 1$. Звідси методом часткових значень, поклавши спочатку $z = 0$, отримуємо $2A = 1$, а потім, взявши $z = -2$, знаходимо $-2B = 1$. У підсумку маємо значення невідомих коефіцієнтів: $A = 1/2$, $B = -1/2$.

Отже,

$$\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right).$$

Шуканий інтеграл подамо у вигляді суми двох інтегралів, до кожного з яких застосуємо інтегральну формулу Коші. Маємо:

$$I = \int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z+2)}dz = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z}dz - \int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z+2}dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi i \cdot e^0 - 2\pi i \cdot e^{-2}\right) = \pi i\left(1 - e^{-2}\right).$$

Випадок III. Всередині кола $|z-2i| = 1$ підінтегральна функція голоморфна, а отже, $\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}dz = 0$.◄

До обчислення інтегралів певного типу застосовують *лишки* (*відомості з теорії лишків див.: [4], розділ 2, п. 2.3.9*).

Обчислення інтегралів по замкнутих кривих

Приклад 8.1.17. Обчислити інтеграл:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}dz$; 2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^8+1}$.

►1. Оскільки всередині контуру $|z| = 2$ міститься лише одна особлива точка $z = 0$, яка для підінтегральної функції $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ є полюсом третього порядку, то, за теоремою Коші про суму лишків і формулою для лишку у випадку кратного полюса, маємо:

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = 2\pi i \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\cos z}{z^3} \cdot z^3\right) =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}(\cos z) = \pi i \cdot (-1) = -\pi i.$$

2. Підінтегральна функція всередині кола $|z| = 2$, по якому проводиться інтегрування, має лише скінченні ізольовані особливі точки, які є розв'язками рівняння $z^8+1=0$. Тоді, за теоремою Коші про суму лишків, маємо:

$$I=\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^8+1}=2\pi i\sum_{k=1}^{8}\underset{z=z_k}{res}\frac{1}{z^8+1},$$

де z_k — корені рівняння $z^8+1=0$.

Проте цей інтеграл можна обчислити простіше, якщо скористатися теоремою Коші про повну суму лишків, згідно з якою:

$$\sum_{k=1}^{8}\underset{z=z_k}{res}\frac{1}{z^8+1}+\underset{z=\infty}{res}\frac{1}{z^8+1}=0.$$

Таким чином, для обчислення шуканого інтеграла достатньо знайти лишок в нескінченно віддаленій точці:

$$I=-2\pi i\,\underset{z=\infty}{res}\frac{1}{z^8+1}.$$

Обчислимо лишок підінтегральної функції в точці $z = \infty$. Для цього потрібно знайти значення коефіцієнта c_{-1} у розкладі функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$. Маємо:

$$f(z)=\frac{1}{z^8+1}=\frac{\frac{1}{z^8}}{1+\frac{1}{z^8}}=\frac{1}{z^8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^8}\right)^n.$$

Звідси отримуємо:

$$\underset{z=\infty}{res}\frac{1}{z^8+1}=-c_{-1}=0,$$

а отже,

$$I=-2\pi i\,\underset{z=\infty}{res}\frac{1}{z^8+1}=0.◄$$

Обчислення інтегралів вигляду $I=\int\limits_0^{2\pi}R(\cos n\varphi,\sin m\varphi)\,d\varphi$, $n,m\in\mathbb{Z}$,

де функція $R(\cos n\varphi,\sin m\varphi)$ є раціональною функцією своїх аргументів.

Для обчислення інтегралів даного вигляду перетворимо підінтегральну функцію, скориставшись формулами для тригонометричних функцій:

$$\cos n\varphi=\frac{e^{in\varphi}+e^{-in\varphi}}{2},\quad \sin m\varphi=\frac{e^{im\varphi}-e^{-im\varphi}}{2i}.$$

Тоді знаходимо:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}R(\cos n\varphi,\sin m\varphi)\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}R\left(\frac{e^{in\varphi}+e^{-in\varphi}}{2},\frac{e^{im\varphi}-e^{-im\varphi}}{2i}\right)\frac{ie^{i\varphi}}{ie^{i\varphi}}d\varphi=$$

$$=\int\limits_{|z|=1}R\left(\frac{z^n+z^{-n}}{2},\frac{z^m-z^{-m}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\underset{z=z_k}{res}R_1(z),$$

де $R_1(z)=\frac{1}{iz}R\left(\frac{z^n+z^{-n}}{2},\frac{z^m-z^{-m}}{2i}\right)$, а z_k, $k=\overline{1,p}$, — нулі раціональної функції $R_1(z)$, які містяться всередині одиничного кола.

Приклад 8.1.18. Обчислити інтеграл:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},\ |a|<1.$$

$$►\ I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{ie^{i\varphi}\left(1-2a\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)+a^2\right)}=$$

$$=\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(1-2a\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)+a^2\right)}=\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2\right)}=$$

$$= i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{az^2 - z(1+a^2)+a} = i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}.$$

Оскільки всередину одиничного кола потрапляє лише точка $z = a$, яка є полюсом першого порядку, то маємо:

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi + a^2} = 2\pi i\cdot i\,\underset{z=a}{res}\frac{1}{a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} =$$

$$= -2\pi\lim_{z\to a}\frac{(z-a)}{a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} = -2\pi\frac{1}{a\left(a-\frac{1}{a}\right)} = \frac{2\pi}{1-a^2}. ◄$$

Обчислення невласних інтегралів типу $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Для обчислення невласних інтегралів зручно використовувати *теорему*: якщо функція $f(z)$ голоморфна на множині $\{z:\operatorname{Im} z \ge 0\}$, за винятком скінченної множини точок $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, причому $\operatorname{Im} a_k > 0$ для всіх $k = \overline{1,p}$, і виконується умова $zf(z)\to 0$ при $z\to\infty$, то $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\underset{z=a_k}{res} f(z)$.

Приклад 8.1.19. Обчислити невласний інтеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

►Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ продовжується в комплексну площину функцією $f(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$, яка є голоморфною у верхній півплощині, за винятком єдиної ізольованої особливої точки $z = i$. Ця функція задовольняє умову $zf(z) = \frac{z}{\left(z^2+1\right)^2}\to 0$ при $z\to\infty$. Скориставшись зазначеною теоремою, маємо:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\pi i\,\underset{z=i}{res}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}.$$

Оскільки точка $z = i$ є полюсом другого порядку функції $f(z)$, то за формулою для обчислення лишків отримуємо:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\pi i\,\underset{z=i}{res}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2} = 2\pi i\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{(z-i)^2}{\left(z^2+1\right)^2} =$$

$$= 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2} = 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = -4\pi i\frac{1}{-8i} = \frac{\pi}{2}. ◄$$

Обчислення інтегралів вигляду $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$.

Має місце корисна для обчислення цього інтеграла теорема: якщо функція $f(z)$ голоморфна на множині $\{z:\operatorname{Im} z\ge 0\}$, за винятком скінченної множини точок $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, причому $\operatorname{Im} a_k > 0$ для всіх $k = \overline{1,p}$, і $M_R = \max_{z\in\gamma_R}\left|f(z)\right|\to 0$ при $R\to+\infty$, де $\gamma_R = Re^{it}$, $t\in[0;\pi]$. Тоді для довільного $\lambda > 0$ справедлива рівність $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\underset{z=a_k}{res}\left(e^{i\lambda z} f(z)\right)$.

Приклад 8.1.20. Обчислити інтеграл: $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos 3x}{x^2 - 2x + 2} dx$.

►Оскільки $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos 3x}{x^2-2x+2} dx = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2-2x+2} dx$, а функція $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z+2}$ голоморфна на множині $\{z : \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \setminus \{1+i\}$ та задовольняє всі умови зазначеної теореми, то:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos 3x}{x^2-2x+2} dx = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2-2x+2} dx = \mathrm{Re}\left(\lim_{z=1+i} \frac{(z+1)e^{3zi}}{z^2-2z+2}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\pi i \lim_{z\to 1+i} \frac{(z-(1+i))(z+1)e^{3zi}}{(z-(1-i))(z-(1+i))}\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i \frac{(1+i+1)e^{3i(1+i)}}{(1+i-(1-i))}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\pi i \frac{(1+i+1)e^{3i(1+i)}}{(1+i-(1-i))}\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i \frac{(2+i)e^{-3}(\cos 3 + i\sin 3)}{2i}\right) =$$

$$= \pi e^{-3}\left(2\cos 3 - \sin 3\right). ◄$$

8.1.3. Кратні та криволінійні інтеграли

А. Обчислення подвійного інтеграла

1. Випадок прямокутних декартових координат

Якщо область $\overline{D}$ інтегрування обмежена зліва й справа прямими $x = a$, $x = b$, $a < b$, а знизу й зверху неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ відповідно (*рис. 8.1.2*), функція $f(x, y)$ неперервна в області $\overline{D}$, то подвійний її інтеграл по цій області обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Інтеграл у правій частині формули називається повторним інтегралом; його слід розуміти так:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx;$$ тому обчислення повторного інтеграла слід починати з внутрішнього інтеграла.

Якщо ж область $\overline{D}$ обмежена знизу й зверху прямими $x = c$, $x = d$, $c < d$, а зліва й справа неперервними кривими $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ відповідно (*рис. 8.1.3*), то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx,$$

де $$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Звернемо увагу, що зовнішні межі повторного інтеграла в обох випадках *сталі*, тому в результаті обчислення подвійного інтеграла отримаємо *число*.

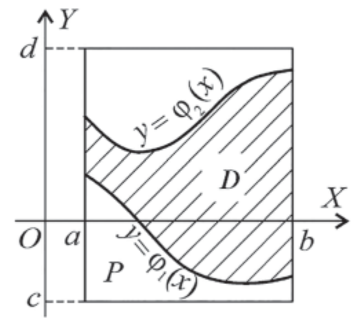


Рис. 8.1.2

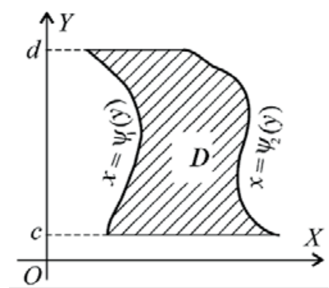


Рис. 8.1.3

В обох цих випадках область $\overline{D}$ обмежена кривою, яку будь-яка пряма, паралельна осі Oy (чи осі Ox відповідно), перетинає не більше ніж у двох точках. Якщо ця умова не виконується, то область $\overline{D}$ слід розбити на частини так, щоб у кожній із частин ця умова виконувалася, і для обчислення подвійного інтеграла по всій області скористатися властивістю адитивності.

Зазначимо, що якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області $\overline{D}$, то значення її повторного інтеграла по цій області не залежить від порядку інтегрування по різних змінних.

Приклад 8.1.21. Обчислити, обираючи різний порядок інтегрування, подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$, де область інтегрування $\overline{D}$ обмежена параболою $y = x^2$ та прямою $y = x + 2$.

►Зобразимо область інтегрування *(рис. 8.1.4)*. Бачимо, що ця область задовольняє обидва розглянуті вище випадки: кожна пряма, паралельна осі Oy, перетинає її межу не більше ніж у двох точках; те саме можна сказати й про будь-яку пряму, паралельну осі Ox.

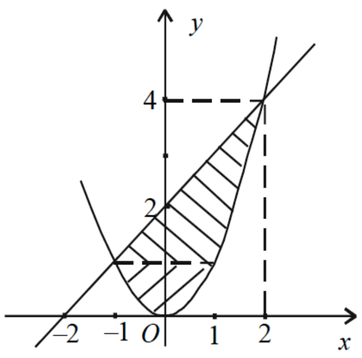


Рис. 8.1.4

Оберемо спочатку порядок інтегрування, при якому зовнішнє інтегрування проводиться по x. Розв'язавши сумісно рівняння прямої та параболи, знаходимо їх точки перетину: (–1; 1) та (2; 4). Область $\overline{D}$ запишемо так:

$$\overline{D} = \left\{(x, y) \in R^2 : -1 \le x \le 2, x^2 \le y \le x + 2\right\}.$$

Тому:

$$\iint\limits_D (x^2 + y)ds = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} (x^2 + y)dy = \int\limits_{-1}^{2} \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{x+2} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(x^2(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)^2 - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2 \right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(-\frac{3}{2}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 4 \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{3}{10}x^5 + \frac{x^4}{4} + \frac{5}{6}x^3 + x^2 + 2x \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= -0,3 \cdot 32 + 4 + \frac{20}{3} + 4 + 4 - \left(0,3 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + 1 - 2 \right) = 10,35.$$

Якщо поміняти порядок інтегрування, то область $\overline{D}$ доведеться розбити прямою $y = 1$ на дві області, оскільки ліва межа області $\overline{D}$ не може бути задана *одним* рівнянням, вона є кусково-неперервною кривою, яка складається із фрагментів двох кривих $y = x^2$ та $y = x + 2$. Тому область $\overline{D}$ можна подати у вигляді об'єднання двох областей: $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$, де

$$\overline{D}_1 = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 \le y \le 1, -\sqrt{y} \le x \le y - 2\right\},$$

$$\overline{D}_2 = \left\{(x, y) \in R^2 : 1 \le y \le 4, y - 2 \le x \le \sqrt{y}\right\}.$$

Тоді:

$$\iint_D (x^2+y)dxdy = \iint_{D_1}(x^2+y)dxdy + \iint_{D_2}(x^2+y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{y-2}(x^2+y)dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}}(x^2+y)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(\frac{x^3}{3} + yx \right)\Bigg|_{-\sqrt{y}}^{y-2} \right) dy + \int_1^4 \left(\left(\frac{x^3}{3} + yx \right)\Bigg|_{y-2}^{\sqrt{y}} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}(y-2)^3 + y^2 - 2y + \frac{4}{3} y\sqrt{y} \right) dy + \int_1^4 \left(\frac{4}{3} y\sqrt{y} - \frac{1}{3}(y-2)^3 - y^2 + 2y \right) dy =$$

$$= \left(\frac{1}{12}(y-2)^4 + \frac{1}{3}y^3 - y^2 + \frac{8}{15}y^2\sqrt{y} \right)\Bigg|_0^1 +$$

$$+ \left(\frac{8}{15}y^2\sqrt{y} - \frac{1}{12}(y-2)^4 - \frac{1}{3}y^3 + y^2 \right)\Bigg|_1^4 = 10{,}35\,.$$ ◄

Як показує наведений приклад, перехід від подвійного інтеграла до повторного з певним порядком інтегрування може мати значення, не для результату (він буде один і той самий), а для простоти перетворень і обчислень.

2. Перехід до полярних координат

При обчисленні подвійного інтеграла буває зручно перейти до інших змінних (виконати заміну змінних) з метою зробити зручнішою для інтегрування підінтегральну функцію чи область інтегрування, або перше й друге одночасно. Поширеною заміною є перехід до полярних координат.

У випадку переходу в подвійному інтегралі до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ елемент площі $dxdy$ заміняють на $\rho d\rho d\varphi$, записують полярні рівняння межі області $\overline{D}$. Крім того, аналізуючи область $\overline{D}$, вміщену в полярну систему координат (*рис. 8.1.5*), полюс якої збігається з початком прямокутної декартової системи координат xOy, а полярна вісь — з додатною піввіссю Ox, встановлюють межі для змінних ρ та φ (найчастіше межі змінної φ сталі: $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, тобто область $\overline{D}$ обмежена променями $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$).

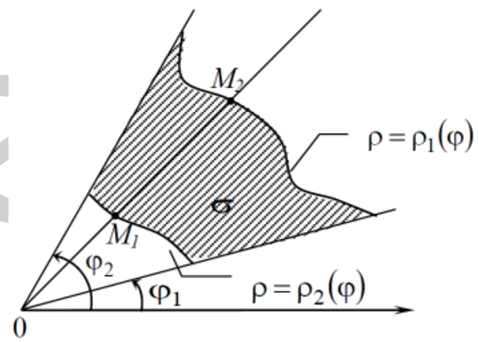


Рис. 8.1.5

Далі зображають (або уявляють) область $\overline{G}$, у яку при перетворенні декартових координат у полярні перейшла область $\overline{D}$, і обчислюють подвійний інтеграл за формулою:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

До полярних координат доцільно переходити, якщо область інтегрування є кругом або частиною круга, або якщо підінтегральна функція залежить від $x^2 + y^2$, або ж якщо маємо й перше, і друге.

Приклад 8.1.22. Обчислити $\iint\limits_D xdxdy$, якщо $\overline{D} = \left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le ax\right\}$.

►Перетворимо нерівність, яка задає область інтегрування:

$$x^2 + y^2 \le ax \Leftrightarrow x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 \le \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{a^2}{4}.$$

Отже, область інтегрування — круг з центром у точці $\left(\frac{a}{2};0\right)$ і радіусом $\frac{a}{2}$ (*рис. 8.1.6*).

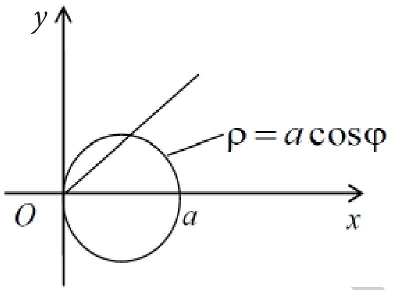


Рис. 8.1.6

Рівняння кола $x^2 + y^2 = ax$ в полярних координатах $\rho = a\cos\varphi$.

Межі зміни для φ та ρ: $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le a\cos\varphi$. Отже,

$$\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^{a\cos\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \, d\varphi = \frac{a^3}{12} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2\varphi\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{12} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = \frac{a^3}{12} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \cos 4\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{12} \cdot \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{12} \cdot 2 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi a^3}{8}. \blacktriangleleft$$

Б. Обчислення потрійного інтеграла

1. Випадок прямокутних декартових координат

Метод обчислення потрійного інтеграла, як і подвійного, полягає у зведенні його до повторного інтеграла, тобто до інтегрування за кожною змінною.

Нехай область інтегрування $\overline{G}$ в прямокутній декартовій системі координат обмежена знизу й зверху поверхнями $z_1(x, y)$ і $z_2(x, y)$, $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$, кожну із яких будь-яка вертикальна пряма перетинає не більше ніж в одній точці, а з боків — циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz. Нехай проєкцією цієї області в площину xOy є область $\overline{D}$ (*рис. 8.1.7*). Нехай функція $f(x, y, z)$ інтегровна (зокрема неперервна) в області $\overline{G}$.

Тоді:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Враховуючи правила обчислення подвійного інтеграла по області $\overline{D}$, яка, наприклад, має межі a та b по осі Ox і $y_1(x) \le y_2(x)$ по змінній y (*рис. 8.1.7*), матимемо остаточно:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

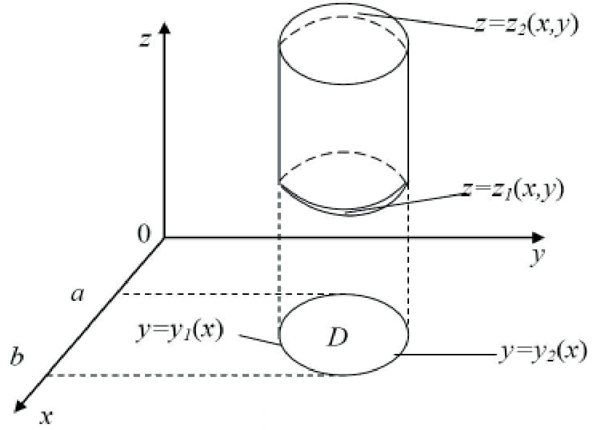


Рис. 8.1.7

Аналогічно обчислюють потрійний інтеграл по області, яка є циліндричною з твірною, паралельною координатній осі Oy (чи Ox), а $\bar{D}$ — проєкція її в площину xOz (чи yOz відповідно). Тоді:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy$$

або відповідно:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dydz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx.$$

Якщо ж областю інтегрування $\bar{G}$ є прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні координатним осям, тобто:

$$\bar{G} = \left\{(x,y,z) \in R^3 : a \le x \le b, c \le y \le d, k \le z \le l\right\},$$

то потрійний інтеграл по цій області дорівнює повторному інтегралові по всіх змінних, узятому в будь-якому порядку, скажімо, так:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x,y,z)dz.$$

Приклад 8.1.23. Обчислити інтеграл по області $\bar{G}$:

1) $\iiint_G ze^{x+y}dxdydz,\ \bar{G} = \left\{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\right\};$

2) $\iiint_G z\,dxdydz$, де область $\bar{G}$ обмежена поверхнями

$y = \frac{1}{2}x^2$, $z = 0$, $2y + z = 2$.

►1. Область інтегрування — прямокутний паралелепіпед, тому:

$$\iiint_G ze^{x+y}dxdydz = \iiint_G ze^x e^y dxdydz = \int_0^1 e^x dx \cdot \int_1^2 e^y dy \cdot \int_0^3 zdz =$$

$$= e^x\Big|_0^1 \cdot e^y\Big|_1^2 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9e}{2}(e-1)^2;$$

2. Поверхня $y = \frac{1}{2}x^2$ являє собою циліндр, твірна якого паралельна осі Oz (про це свідчить відсутність у рівнянні змінної z), а напрямною (лінією, по якій рухається твірна) — парабола $y = \frac{1}{2}x^2$. Рівнянням $z = 0$ задається координатна площина xOy. $2y + z = 2$ — рівняння площини, паралельної осі Oz (знову ж таки: у рівнянні відсутня змінна z), яка перетинає площину yOz по прямій $2y + z = 2$. Вісь Oy ця площина перетинає в точці 1, а площину $z = 0$ — по прямій $y = 1$. Зобразимо схематично цю область (*рис. 8.1.8*).

Проєкцією її в площину xOy є область, обмежена параболою $y = \frac{1}{2}x^2$ і прямою $y = 1$. Абсциси точок перетину параболи й прямої $x = \pm\sqrt{2}$. Тому подвійний інтеграл по цій області має межі:

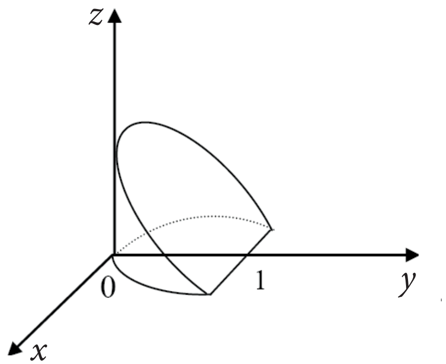


Рис. 8.1.8

$\pm\sqrt{2}$ по змінній x; від $y=\frac{1}{2}x^2$ до $y = 1$ по змінній y (чи від 0 до 1 по змінній y і $\pm\sqrt{2}$ по змінній x). Зазначимо, що область в площині xOy буває корисно зобразити окремо. Отже,

$$\iiint\limits_G z\,dxdydz = \int\limits_{-\sqrt2}^{\sqrt2}dx\int\limits_{\frac12x^2}^{1}dy\int\limits_0^{2-2y}zdz = \int\limits_{-\sqrt2}^{\sqrt2}dx\int\limits_{\frac12x^2}^{1}\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{2-2y}\right)dy =$$

$$=\int\limits_{-\sqrt2}^{\sqrt2}dx\int\limits_{\frac12x^2}^{1}\left(\frac{2^2(1-y)^2}{2}\right)dy = \int\limits_{-\sqrt2}^{\sqrt2}dx\int\limits_{\frac12x^2}^{1}2\left(1-2y+y^2\right)dy =$$

$$=2\int\limits_{-\sqrt2}^{\sqrt2}\left(y-y^2+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac12x^2}^{1}dx = 2\int\limits_{-\sqrt2}^{\sqrt2}\left(\frac13-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}\right)dx =$$

$$=2\left(\frac13x-\frac12\cdot\frac{x^3}{3}+\frac14\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{24}\cdot\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_{-\sqrt2}^{\sqrt2} = 2\cdot2\left(\frac{\sqrt2}{3}-\frac12\cdot\frac{2\sqrt2}{3}+\frac14\cdot\frac{4\sqrt2}{5}-\frac{1}{24}\cdot\frac{8\sqrt2}{7}\right)=$$

$$=4\sqrt2\left(\frac15-\frac1{21}\right)=\frac{64\sqrt2}{105}.\blacktriangleleft$$

2. Перехід до циліндричних координат

Циліндричними координатами точки M простору є трійка чисел (ρ, φ, z), де ρ та φ — полярні координати проєкції цієї точки в площину xOy, а z — її апліката (*рис. 8.1.9*).

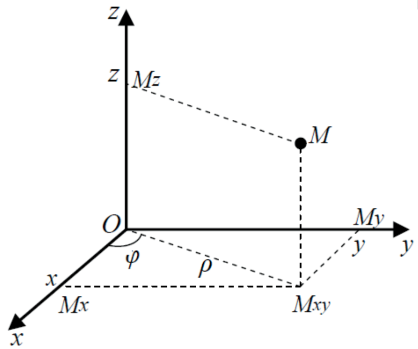


Рис. 8.1.9

Зв'язок між декартовими і циліндричними координатами точки: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z = z$; межі зміни ρ, φ, z: $0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$ (або $-\pi<\varphi\le\pi$), $-\infty<z<+\infty$.

Потрійний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\, d\rho d\varphi dz,$$

де Ω — область, у яку перетворюється область G при циліндричних перетвореннях координат; елемент об'єму $dxdydz$ заміняється на $\rho d\rho d\varphi dz$.

Переходити до циліндричних координат доцільно, коли підінтегральна функція містить вираз $x^2 + y^2$, а також — коли область інтегрування є циліндром чи частиною циліндра (або коли перше і друге одночасно).

Приклад 8.1.24. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, де область $\overline{G}$ обмежена поверхнями: $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=1$.

►Область інтегрування — циліндр, в основі якого круг, обмежений колом $x^2+y^2=2x$, або те саме, що $(x-1)^2+y^2=1$. Тому перейдемо до циліндричних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\cos\varphi$, $z=z$. Рівняння кола у циліндричних координатах $\rho=2\cos\varphi$. Межі зміни φ, ρ, z: $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 2\cos\varphi$, $0\le z\le 1$. Тепер знаходимо:

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint\limits_T z\rho^2 d\rho d\varphi dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{2\cos\varphi}z\rho^2 d\rho=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 zdz\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 z\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi}dz=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 8z\cos^3\varphi dz=\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi\cdot\int\limits_0^1 zdz=\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\sin\varphi\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi=\frac{4}{3}\cdot\left.\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{9}.$$

3. Перехід до сферичних координат

Сферичними координатами точки M простору (*рис. 8.1.10*) є трійка чисел (r, φ, θ), де r — відстань цієї точки до точки O, яку вважаємо початком координат (очевидно, що $0\le r<+\infty$), θ — кут, який утворює радіус-вектор точки M (тобто вектор OM) з додат-

ною піввіссю Oz (очевидно, що $0\le\theta\le\pi$), φ — полярний кут проєкції цієї точки в площину xOy (очевидно, що $0\le\varphi\le 2\pi$).

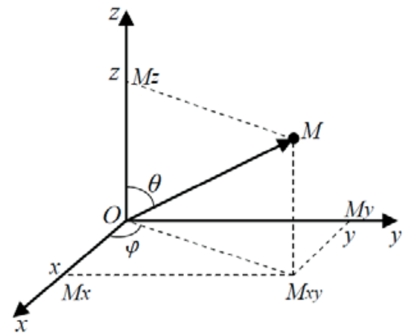


Рис. 8.1.10

Формули переходу від прямокутних декартових до сферичних координат:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\theta.\end{cases}$$

Потрійний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta,$$

де Ω — область, у яку перетворюється область G при сферичних перетвореннях координат; елемент об'єму $dxdydz$ заміняється на $r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta$.

Приклад 8.1.25. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, де область $\overline{G}$ обмежена поверхнями: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$, а $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

►Область інтегрування — всі точки першого октанта, які містяться між двома сферами (радіусів 1 та 2) з центром у початку координат. Оскільки область інтегрування є частиною кулі, то перейдемо до сферичних координат: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $1 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Бачимо, що незручна область інтегрування у вигляді частини кульового шару перетворилася в нових координатах на прямокутний паралелепіпед (усі межі сталі), що дуже зручно при інтегруванні. Обчислюємо інтеграл:

$$\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz = \iiint\limits_T r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\, drd\varphi d\theta =$$

$$\iiint\limits_T (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)r^4\sin^2\theta drd\varphi d\theta = \iiint\limits_T r^4\sin^2\theta drd\varphi d\theta =$$

$$= \int_1^1 r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta = \left.\frac{r5}{5}\right|_2^2 \cdot \left.\varphi\right|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2} =$$

$$= \frac{31}{5}\cdot\frac{\pi}{2}\left.\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right|_0^{\pi/2} = \frac{31}{5}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{31}{40}\pi^2.$$

В. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду (або інтеграла по довжині дуги) функції двох або трьох змінних по плоскій чи просторовій кривій відповідно зводиться до обчислення звичайного визначеного інтеграла. Формула переходу від криволінійного інтеграла першого роду до визначеного інтеграла залежить від способу задання кривої інтегрування L. Розглянемо різні варіанти задання кривої L.

I. Якщо L задана параметрично з параметром s (природна параметризація, s — довжина дуги): $x = x(s)$, $y = y(s)$ (або, у випадку просторової кривої, $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$) $s \in [0; S]$, то

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_0^S f\big(x(s), y(s)\big)ds, \text{ а } \int\limits_L f(x,y,z)ds = \int_0^S f\big(x(s), y(s), z(s)\big)ds.$$

II. Якщо плоска крива L задана параметрично з параметром t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовні, то диференціал дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ і тому:

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

У випадку просторової кривої, заданої рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, маємо: $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$, і

$$\int\limits_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

III. Якщо плоска крива L задана явним рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, то диференціал дуги $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$ і тому:

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

IV. Якщо плоска крива L задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, то диференціал дуги $ds = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$ і тому:

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f\big(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi\big)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Приклад 8.1.26. Обчислити інтеграл $\int\limits_L x^2 y ds$, якщо L — частина кола $x^2 + y^2 = R^2$, що міститься в першій чверті.

►*Перший спосіб.* Задамо криву L явно, виразивши y із рівняння $x^2 + y^2 = R^2$. Маємо: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0; R]$.

Тоді

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}, \quad y'^2(x) = \frac{x^2}{R^2-x^2},$$

$$ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx.$$

Отже,

$$\int_L x^2 y ds = \int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = R\int_0^R x^2dx = R\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^R = \frac{R^4}{3}.$$

Другий спосіб. Задамо криву L параметрично: $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Тоді $\quad ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = R\,dt$

і $\displaystyle\int_L x^2 y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4\cos^2 t\sin t\,dt = -R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,d\cos t = -R^4\cdot\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{3}.$

Третій спосіб. Задамо криву L у полярних координатах. Враховуючи, що $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, рівняння чверті кола має вигляд $\rho(\varphi) = R,\ \varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Тоді

$$ds = \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi = \sqrt{R^2+0}d\varphi = Rd\varphi,$$

а $\displaystyle\int_L x^2 y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{R^4}{3}.$ ◄

Г. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

1. Формули для обчислення криволінійних інтегралів II роду

Як і криволінійні інтеграли першого роду, криволінійні інтеграли другого роду (або криволінійні інтеграли по координатах) функції двох або трьох змінних по плоскій чи просторовій неперервній кривій відповідно зводяться до обчислення звичайних визначених інтегралів.

Суттєвою відмінністю криволінійного інтеграла другого роду від криволінійного інтеграла по довжині дуги є, зокрема, те, що криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку інтегрування, а саме: при зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл змінює знак на протилежний $\left(\int_{AB} = -\int_{BA}\right)$. Цю особливість слід враховувати при обчисленні криволінійних інтегралів другого роду.

Якщо крива інтегрування AB задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta]$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовні, і параметру $t = \alpha$ відповідає початок A кривої, а параметру $t = \beta$ — кінець B, тобто $A(x(\alpha), y(\alpha))$, а $B(x(\beta), y(\beta))$, то криволінійний інтеграл II роду обчислюється за формулою:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)dt.$$

Для випадку інтегрування по просторовій кривій, заданій рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha;\beta]$, з дотриманням решти умов формула аналогічна:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)dt.$$

Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, $y(x)$ — неперервно диференційовна, $A(a, y(a))$, $B(b, y(b))$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\big)dx.$$

2. Криволінійні інтеграли, що не залежать від форми кривої інтегрування

Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ неперервні в замкненій однозв'язній області $\overline{D}$, то для того, щоб інтеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежав від форми кривої AB, необхідно й достатньо, щоб в цій області виконувалася тотожність $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Якщо інтеграл по кривій AB не залежить від форми цієї кривої, то його можна позначати символом $\int_{A}^{B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

3. Криволінійні інтеграли по замкненому контуру

Криволінійний інтеграл по замкненій кривій L позначається символом $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Напрям інтегрування вздовж замкненої кривої вважається додатним, якщо рухаючись по кривій у цьому напрямі, область, яку крива обмежує увесь час, залишається зліва. Якщо в задачі на обчислення інтеграла по замкненій кривій не вказано напрям інтегрування, то слід вважати, що він додатний.

При певних умовах криволінійний інтеграл другого роду по будь-якій замкненій кривій L дорівнює нулеві. Які це умови? Із теореми про незалежність криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування (*див.: [4], розділ 2, п. 2.5.4*) випливає, що криволінійний інтеграл $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $P'_y(x,y)$ і $Q'_x(x,y)$ неперервні в однозв'язній області, в якій повністю міститься контур L, і в цій області виконується умова $P'_y(x,y) \equiv Q'_x(x,y)$.

4. Зв'язок криволінійного й подвійного інтегралів (формула Гріна)

Якщо область $\overline{D}$ обмежена кусково-гладким контуром L і функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ неперервні в цій області, то має місце рівність (формула Гріна):

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Формула Гріна може бути корисною як при обчисленні криволінійних інтегралів по замкненому контуру (якщо подвійний інтеграл правої частини обчислити простіше), так і навпаки, для обчислення подвійних інтегралів за допомогою криволінійних.

Приклад 8.1.27. Обчислити інтеграл:

1) $\oint_L (x+y)dx$, де L — трикутник з вершинами $A(0;\,0)$, $B(1;\,0)$, $C(0;\,1)$;

2) $\displaystyle\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$;

3) $\int_{AB} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, AB — відрізок, $A(1;\,0;\,1)$, $B(2;\,1;\,3)$;

4) $\oint_L \left(1 - x^2\right)ydx + x\left(1 + y^2\right)dy$, де контур L — коло $x^2 + y^2 = R^2$.

►1. Скористаємося адитивністю інтеграла і запишемо його як суму трьох інтегралів:

$$\oint_L (x+y)dx = \int_{AB}(x+y)dx + \int_{BC}(x+y)dx + \int_{CA}(x+y)dx.$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо.

На відрізку AB $y=0,\ x\in[0;1]$, тому $\int_{AB}(x+y)dx = \int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

На ділянці BC $y = 1-x$, але, щоб пройти у напрямі від B до C, x має змінюватися від 1 до 0.

Тому $\int_{BC}(x+y)dx = \int_1^0 (x+1-x)dx = x\Big|_1^0 = -1$.

На ділянці CA інтеграл дорівнює нулю, бо $x = 0$, звідки $dx = 0$.

Додаючи знайдені значення інтегралів, знаходимо остаточно:

$$\oint_L (x+y)dx = \frac{1}{2} - 1 + 0 = -\frac{1}{2}.$$

2. Запис умови задачі «натякає», що інтеграл не залежить від форми кривої інтегрування (бо сама крива не вказана, а лише її початок і кінець). Перевіримо, чи це справді так.

$$P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2};\ Q(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ в усіх точках площини, крім точки (0; 0), то інтеграл не залежить від форми кривої, яка з'єднує точки (3; 4) і (5; 12), якщо ця крива повністю лежить в деякій області, що не містить точку (0; 0).

Очевидно, що така область є, а в ролі кривої інтегрування зручно взяти ламану, ланки якої паралельні координатним осям, наприклад, AMB, де $A(3;4)$, $M(5;4)$, $B(5;12)$. Тоді:

$$\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \int_{AM} \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy + \int_{MB} \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy.$$

Оскільки відрізок AM горизонтальний, на ньому $dy = 0$, а $y = 4$, відрізок MB вертикальний, на ньому $dx = 0$, а $x = 5$, то остаточно знаходимо:

$$\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{xdy+ydx}{x^2+y^2} = \int_3^5 \frac{x}{x^2+16}dx + \int_4^{12} \frac{y}{y^2+25}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+16)\Big|_3^5 + \frac{1}{2}\ln(y^2+25)\Big|_4^{12} = \ln\frac{13}{5}.$$

3. Запишемо параметричні рівняння відрізка AB: $x = t+1$, $y = t,\ z = 2t+1$, $t\in[0;1]$, причому при $t = 0$ маємо точку A, а при $t = 1$ — точку B. Тоді:

$$\int_{AB} y^2dx + z^2dy + x^2dz = \int_0^1 \left(t^2 + (2t+1)^2 + 2(t+1)^2\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \left(7t^2 + 8t + 3\right)dt = \left.\left(\frac{7}{3}t^3 + 4t^2 + 3t\right)\right|_0^1 = \frac{28}{3}.$$

4. Помічаємо, що для цього інтеграла виконуються всі умови, необхідні для формули Гріна. Тому замінимо цей інтеграл по колу подвійним інтегралом по кругу:

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} \left(1-x^2\right)ydx + x\left(1+y^2\right)dy = \iint_{x^2+y^2\le R^2} \left(1+y^2-1+x^2\right)dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le R^2} \left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Переходячи до полярних координат, знаходимо остаточно:

$$\oint_L \left(1-x^2\right)ydx + x\left(1+y^2\right)dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$ ◄

Д. Застосування криволінійного інтеграла до відновлення функції за її диференціалом та до розв'язування диференціальних рівнянь

Якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні в області $D \in R^2$, а вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, то ця функція з точністю до сталої дорівнює $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, де (x_0, y_0) — довільна фіксована точка області D, (x, y) — змінна точка цієї області.

Цим фактом зручно користуватися для відновлення функції за її повним диференціалом.

Приклад 8.1.28. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy = 0$.

►Переконаємося, що це рівняння в повних диференціалах. Справді,

$$P(x,y) = x^2 - 4xy - 2y^2;\ \frac{\partial P}{\partial y} = -4x - 4y.$$

$$Q(x,y) = y^2 - 4xy - 2x^2;\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -4x - 4y.$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ \forall (x;y) \in R^2$, отже $\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто диференціальне рівняння має вигляд $dU(x,y) = 0$, звідки загальний інтеграл рівняння — $U(x,y) = C$, де C — довільна стала. Знайдемо функцію $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int\limits_{(0;0)}^{(x;y)} \left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy.$$

Оскільки цей інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, то візьмемо його по ламаній, яка з'єднує послідовно точки: (0; 0), (x; 0), (x; y).

Будемо мати:

$$U(x,y) = \int\limits_0^x x^2 dx + \int\limits_0^y \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - 2xy^2 - 2x^2 y,$$

а загальний інтеграл рівняння $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - 2xy^2 - 2x^2 y = C$.◄

8.1.4. Застосування інтегралів в задачах геометрії та фізики

А. Інтеграл в задачах геометрії

І. Обчислення площ плоских фігур

1. За допомогою визначеного інтеграла

Якщо плоска фігура обмежена прямими $x = a, x = b, a < b$ і кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причому $f_1(x) \le f_2(x)\ \forall x \in [a,b]$, то її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

У полярних координатах площа фігури, обмеженої променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ та кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, причому $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)\ \ \forall \varphi \in [\alpha, \beta]$, виражається формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi)-\rho_2^2(\varphi)\right)dx.$$

Якщо межа фігури задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площа фігури обчислюється за однією із трьох формул:

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)dt,\quad S=\int_{\alpha}^{\beta}x(t)y'(t)dt,\quad S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(xy'-yx')dt,$$

де α і β — значення параметра t, які відповідають початкові й кінцеві обходу межі в додатному напрямі (при якому фігура залишається зліва).

2. За допомогою подвійного інтеграла площа квадровної області $\overline{D}$ обчислюється за формулою:

$$S_D=\iint_D dxdy.$$

3. За допомогою криволінійного інтеграла

Якщо область $\overline{D}\subset R^2$ обмежена кусково-гладким контуром L, то її площу можна обчислити за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L ydx-xdy.$$

II. Обчислення об'ємів

1. За допомогою визначеного інтеграла

Якщо площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, є неперервною функцією $S(x)$, $x\in[a;b]$, то об'єм цього тіла дорівнює:

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

Зокрема, об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $\left\{(x;y)\in R^2 : a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\right\}$, дорівнює:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

2. За допомогою подвійного інтеграла

Об'єм циліндричного тіла, обмеженого знизу площиною xOy, зверху графіком функції $f(x, y)$, бічна поверхня якого утворена твірною, що рухається паралельно осі Oz, вздовж межі області $\overline{D}\subset R^2$, обчислюється за формулою:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

3. За допомогою потрійного інтеграла об'єм кубовної області $\overline{G}$ обчислюється за формулою:

$$V_G=\iiint_G dxdydz.$$

III. Обчислення довжини дуги кривої

1. За допомогою криволінійного інтеграла

Довжина спрямлюваної кривої L дорівнює $l=\int_L ds$.

2. За допомогою визначеного інтеграла

Крива, задана рівняннями $x=x(t), y=y(t),\ t\in[\alpha;\beta]$, причому $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні, є спрямлюваною і її довжина $l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$.

Якщо крива задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a;b]$ і $y(x)$ та $y'(x)$ неперервні, то крива спрямлювана і її довжина $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$.

Крива, задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, де $\rho(\varphi)$ та $\rho'(\varphi)$ неперервні, спрямлювана і її довжина

$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi$.

IV. Обчислення площі поверхні

1. За допомогою подвійного інтеграла

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \bar{D}_{xy}$ (тобто проєкцією поверхні в площину xOy є область $\bar{D}_{xy}$), $f(x, y)$ неперервна разом із частинними похідними $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$, то площа цієї поверхні обчислюється за формулою:

$$P = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x,y) + f'^2_y(x,y)}dxdy.$$

Іноді для обчислення площі поверхні її зручно проєктувати на інші координатні площини. Якщо поверхню задано рівнянням $x = g(y,z)$, $(y,z) \in \bar{D}_{yz}$ (тобто її проєкція в площину yOz є область $\bar{D}_{yz}$), причому функції $g(y, z)$, $g'_y(x, y)$ і $g'_z(y, z)$ неперервні в області $\bar{D}_{yz}$, то площа цієї поверхні обчислюється за формулою:

$$P = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + g'^2_y(x,y) + g'^2_z(x,y)}dxdy.$$

Якщо ж поверхню задано рівнянням $y = \varphi(x, z)$, $(x,z) \in \bar{D}_{xz}$ (тобто її проєкція в площину xOz є область $\bar{D}_{xz}$), функція $\varphi(x, z)$ задовольняє аналогічні до попередніх випадків умови, то: $\varphi = \alpha$.

2. За допомогою визначеного інтеграла

За допомогою визначеного інтеграла функції однієї змінної можна обчислювати площу поверхні обертання. Якщо крива, задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, $y(x)$ і $y'(x)$ неперервні, то площа поверхні, утвореної обертанням цієї кривої навколо осі Ox, обчислюється за формулою:

$$P = 2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

Якщо крива, площу поверхні обертання якої навколо осі Ox обчислюємо, задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, і функції $x(t)$, $y(t)$ неперервні разом зі своїми похідними, то:

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Якщо крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, в полярних координатах, $\rho(\varphi)$ та $\rho'(\varphi)$ неперервні, то:

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi.$$

Приклад 8.1.29. Знайти площу області, обмеженої кривою $\rho = 3\sin 2\varphi$ між найбільшим і найменшим суміжними радіусами-векторами.

►Крива задана в полярній системі координат. Щоб її зобразити, проаналізуємо формулу, якою вона задана. Функція $\sin 2\varphi$ періодична з періодом π, тому досить з'ясувати вигляд $\sin 2\varphi$ кривої на проміжку $\varphi \in [0; \pi]$. Оскільки $\rho \geq 0$, то $\sin 2\varphi \geq 0$, звідки знаходимо $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Отже, крива міститься лише у першій і, враховуючи період, у третій чвертях, причому крива у третій чверті може бути отримана із кривої, побудованої у першій чверті, поворотом на π.

Функція $3\sin 2\varphi$ неперервна і диференційовна, тому її графік — суцільна гладка лінія. Для побудови графіка знайдемо кілька його точок (*див. табл.*)

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$
$\rho = 3\sin 2\varphi$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0

Зображення кривої у першій чверті маємо на *рис. 8.1.11* Поворотом на період π дістанемо таку ж «пелюстку» у третій чверті. Усю криву називають «двопелюстковою трояндою».

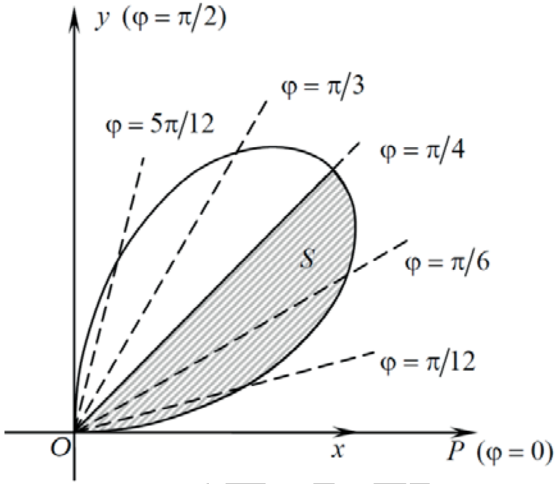


Рис. 8.1.11

Найбільше значення полярного радіуса $\rho = 3$, що відповідає значенню $\varphi = \frac{\pi}{4}$, найменше — $\rho = 0$, що відповідає значенню $\varphi = 0$. Область, площу якої шукаємо, на *рис. 8.1.11* заштрихована.

Обчислимо її:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 9\sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{9}{4}\int_0^{\pi/4}\left(1-\cos 4\varphi\right)d\varphi = \frac{9}{4}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9\pi}{16}. ◄$$

Приклад 8.1.30. Знайти довжину петлі кривої $y = \sqrt{3}t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

►Знайдемо точку самоперетину кривої. Тобто, знайдемо такі 2 значення $\alpha \neq \beta$ параметра t, що $x(\alpha) = x(\beta)$ і $y(\alpha) = y(\beta)$. Маємо систему:

$$\begin{cases} 3\alpha^2 - 1 = 3\beta^2 - 1, \\ \alpha^3 - \alpha = \beta^3 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0, \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 1, \end{cases}$$

звідки знаходимо $\alpha = \pm 1, \beta = \mp 1$.

Отже, на кривій є точка самоперетину, яка відповідає двом значенням параметра $t = 1$ та $t = -1$. Це точка $M_0\left(\sqrt{3} - 1; 0\right)$. Знайдемо ще кілька точок кривої. Наприклад,

$$M_1\left(x\left(-\frac{1}{2}\right); y\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1; \frac{3}{8}\right);$$

$$M_2\left(x(0); y(0)\right) = M_2(-1; 0);$$

$$M_3\left(x\left(\frac{1}{2}\right); y\left(\frac{1}{2}\right)\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1; -\frac{3}{8}\right).$$

Побудуємо ескіз графіка функції (*рис. 8.1.12*).

Точка кривої описує петлю, якщо t змінюється від -1 до 1.

Щоб використати формулу для довжини дуги, знайдемо $x'(t) = 2\sqrt{3}t$ і $y'(t) = 3t^2 - 1$.

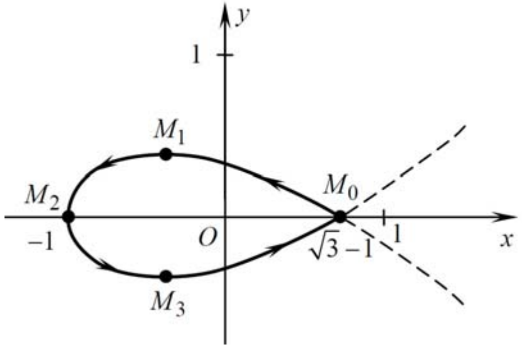


Рис. 8.1.12

Отже, довжина петлі кривої дорівнює:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(2\sqrt{3}t\right)^2+\left(3t^2-1\right)^2}\,dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{9t^4+6t^2+1}\,dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(3t^2+1\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(3t^2+1\right)dt=\left(t^3+t\right)\Big|_{-1}^{1}=4.◄$$

Приклад 8.1.31. Знайти об'єм частини однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, обмеженого площинами $z=-h$, $z=h$.

►Обчислимо площу перерізу гіперболоїда площиною, перпендикулярною до осі Oz. Ця площа є функцією $S(z)$, $z\in[-h;h]$. У перерізі маємо еліпс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,$$

де $z=\text{const}$. Його площа $S(z)=\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$. Отже, шуканий об'єм:

$$V=\int_{-h}^{h}\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left(h+\frac{h^3}{3c^2}\right).◄$$

Приклад 8.1.32. Знайти площу поверхні, яку вирізає на сфері $x^2+y^2+z^2=a^2$ циліндр $x^2+y^2-ax=0$.

►Перепишемо рівняння циліндра так: $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Очевидно, що частини поверхні сфери, вирізані циліндром, симетричні відносно площини xOy, а їх проєкцією у цю площину є круг $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\le\frac{a^2}{4}$ (зазначимо, що не є важливим зобразити на рисунку переріз самих поверхонь, важливо правильно його уявити; зобразити ж доцільно проєкцію частини поверхні, площу якої шукаємо, на відповідну координатну площину). На *рис. 8.1.13* зображено цю проєкцію.

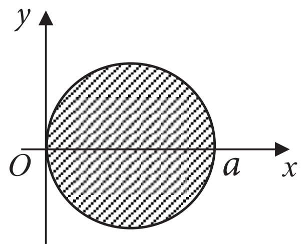


Рис. 8.1.13

Область інтегрування обмежена колом, рівняння якого в полярних координатах $\rho=a\sin\varphi$, $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Ураховуючи, що циліндр вирізає на сфері два однакові фрагменти, які мають лише спільну точку $(a;0;0)$, шукана площа поверхні дорівнює:

$$P = 2\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy\,.$$

Перейдемо у подвійному інтегралі до полярних координат. Виконаємо послідовно ряд перетворень:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.$$

Візьмемо $z > 0$. Тоді $z_x' = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $z_y' = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

або, в полярних координатах: $z_x' = -\dfrac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$, $z_y' = -\dfrac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$.

Тепер, переходячи одразу до повторного інтеграла, маємо:

$$P = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi}\left(\rho\cdot\sqrt{1+\frac{\rho^2}{a^2-\rho^2}}\right)d\rho = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi}\frac{a\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

$$= -a\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi}\left(a^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(a^2-\rho^2\right) = -a\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\Big|_0^{a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= -a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\varphi-1)\,d\varphi = -a^2(-\cos\varphi-\varphi)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi a^2\,.$$ ◄

Приклад 8.1.33. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ та $x^2 + y^2 = 2 - z$.

►Перша поверхня — сфера з центром в точці (0; 0; 1) і радіусом 1, друга — параболоїд обертання з вершиною в точці (0; 0; 2). Знайдемо лінію їх перетину: із системи рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z=0, \\ x^2+y^2=2-z \end{cases}$ маємо: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$ Отже, проєкцією тіла, об'єм якого шукаємо, на площину xOy є круг $x^2 + y^2 \le 1$. Тіло (область G) обмежує зверху параболоїд $z=2-\left(x^2+y^2\right)$, знизу — сфера $z=1-\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}$. Обчислимо об'єм за допомогою потрійного інтеграла: $V=\iiint\limits_G dxdydz$.

Перейдемо до циліндричних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z = z$, $0\le\rho\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $1-\sqrt{1-\rho^2}\le z\le 2-\rho^2$; $dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz$. Маємо:

$$V=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}\rho dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho\left(2-\rho^2-1+\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int\limits_0^1\left(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int\limits_0^1\left(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2}\right)d\left(1-\rho^2\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)^2+\frac{2}{3}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7\pi}{6}.$$ ◄

Б. Інтеграл в задачах фізики

1. Обчислення маси неоднорідних тіл

а) маса матеріальної кривої, заданої рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a; b]$ (або $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$), густина розподілу маси якої $\mu = \mu(x)$ дорівнює:

$$m=\int\limits_a^b \mu(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \quad \left(\text{або } m=\int\limits_\alpha^\beta \mu\left(x(t)\right)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\right);$$

б) маса, розподілена по квадровній (кубовній) області D з густиною $\mu = \mu(x, y)$ ($\mu = \mu(x, y, z)$), дорівнює $m=\iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy$ ($m=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdydz$).

2. Статичні моменти

Статичним моментом матеріальної точки відносно осі називається добуток маси цієї точки на її відстань до осі:

а) статичні моменти відносно координатних осей маси, розподіленої уздовж дуги $y = y(x)$, $x \in [a; b]$ (або $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$), з густиною $\mu = \mu(x)$ дорівнюють:

$$M_x = \int_a^b \mu(x) y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx\,; \quad M_y = \int_a^b \mu(x) x\sqrt{1+y'^2(x)}dx\,;$$

б) статичні моменти відносно координатних осей маси, розподіленої по квадровній області D, з густиною $\mu = \mu(x, y)$ дорівнюють:

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y,z)dxdy; \quad M_y = \iint_D x\mu(x,y,z)dxdy\,;$$

в) статичні моменти відносно координатних площин маси, розподіленої по кубовній області G, з густиною $\mu = \mu(x,y,z)$ дорівнюють:

$$M_{xy} = \iiint_G z\mu(x,y,z)dxdydz; \quad M_{xz} = \iiint_G y\mu(x,y,z)dxdydz;$$

$$M_{yz} = \iiint_G x\mu(x,y,z)dxdydz.$$

III. Координати центра мас

Центром мас системи матеріальних точок називається така точка, що якби в ній зосередити усю масу системи, то статичний момент цієї точки відносно деякої прямої (площини) дорівнював би статичному моменту усієї системи відносно цієї прямої (площини).

Виходячи із цього означення, маємо координати центра мас:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m}, \ \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$

або

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \ \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \ \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

IV. Робота змінної сили по переміщенню матеріальної точки

Робота змінної сили $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ (чи $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$) по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої AB від точки A до точки B обчислюється за формулою:

$$W = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$(\text{чи } W = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,).$$

Приклад 8.1.34. Знайти масу частини кулі $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, що міститься в першому октанті, якщо в кожній її точці густина дорівнює відстані цієї точки до площини xOy.

►Густина є функцією точки і дорівнює $\mu(x, y, z) = z$. Обчислимо масу за формулою $m = \iiint_G \mu(x,y,z)dxdydz = \iiint_G zdxdydz$,

де область G обмежена частиною сфери $x^2+y^2+z^2 = R^2$ ($x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$) і координатними площинами.

Перейдемо у потрійному інтегралі до сферичних координат: $x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\theta,\quad 0 \le r \le R,\quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$; $dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta$.

Будемо мати:

$$m = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R r^3 \sin\theta\cos\theta dr = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \cdot \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{16}. ◄$$

Приклад 8.1.35. Знайти статичні моменти відносно координатних осей і центр мас однорідної фігури, яка лежить у першій чверті, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ та осями координат.

►Шукаємо статичні моменти за допомогою подвійних інтегралів. В області $\overline{D}$ інтегрування x та y змінюються в таких межах: змінна x від 0 до a; змінна y від 0 до $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Оскільки фігура однорідна, то можемо вважати, що її густина дорівнює 1.

Отже,

$$M_x=\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy=\int\limits_0^a\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{b^2}{2a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{b^2}{2a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3=\frac{1}{3}ab^2;$$

$$M_y=\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xdy=\int\limits_0^a\left(xy\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx=\frac{b}{a}\cdot\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\cdot\int\limits_0^a\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(a^2-x^2\right)=-\frac{b}{2a}\cdot\frac{2}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a=\frac{1}{3}a^2b.$$

Ураховуючи, що площа еліпса дорівнює πab, а густина фігури $\mu = 1$, знаходимо координати центра мас:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{\frac{1}{3}a^2b}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi};\quad \overline{y}=\frac{M_x}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{\frac{1}{3}ab^2}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.◄$$

8.2. Завдання для самостійної роботи

Невизначений та визначений інтеграли функції дійсної змінної

1. Використовуючи метод розкладу, знайти невизначені інтеграли:

1) $\int(1-x)^2(2x+3)dx$; 2) $\int\frac{\sqrt{x}+2x-5x\sqrt{x}}{3x^2}dx$; 3) $\int\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3}{x\sqrt{x}}dx$;

4) $\int\left(5^x-\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)dx$; 5) $\int\left(\cos x+\frac{2}{\sqrt{9-9x^2}}\right)dx$;

6) $\int(x+1)(x+2)(x+3)dx$; 7) $\int\frac{3^{x+1}-2^x}{6^x}dx$;

8) $\int\left(5e^x-\frac{1}{\sin^2 x}+x\sqrt[3]{x}-7\right)dx$; 9) $\int\frac{x^2-5x+6}{x-2}dx$;

10) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$; 11) $\int\left(4+\sqrt{3-x^2}\right)^2dx$; 12) $\int\left(1+ctg^2x\right)dx$.

2. Використовуючи метод заміни змінної, знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{\cos x}{\sin^9 x}dx$; 2) $\int\frac{dx}{4-5x}$; 3) $\int 3xe^{x^2}dx$; 4) $\int 2x\sqrt{a^2-x^2}dx$;

5) $\int\frac{x^3dx}{x^8+1}$; 6) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$; 7) $\int\frac{1+tgx}{\cos^2 x}dx$; 8) $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;

9) $\int\frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; 10) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[4]{5-x^3}}$; 11) $\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$;

12) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x+3}}$.

3. Використовуючи формулу інтегрування за частинами, знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \ln x dx$; 2) $\int \ln^2 x dx$; 3) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; 4) $\int \arccos x dx$;

5) $\int 3xe^{5x-1} dx$; 6) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 7) $\int \arcsin^2 x dx$; 8) $\int arctgx dx$;

9) $\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}} dx$; 10) $\int (3x+2)\sin 5x dx$; 11) $\int (x^2-x+1)\cos x dx$;

12) $\int \cos\sqrt{2x} dx$.

4. Проінтегрувати раціональні дроби:

1) $\int \frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} dx$; 2) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$; 3) $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+5)}$;

4) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; 5) $\int \frac{x^2+1}{x^3(x-2)} dx$; 6) $\int \frac{5x+1}{(x-1)(x^2+2)} dx$;

7) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-x+1)}$; 8) $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^2(2x^2-3x+2)}$;

9) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2(x+2)}$; 10) $\int \frac{x+2}{x^2-5x+6} dx$;

11) $\int \frac{x^2-1}{x^3+2x^2-8x} dx$; 12) $\int \frac{dx}{x^4-x^2-12}$; 13) $\int \frac{x-3}{x^4-1} dx$.

5. Знайти інтеграли від ірраціональних та тригонометричних виразів:

1) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+2\sqrt[3]{x}}$; 3) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2\sqrt{x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+12x-3}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}$;

8) $\int \frac{\cos x}{\sin x+2\cos x} dx$; 9) $\int \frac{dx}{4+3tgx}$; 10) $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$;

11) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$; 12) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$; 13) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx$;

14) $\int \sin 3x \cos 5x dx$.

6. Застосовуючи потрібний метод та формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int_1^2 (3x-5)\ln^2 x\,dx$; 3) $\int_4^9 \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x}$;

4) $\int_0^{\pi\backslash 2} \sin^3 x\cos x\,dx$; 5) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$; 6) $\int_4^9 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$;

7) $\int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$; 8) $\int_0^1 (3x^2+2e^{2x-1})dx$; 9) $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$;

10) $\int_1^2 (x+1)\ln^2 x\,dx$; 11) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$; 12) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

13) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+8x^3}\,dx$; 14) $\int_1^2 (x+2)\ln(x+1)dx$; 15) $\int_2^3 \frac{dx}{x(x+1)}$;

16) $\int\limits_0^1 (3x^2+e^{4x+1})\,dx$; 17) $\int\limits_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+7}}$; 18) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx$;

19) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; 20) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; 21) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$;

22) $\int\limits_1^2 x\ln x dx$; 23) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$; 24) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

25) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx.$

7. Обчислити невласні інтеграли або довести, що вони розбіжні:

1) $\int\limits_{-1}^3 \frac{dx}{(2x-2)^5}$; 2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+5}$; 3) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$;

4) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{e^x-3}{e^x}dx$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 6) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2}$; 7) $\int\limits_{3\backslash 2}^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$;

8) $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 9) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^3}}$; 10) $\int\limits_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

11) $\int\limits_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$; 12) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^3+8)^3}}$.

Інтегрування функції комплексної змінної

1. Обчислити інтеграли від функції $f(z)$ вздовж кривої $z=\gamma(t)$:

1) $I=\int\limits_{|z|=1} |z|^2\,dz$; 2) $I=\int\limits_{\gamma} z\,dz$, де γ — радіус-вектор точки $1+i$;

3) $I=\int\limits_{\gamma}(z+\overline{z})\,dz$, де γ — радіус-вектор точки 1;

4) $I=\int\limits_{\gamma}\overline{z}\,dz$, де γ — півколо $|z|=R,\ 0<\arg z<\pi$;

5) $I=\int\limits_{\gamma}\overline{z}\,dz$, де γ — півколо $|z|=R,\ \frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$;

6) $I=\int\limits_{\gamma}(z-\overline{z})\,dz$, де γ — відрізок $[1+i;\,0]$;

7) $I=\int\limits_{\gamma}(z-\overline{z})\,dz$, де γ — крива $\gamma(t)=t^3+it^2,\quad t\in[-1;1]$;

8) $I=\int\limits_{\gamma}e^z dz$, де γ — крива $\gamma(t)=t+it,\quad t\in[-1;1]$;

9) $I=\int\limits_{\gamma}z\,\overline{z}dz$, де γ — крива $\gamma(t)=t+it,\quad t\in[-1;1]$;

10) $I=\int\limits_{\gamma}\left(\overline{z}\right)^2 dz$, де γ — крива $\gamma(t)=t^2+it,\quad t\in[-1;1]$;

11) $I=\int\limits_{\gamma}ze^{z^2}dz$, де γ — відрізок $[-i;\,i]$;

12) $I=\int\limits_{\gamma}z\sin\left(z^2\right)dz$, де γ — відрізок $[0;\,2i]$;

13) $I=\int\limits_{\gamma}z\cos\left(z^2\right)\sin\left(z^2\right)dz$, де γ — відрізок $[-i;\,i]$;

14) $I=\int\limits_{\gamma} e^{\overline{z}}dz$, де γ — ламана, що з'єднує точки 0; 1; 1 + *i*;

15) $I=\int\limits_{\gamma} ze^{z^2}dz$, де γ — ламана, що з'єднує точки 0; 1; 1 + *i*.

2. Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші:

1) $I=\int\limits_{|z+i|=3}\frac{\cos z}{z+i}dz$; 2) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2+1}dz$; 3) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^2+1}dz$;

4) $I=\int\limits_{|z-i|=2}\frac{e^z\cos z}{z^2+1}dz$; 5) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{(z+1)(z+3)}dz$;

6) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}dz$; 7) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)}dz$;

8) $I=\int\limits_{|z|=4}\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz$; 9) $I=\int\limits_{|z|=4}\frac{z}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-9\right)}dz$;

10) $I=\int\limits_{|z+1|=1}\frac{dz}{\left(z+1\right)\left(z-1\right)^3}dz$.

3. Обчислити за допомогою теорії лишків інтеграли вздовж додатньо орієнтованих кривих:

1) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{z\sin z dz}{\left(z+1\right)\left(z-1\right)^2}$; 2) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z+1)^2(z-10)}$;

3) $I=\int\limits_{|z+i|=1}\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$; 4) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z+1)^2(z-1)}$;

5) $I=\int\limits_{|z-1|=2}\frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2}$; 6) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\, dz}{z^2+1}$; 7) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin^2 z\, dz}{z^2+1}$;

8) $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{z\, dz}{\left(z^3+1\right)^2}$; 9) $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{\frac{1}{z}}dz}{z^2+4}$; 10) $I=\int\limits_{|z|=100}\frac{z\, dz}{z^{100}+1}$.

4. Обчислити невласні інтеграли:

1) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2}$; 2) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin 2x\, dx}{x^2+2x+2}$;

3) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}\, dx}{x^2+2x+2}$; 4) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^5\sin 2x\, dx}{x^2+4x+5}$;

5) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x\cos 3x\, dx}{x^2+2x+2}$; 6) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2}$;

7) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x\, dx}{x^2+2x+2}$; 8) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\cos 2x\, dx}{x^2+2x+2}$;

9) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x\, dx}{x^2-2x+10}$; 10) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x\, dx}{x^2+4}$.

Кратні та криволінійні інтеграли

1. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

   1) $\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;

   2) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f(x,y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f(x,y)dy$;

   3) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{3y} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{4-y^2} f(x,y)dx$;

   4) $\int_{0}^{2} dx \int_{0}^{x^3} f(x;y)dy + \int_{2}^{4} dx \int_{0}^{10-x} f(x;y)dy + \int_{4}^{7} dx \int_{x-4}^{10-x} f(x;y)dy$.

2. Записати подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$, де D — паралелограм з вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(5, 4)$, $C(4, 2)$, у вигляді суми повторних інтегралів з найменшою кількістю доданків.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_D (x+y+z)dxdydz$ по області D, обмеженій площинами $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_D zdxdydz$ по області D, обмеженій площинами $x=0,\ y=0, z=0, x+y+z-1=0$.

5. Обчислити інтеграли:

   1) $\int_L \frac{ds}{x-y}$, де L — відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$ між точками $A(0, -2)$ та $B(4, 0)$;

   2) $\int_L ydx + xdy$, де L — чверть кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$;

   3) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$.

6. Переконатися, що криволінійний інтеграл $\int_{AB} (2xy-2y^2+3)dx + x(x-4y)dy$ не залежить від форми кривої інтегрування, та обчислити його, якщо $A(0, 0)$, $B(1, 2)$.

7. За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл

$$\oint_{x^2+y^2=1} (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy.$$

8. Переконатися, що даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, та відновити (двома способами) цю функцію:

   1) $(20x^3-21x^2y+2y)dx + (3+2x-7x^3)dy$;

   2) $\frac{x+y}{xy}dx + \frac{y-x}{y^2}dy$;

   3) $-\left(\frac{1}{2}\cos 2y + y\sin 2x\right)dx + \left(x\sin 2y + \cos^2 x + 1\right)dy$;

   4) $e^{x-y}(1+x+y)dx + e^{x-y}(1-x-y)dy$;

   5) $\frac{x\ln y + y}{x}dx + \frac{y\ln x + x}{y}dy$;

   6) $\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}-3\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right)dy$;

   7) $(e^{xy}+xye^{xy}+2)dx + (x^2e^{xy}+1)dy$.

Застосування інтегралів в задачах геометрії та фізики

1. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y=3+2x-x^2,\ y=x+1$; 2) $y=\dfrac{4}{x},\ x=1,\ x=4$;

3) $y=x^3,\ y=4x$; 4) $y=4-x^2,\ y=x^2-2x$;

5) $y=\sqrt{x},\quad y=x^2$; 6) $y=\sqrt{x},\quad xy=1,\quad x=4$.

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1) $y=\sqrt{x-1},\ y=0,\ x=5$ (навколо Ox);

2) $y=\dfrac{4}{x},\ x=1,\ x=4,\ y=0$ (навколо Ox);

3) $y = 4 - x^2$, $y = 0$ (навколо Ox);

4) $y = x^2$, $y = x^3$ (навколо Oy);

5) $y=\dfrac{x^3}{2},\ x=0,\ y=3$ (навколо Oy);

6) $xy = 8$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 6$ (навколо Oy).

3. Знайти довжину:

1) дуги параболи $y=\dfrac{x^2}{2}$ від точки O (0; 0) до точки $A\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$;

2) однієї арки циклоїди $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$;

3) кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$;

4) дуги кривої $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$;

5) дуги кривої $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $0\le x\le \ln\pi$;

6) дуги кривої $\rho=a\sin\varphi$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad \dfrac{9}{2}z=x^2+y^2$;

2) $x+y=4,\ y=\sqrt{2x},\ z=3y,\ z=0$;

3) $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ z=15x$;

4) $z^2=4-x,\ x^2+y^2=4x$;

5) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=4,\ z\ge 0$;

6) $z=\sqrt{144-x^2-y^2},\ 18z=x^2+y^2$;

7) $z+y=3,\ x=7\sqrt{3y},\ x=2\sqrt{3y},\ z=0$.

5. Знайти площу й масу неоднорідної (з густиною μ) пластини D, обмеженої заданими кривими:

1) $\mu=7x^2+y$, D: $x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\ge 0)$;

2) $\mu=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, D: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y=0,\ x=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$;

3) $\mu=\dfrac{7}{2}x^2+5y$, D: $x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\ge 0)$;

4) $\mu=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$, D: $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ y=0,\ x=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$;

5) $\mu=\dfrac{7}{8}x^2+2y$, D: $x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\ge 0)$;

6) $\mu=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$, D: $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ y=0,\ x=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

6. Знайти масу дуги кривої $\rho=3\sin\varphi,\ \varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, якщо густина в кожній її точці пропорційна відстані до полюса й при $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ дорівнює 3.

7. Знайти масу дуги чверті еліпса $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, яка лежить у першій чверті, якщо густина в кожній її точці дорівнює добутку координат цієї точки.
8. Знайти координати центра мас однорідного тіла V, обмеженого поверхнями:

   1) $6y=x^2+z^2,\ y=8$; 2) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=4$;

   3) $2z=x^2+y^2,\ z=3$; 4) $y=3\sqrt{x^2+z^2},\ x^2+z^2=16,\ y=0$;

   5) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=3$;

   6) $y=3\sqrt{x^2+z^2},\ y=9$;

   7) $z=x^2+y^2,\ y^2+x^2=4,\ z=0$.
9. Знайти координати центра мас однорідного півкола $x^2+y^2=4$, симетричного відносно осі Ox.
10. Знайти координати центра мас однорідного контура сферичного трикутника $x^2+y^2+z^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.
11. Знайти статичні моменти відносно координатних осей дуги астроїди $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t$, розміщеної в першій чверті.
12. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої від точки $M(-4;\,0)$ до точки $N(0;\,2)$.
13. Знайти роботу сили $\vec{F}=x\cdot\vec{i}+\left(x+y\right)\cdot\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по дузі еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.
14. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(x+y\right)\cdot\vec{i}-x\cdot\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кола $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ за годинниковою стрілкою.

Розділ 9. Ряди

9.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

9.1.1. Дійсні та комплексні числові ряди

(Теоретичні відомості про дійсні числові ряди див.: [4], розділ 2, п. 2.3.2).

Якщо маємо ряд з комплексними членами $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, де $c_n=a_n+ib_n$, то він збігається тоді й тільки тоді, коли збігаються обидва дійсні ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, причому, у разі їх збіжності, сума S ряду $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ дорівнює $A + Bi$, де A та B — суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ відповідно.

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|$.

Таким чином, питання про збіжність ряду, члени якого — комплексні числа, зводиться до дослідження збіжності дійсних числових рядів.

Приклад 9.1.1. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність ряд:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{8n-1};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}}{n};$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)};\quad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^4+5}+i\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right).$$

►1. Маємо знакозмінний ряд. Утворимо ряд з модулів його членів: $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Цей додатний ряд дослідимо за ознакою порівняння, порівнюючи із розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (він розбіжний, як узагальнений гармонічний ряд з показником, меншим за одиницю). Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\left[\frac{0}{0}\right]=1$ (одна з важливих границь). Оскільки границя скінченна і відмінна від нуля, то, за ознакою порівняння, утворений ряд з модулів також розбіжний. Звідси можемо зробити висновок, що даний в умові ряд не збігається абсолютно, але не можемо робити висновку про його збіжність чи розбіжність. Щоб з'ясувати, чи він збіжний, застосуємо ознаку Лейбніца. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}=0 \text{ і } \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\ \forall n\in N.$$

Отже, члени ряду спадають до нуля, тому ряд збіжний. Таким чином, даний в умові ряд збігається умовно.

2. Як бачимо, для цього ряду не виконується необхідна умова збіжності. Справді, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{8n-1}=\frac{1}{8}\neq 0$, тобто n-ний член ряду не прямує до нуля. Отже, ряд розбіжний.

3. Це знакозмінний ряд (починаючи із третього його члена), для якого $a_n=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. З'ясуємо, чи спадає послідовність $\{a_n\}$. Для цього знаходимо:

$$a_n-a_{n+1}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}-\frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{n+1}=\frac{n\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n+1}\right)+\cos\frac{\pi}{n}}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{-2n\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cos\frac{\pi}{n}}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{-2n\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)+\cos\frac{\pi}{n}}{n(n+1)}.$$

Одержаний дріб додатний, принаймні, починаючи з деякого натурального n. Справді, якщо $n\to\infty$, то $\frac{2n+1}{n(n+1)}\to 0$ і $\frac{1}{n(n+1)}\to 0$, отже, аргументи обох синусів у чисельнику, а з ними й самі синуси, прямують до нуля. $\cos\frac{\pi}{n}\to 1$, якщо $n\to\infty$. Тому, починаючи з деякого номера, члени ряду спадають. За ознакою Лейбніца, ряд збіжний.

Чи збігається він абсолютно? Розглянемо ряд із модулів членів даного ряду $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$. Очевидно, що при $n\geq 3$: $\frac{1}{2}\leq\cos\frac{\pi}{n}<1$. Тому $\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}\geq\frac{1}{2n}$, а оскільки ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2n}$ розбіжний (як гармонічний ряд), то, за ознакою порівняння, ряд з модулів членів даного в умові ряду розбіжний. Остаточний висновок — ряд збігається умовно.

4. Це додатний ряд. Оскільки функція $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ln^3(x+1)}$ при $x\geq 1$ додатна, непевна і спадна, то застосуємо інтегральну ознаку збіжності. Знаходимо:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}=\int_1^{\infty}\frac{d\ln(x+1)}{\ln^3(x+1)}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{d\ln(x+1)}{\ln^3(x+1)}=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{\ln^{-2}(x+1)}{-2}\bigg|_1^A=-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2(A+1)}-\frac{1}{2\ln^2 2}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}<\infty.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний, тому й даний в умові ряд збіжний.

5. Це ряд, члени якого — комплексні числа. Утворюємо два ряди, члени яких є дійсні та уявні частини членів даного комплексного ряду. Маємо:

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^4+5}$ — додатний, він збіжний, бо, $\dfrac{n^2}{n^4+5}<\dfrac{n^2}{n^4}=\dfrac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ — збіжний (як узагальнений гармонічний ряд з показником, більшим за одиницю);

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ збігається умовно (це ряд Лейбніца).

Отже, даний в умові ряд збігається умовно.◄

Приклад 9.1.2. Скільки членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до 0,001?

►Даний ряд знакозмінний і, за ознакою Лейбніца, збіжний. Його n-ний залишок також є знакозмінним рядом і тому, за тією ж ознакою Лейбніца, по модулю не перевищує свого першого члена, тобто оцінюється за формулою $|r_n|<a_{n+1}$. Тому для забезпечення потрібної точності, при наближеному обчисленні суми ряду, потрібно, щоб виконувалася умова $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}\leq 0{,}001$.

Розв'язуємо цю нерівність: $\dfrac{1}{(n+1)^2}\leq\dfrac{1}{1000}\Leftrightarrow(n+1)^2\geq 1000$.

Звідси знаходимо $n\geq 10\sqrt{10}-1\approx 30{,}6$. Отже, для досягнення потрібної точності необхідно взяти щонайменше 31 член ряду.◄

9.1.2. Дійсні та комплексні степеневі ряди

(Теоретичний матеріал на тему степеневих рядів та деякі ілюстративні приклади див.: частина I, розділ 2, п. 2.3.6).

Розв'яжемо ще кілька задач.

Приклад 9.1.3. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n.$$

►Маємо степеневий ряд, коефіцієнти якого мають вигляд $a_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Шукаємо радіус збіжності, використовуючи формулу Коші-Адамара. Маємо:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}.$$

Отже, інтервал збіжності: $|x| < \frac{1}{e}$, чи те саме, що $\left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$.

Перевіряємо збіжність ряду на кінцях інтервалу. Знайдемо границю n-го члена ряду при $x = \frac{1}{e}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{e^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(e^n\cdot\frac{1}{e^n}\right) = 1 \neq 0.$$

Отже, не виконується необхідна умова збіжності ряду, тому він розбіжний. Очевидно, що й при $x = \frac{1}{e}$ ряд розбіжний з тієї самої причини. Тому областю збіжності ряду є інтервал $\left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$.◄

Приклад 9.1.4. Знайти область збіжності та суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.

►Ряд не є степеневим. Його можна перетворити у степеневий $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ заміною $t = e^{-x}$. Однак розв'язати задачу можна і без такої заміни.

Як бачимо, це додатний ряд, який є геометричною прогресією з першим членом 1 і знаменником $q = e^{-x}$. Тому він збіжний тоді й тільки тоді, коли $e^{-x} < 1$, звідки знаходимо $x > 0$. Отже, область збіжності ряду — проміжок $(0; +\infty)$. Суму ряду знаходимо за формулою суми нескінченної геометричної прогресії:

$$S(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}.◄$$

9.1.3. Розклад функції в степеневий ряд

Розклад функції $f(x)$ дійсної змінної в степеневий ряд ґрунтується на таких двох теоремах.

Теорема 9.1.1

Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R;\ x_0 - R)$ можна подати у вигляді степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто коефіцієнти ряду мають вигляд: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Теорема 9.1.2

Якщо функція $f(x)$ має в інтервалі $(x_0 - R;\ x_0 - R)$ похідні будь-якого порядку і ці похідні обмежені (тобто $\exists M > 0 : \left|f^{(n)}(x)\right| \le M \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ і $\forall x \in (x_0 - R;\ x_0 + R)$), то функцію можна подати у вигляді ряду Тейлора на цьому інтервалі, інакше кажучи, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, $x \in (x_0 - R;\ x_0 + R)$.

Крім того, буває зручно користуватися властивостями степеневого ряду: сума степеневого ряду є неперервною функцією всередині області збіжності; степеневий ряд можна почленно диференціювати та інтегрувати.

Незважаючи на те, що розклади деяких елементарних функцій (e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$) в ряд Маклорена (тобто ряд Тейлора при $x_0 = 0$) нескладно отримати, їх корисно знати напам'ять. Наведемо ці розклади:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1).$$

(Теоретичний матеріал про розклад голоморфної функції комплексної змінної в степеневий ряд з ілюстраціями на прикладах див.: [4], розділ 2, п. 2.3.7; про розклад у ряд Лорана — [4], розділ 2, п. 2.3.8).

Приклад 9.1.5. Розкласти в степеневий ряд функції:

1) $f(x) = \cos^2 x$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

►1. Виконаємо елементарне перетворення виразу, яким задана функція:

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Тепер зручно скористатися відомим розкладом для косинуса:

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots;$$

$$1 + \cos 2x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 2 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} + \frac{2^6 x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \;;$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функція являє собою раціональний дріб. Розкладемо його на елементарні дроби. Запишемо:

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)}.$$

Прирівнявши чисельники, із тотожної рівності $A(x+1) + B(x-2) = x$ знаходимо $A = \dfrac{2}{3}$, $B = \dfrac{1}{3}$ Отже, $\dfrac{x}{x^2 - x - 2} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x+1}$.

Розглядатимемо кожен із дробів правої частини як суму геометричної прогресії ($\dfrac{1}{1-q}$). Щоб встановити знаменник q прогресії, перетворимо ці дроби до потрібного нам вигляду $\dfrac{1}{1-q}$. Матимемо:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2\left(1 - \frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots\right),$$

причому ряд у дужках збігається до функції $\dfrac{1}{1 - \frac{x}{2}}$ тоді й тільки тоді, коли $|q| = \left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$, тобто коли $|x| < 2$.

Аналогічно: $\dfrac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$, якщо $|x| < 1$.

Тепер можемо записати функцію, задану в умові:

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\right) = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n - \frac{1}{2^n}\right)x^n.$$

Областю збіжності цього ряду будуть точки, у яких одночасно виконуються обидві нерівності $|x|<2$ та $|x|<1$. Це інтервал (–1; 1).◄

Приклад 9.1.6. Розкласти за степенями (*x* – 3) функцію $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$.

►Перетворимо вираз, яким задана функція так:

$$\frac{1}{x+5}=\frac{1}{(x-3)+8}=\frac{1}{8\left(1+\dfrac{x-3}{8}\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{8}}.$$

Другий множник перетвореного виразу є сумою геометричної прогресії зі знаменником $q=\dfrac{x-3}{8}$, якщо $\left|\dfrac{x-3}{8}\right|<1$. Тому можемо далі записати:

$$\frac{1}{x+5}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{x-3}{8}+\frac{(x-3)^2}{8^2}-\ldots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{8^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8}(x-3)^n.$$

Область збіжності цього ряду маємо, розв'язавши нерівність $\left|\dfrac{x-3}{8}\right|<1$. Це інтервал (–5; 11).◄

9.1.4. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Розклад функцій у ряд Тейлора дає змогу у багатьох випадках обчислювати з великою точністю значення цих функцій, визначені інтеграли, границі. У таких обчисленнях зберігають *n* перших членів ряду, а решту відкидають. Для оцінки похибки знайденого наближеного значення треба оцінити суму відкинутих членів, тобто залишок ряду $r_n(x)$. Оцінку зазвичай здійснюють так: якщо ряд знакосталий, то його залишок порівнюють з геометричною прогресією, а якщо знакозмінний і його члени задовольняють умови теореми Лейбніца, то використовують оцінку $|r_n(x)|<|a_{n+1}|$, де a_{n+1} — перший з відкинутих членів ряду.

Приклад 9.1.7. Обчислити з точністю ε:

1) $\sin 3^0$, $\varepsilon=10^{-6}$; 2) $\int\limits_0^1 \sin x^2dx$, $\varepsilon=10^{-4}$; 3) ln 0,96, $\varepsilon=10^{-4}$.

►1. Перетворимо 3^0 у радіани: $3^0=\dfrac{\pi}{180}\cdot 3=\dfrac{\pi}{60}$.

Скористаємося розкладом у степеневий ряд функції sin *x*, який запишемо у розгорнутому вигляді:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Підставимо у цей розклад $x=\dfrac{\pi}{60}$. Будемо мати:

$$\sin\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{60}-\frac{\pi^3}{3!\cdot 60^3}+\frac{\pi^5}{3!\cdot 60^5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!\cdot 60^{2n-1}}+\ldots$$

Ряд знакозмінний і його члени спадають до нуля, тобто він задовольняє умови теореми Лейбніца. Простою прикидкою встановлюємо, що уже третій член ряду по модулю менший від заданої точності: $\dfrac{\pi^5}{3!\cdot 60^5}<10^{-6}$. Тому для досягнення заданої точності досить взяти два члени, тобто:

$$\sin 3^0\approx\frac{\pi}{60}-\frac{\pi^3}{3!\cdot 60^3}\approx 0{,}0523599-0{,}0000239=0{,}052336.$$

2. Даний інтеграл не береться у скінченному вигляді. Тому його можна обчислити лише наближено. Знову скористаємося

розкладом синуса у степеневий ряд, у який замість x підставимо x^2. Будемо мати для всіх дійсних x:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(2n-1)}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності в межах від 0 до 1, дістанемо:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} - \frac{x^{15}}{7!\cdot 15} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{5!\cdot 11} - \frac{1}{7!\cdot 15} + \ldots$$

Це знакозмінний ряд, який задовольняє умови теореми Лейбніца. Його четвертий член по модулю менший від заданої точності: $\frac{1}{7!\cdot 15} < 10^{-4}$. Тому досить взяти три перші члени ряду:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{5!\cdot 11} \approx 0{,}33333 - 0{,}02384 + 0{,}00075 \approx 0{,}3102.$$

3. Скористаємося розкладом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1; 1).$$

При $x = -0{,}04$ сума цього ряду дорівнює шуканому значенню логарифма:

$$\ln 0{,}96 = \ln(1 - 0{,}04) = -0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} - \frac{0{,}04^3}{3} - \frac{0{,}04^4}{4} - \ldots - \frac{0{,}04^n}{n} - \ldots =$$

$$= -\left(0{,}04 + \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} + \frac{0{,}04^4}{4} + \ldots + \frac{0{,}04^n}{n} + \ldots \right).$$

Щоб з'ясувати, скільки членів ряду треба взяти, щоб досягти потрібної точності наближеного значення логарифма, розглянемо залишок додатного ряду, записаного у дужках: $r_n = \frac{0{,}04^{n+1}}{n+1} + \frac{0{,}04^{n+2}}{n+2} + \frac{0{,}04^{n+3}}{n+3} + \ldots$. І цей залишок має не перевищувати 10^{-4}.

Зменшимо знаменники усіх дробів, починаючи із другого, замінивши їх на $n + 1$. Дроби від такої заміни збільшаться, тому можна записати нерівність:

$$r_n = \frac{0{,}04^{n+1}}{n+1} + \frac{0{,}04^{n+2}}{n+2} + \frac{0{,}04^{n+3}}{n+3} + \ldots < \frac{0{,}04^{n+1}}{n+1} + \frac{0{,}04^{n+2}}{n+1} + \frac{0{,}04^{n+3}}{n+1} + \ldots$$

Тепер у правій частині нерівності маємо геометричну прогресію зі знаменником, меншим за одиницю, тому праву частину можна обчислити і отримати:

$$r_n < \frac{0{,}04^{n+1}}{n+1} + \frac{0{,}04^{n+2}}{n+1} + \frac{0{,}04^{n+3}}{n+1} + \ldots = \frac{0{,}04^{n+1}}{n+1}(1 + 0{,}04 + 0{,}04^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{0{,}04^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - 0{,}04}.$$

Нерівність $\frac{0{,}04^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1-0{,}04} \le 10^{-4}$ виконується при $n = 3$. Отже,

$$\ln 0{,}96 \approx -0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} - \frac{0{,}04^3}{3} =$$

$$= -0{,}04 - 0{,}0008 - 0{,}00064 \approx -0{,}0414. \blacktriangleleft$$

9.1.5. Розклад функції в ряд Фур'є

Наведемо короткі теоретичні відомості, необхідні для розкладу функції в ряд Фур'є.

1. Дві інтегровні на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються ортогональними на цьому відрізку, якщо $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Систему функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$, … , $f_n(x)$, … називають *ортогональною* на відрізку $[a; b]$, якщо кожні дві функції цієї системи ортогональні на цьому відрізку, тобто коли $\int_a^b f_k(x) f_n(x) dx = 0$, $k \neq n$; $k, n = 1, 2, \ldots$

Прикладом ортогональної на відрізку $[-\pi; \pi]$ системи функцій є тригонометрична система:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

2. Нехай маємо кусково-неперервну 2π-періодичну дійсну функцію $f(x)$. Тригонометричний ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, коефіцієнти якого обчислені за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \ n = 1, 2, \ldots, \qquad (9.1.1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \ n = 1, 2, \ldots,$$

називають *рядом Фур'є* для цієї функції за тригонометричною системою (або тригонометричним рядом Фур'є). Записують цей факт так:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Знак відповідності «~» означає, що інтегровній на відрізку $[-\pi; \pi]$ функції $f(x)$ поставлено у відповідність ряд Фур'є.

3. У яких випадках знак відповідності у наведеному вище записі можна замінити знаком рівності?

Виявляється, що якщо 2π-періодична функція $f(x)$ кусково-неперервна на відрізку $[-\pi; \pi]$, то її можна подати у вигляді

тригонометричного ряду Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, причому цей ряд збігається до функції $f(x)$ у кожній точці її неперервності (тобто сума ряду $S(x) = f(x)$), а в кожній точці розриву x_0 сума ряду Фур'є дорівнює $S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right)$, де $f(x_0 - 0)$ та $f(x_0 + 0)$ — односторонні границі функції $f(x)$ в точці x_0.

4. Якщо функція $f(x)$ $2l$-періодична ($l \neq \pi$), то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

а коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \ n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \ n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad (9.1.2)$$

У цьому нескладно переконатися, увівши у функцію $f(x)$ нову змінну $t = \frac{\pi}{l} x$. Тоді, очевидно, якщо $x \in [-l; l]$, то $t \in [-\pi; \pi]$, і ситуація зводиться до розглянутого вище випадку.

5. Ряд Фур'є для парних функцій не містить членів із синусами (тобто $b_n = 0 \forall n \in N$); ряд Фур'є для непарних функцій не містить членів із косинусами та вільного члена (тобто $a_0 = 0$ і $a_n = 0 \forall n \in N$).

6. Зі сказаного вище випливає алгоритм розкладу кусково-неперервної функції $f(x)$ в ряд Фур'є.

Випадок I. Якщо функція, задана на множині всіх дійсних чисел, періодична, то обчислюємо коефіцієнти Фур'є за формулами (*9.1.2*) (чи (*9.1.1*), якщо період 2π), записуємо ряд Фур'є і множину, на якій його сумою є дана функція.

Випадок II. Якщо функція задана на симетричному відносно нуля проміжку $[-l; l]$, то продовжуємо її періодично ($T = 2l$) на всю числову пряму і зводимо ситуацію до випадку I.

Випадок III. Якщо функція задана на проміжку $[0; l]$, то спочатку продовжуємо її на проміжок $[-l; 0)$ будь-яким способом, аби тільки продовжена функція залишилася кусково-неперервною, далі поширюємо її періодично на всю числову пряму і зводимо ситуацію до попередніх випадків.

Випадок III_1. Якщо потрібно функцію, задану на проміжку $[0; l]$, розкласти лише за синусами, то на проміжок $[-l; 0)$ її слід продовжити непарним способом (тобто так, щоб продовжена функція була непарною); для цього графік даної функції симетрично відображаємо відносно початку координат. Далі періодично поширюємо на усю вісь і діємо як у випадку I.

Випадок III_2. Якщо потрібно функцію, задану на проміжку $[0; l]$, розкласти лише за косинусами, то на проміжок $[-l; 0)$ її слід продовжити парним способом (тобто так, щоб продовжена функція була парною); для цього графік даної функції симетрично відображаємо відносно осі ординат. Далі періодично поширюємо на усю вісь і діємо як у випадку I.

Випадок III_3. Якщо потрібно функцію, задану на проміжку $[0; l]$, розкласти за синусами і косинусами, то на проміжок $[-l; 0)$ її слід продовжити так, щоб продовжена функція не була ні парною, ні непарною; для цього доцільно покласти $f(x) = 0 \forall x \in [-l; 0)$. Далі періодично поширюємо на усю вісь і діємо як у випадку I.

Випадок IV. Якщо функція задана на довільному проміжку $[a; b]$, то спочатку продовжуємо її на симетричний відносно нуля проміжок і цим самим зводимо ситуацію до одного з попередніх випадків.

Приклад 9.1.8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ вказаним способом і на вказаному проміжку:

1) $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0; \pi], \\ 0, x \in [-\pi; 0); \end{cases}$

2) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - x, \ x \in [0; \pi]$ (за косинусами);

3) $f(x) = \cos x, \ x \in [0; \pi]$ (за синусами);

4) $f(x) = \begin{cases} -1, x \in [-3; -1], \\ 2x, x \in (-1; 3]. \end{cases}$

►1. Функція, задана на симетричному відносно нуля проміжку, кусково-неперервна, ні парна, ні непарна. Продовжимо її періодично ($T = 2\pi$) на всю числову пряму (*рис. 9.1.1*). Позначимо отриману періодичну функцію $F(x)$.

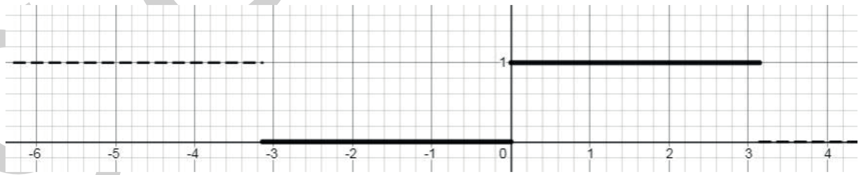


Рис. 9.1.1. Графік продовженої на всю пряму функції

Шукаємо коефіцієнти Фур'є за формулами (*9.1.1*). Маємо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) = \frac{1}{\pi}\cdot x\Big|_0^{\pi} = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} 1\cos nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(0 + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = 0.$$

(Бачимо, що усі коефіцієнти a_n, крім a_0, дорівнюють нулю. Подумайте, як це пояснити. Чи можна було цей результат побачити ще до обчислення коефіцієнтів?).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} 1 \sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(0 - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ — парне}, \\ \dfrac{2}{n\pi}, & n \text{ — непарне}. \end{cases}$$

Оскільки наша функція на проміжку $[-\pi; \pi]$ збігається зі сконструйованою періодичною функцією, то:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x + \ldots\right) \forall x \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi).$$

У точках $\pm\pi$ та 0 значення функції не дорівнюють сумі ряду (бо це точки розриву функції). Справді, $f(-\pi) = 0$, а сума ряду $S(-\pi) = \frac{1}{2}$; $f(0) = f(\pi) = 1$, а сума ряду $S(0) = S(\pi) = \frac{1}{2}$. Частинна сума отриманого ряду (при $n = 9$) зображена на *рис. 9.1.2.*

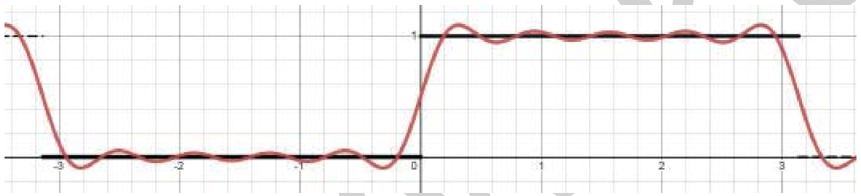


Рис. 9.1.2. Наближення функції рядом Фур'є

2. Оскільки функція має бути розкладена в ряд лише за косинусами, то її слід продовжити на проміжок $[-\pi; 0)$ парним способом, а далі періодично ($T = 2\pi$) поширити на всю числову пряму (*рис. 9.1.3*). Позначимо отриману періодичну функцію $F(x)$.

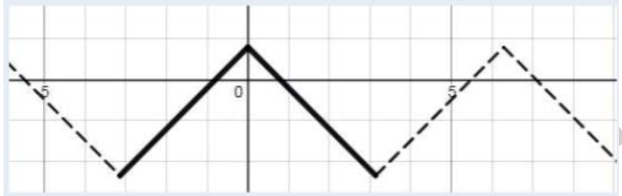


Рис. 9.1.3. Графік продовженої на всю пряму функції

Шукаємо коефіцієнти Фур'є за формулами (*9.1.1*). Маємо, ураховуючи, що функція парна:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos nx dx.$$

Цей інтеграл беремо частинами, позначивши $u = \frac{\pi}{4} - x$, $dv = \cos nx dx$. Тоді $du = -dx$, $v = \frac{1}{n}\sin nx$. Продовжуючи інтегрування, маємо:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi n}\left(0 - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\left(1 - \cos n\pi\right).$$

Усі коефіцієнти b_n дорівнюють нулю, бо функція парна і ряд Фур'є не містить синусів.

Тому ряд Фур'є для даної в умові функції, яка на проміжку $[0; \pi]$ збігається зі сконструйованою періодичною функцією $F(x)$, має вигляд: $f(x) = -\frac{\pi}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos n\pi}{\pi n^2}\cos nx$, причому знак рівності має місце для всіх $x \in [0; \pi]$, бо функція $F(x)$ неперервна. Частинна сума отриманого ряду (при $n = 2$) зображена на *рис. 9.1.4.*

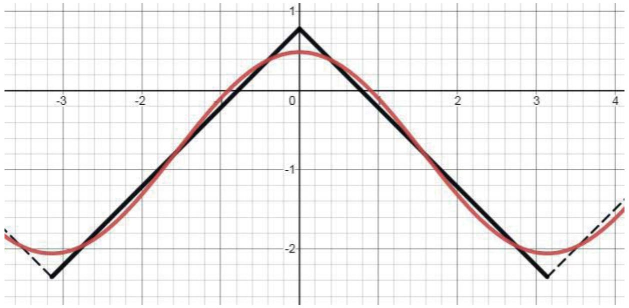


Рис. 9.1.4. Наближення функції рядом Фур'є

3. Оскільки функцію потрібно розкласти в ряд Фур'є за синусами, то продовжимо її на проміжок $[-\pi; 0)$ непарним способом, а далі періодично ($T = 2\pi$) поширимо на всю числову пряму (*рис. 9.1.5*). Позначимо отриману періодичну функцію $F(x)$.

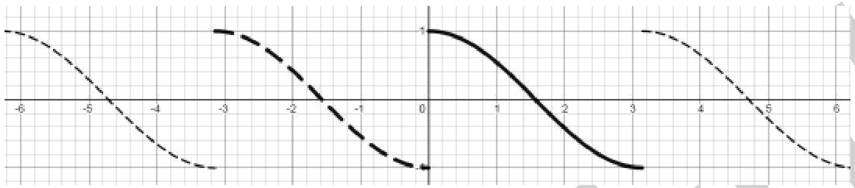


Рис. 9.1.5. Графік продовженої на всю пряму функції

Запишемо аналітично функцію $F(x)$ на проміжку $[-\pi; \pi]$:

$$F(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[0;\pi],\\ -\cos x, & x\in[-\pi;0).\end{cases}$$

$F(x)$ непарна, тому усі коефіцієнти при косинусах та вільний член дорівнюють нулю. За формулою із (*) маємо:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\cos x\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos x\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\big(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\big)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\big(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\big)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{2n(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)}.$$

Отже, $\cos x=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\sin nx,\ \forall x\in(0;\pi)$. На кінцях інтервалу сума ряду не дорівнює значенню косинуса, бо сконструйована періодична на всій осі функція в точках 0 та π не є неперервною. Справді, $S(0)=S(\pi)=0$, натомість $f(0)=\cos 0=1$, $f(\pi)=\cos\pi=-1$.

Частинна сума отриманого ряду (при n = 0) зображена на *рис. 9.1.6*.

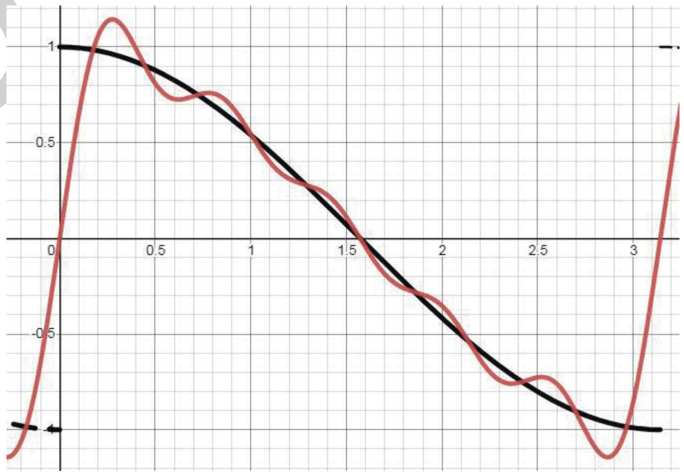


Рис. 9.1.6. Наближення функції рядом Фур'є

4. Дана функція, задана на симетричному відносно нуля проміжку, є ні парною, ні непарною. Поширимо її періодично ($T = 2l$, $l = 3$) на всю числову пряму (*рис. 9.1.7*).

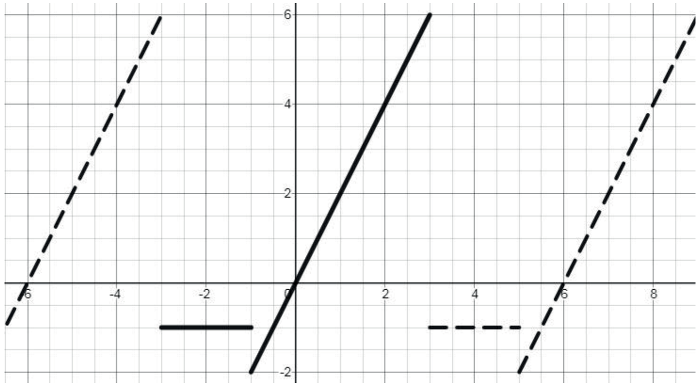


Рис. 9.1.7. Графік продовженої на всю пряму функції

Коефіцієнти Фур’є шукаємо за формулами (*9.1.2*).

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{-1}(-1)dx+\int_{-1}^{3}2xdx\right)=\frac{1}{3}\left(-x\Big|_{-3}^{-1}+x^2\Big|_{-1}^{3}\right)=2;$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left(-\int_{-3}^{-1}\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-1}^{3}2x\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{-1}+\begin{bmatrix}u=2x\Rightarrow du=2dx,\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx,\\ v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{bmatrix}+\frac{6x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-1}^{3}-\frac{6}{n\pi}\int_{-1}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{3}{n\pi}\sin n\pi+\frac{18}{n\pi}\sin n\pi+\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-1}^{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{18}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{36}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\left(1-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Аналогічно знаходимо:

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{3}-7\cos n\pi+\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Записуємо ряд:

$$f(x)=1+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\left(1-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+$$

$$+\frac{1}{n}\left(-\cos\frac{n\pi}{3}-7\cos n\pi+\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi x}{3},\ \ \forall x\in(-3;-1)\cup(-1;3).◄$$

9.2. Завдання для самостійної роботи

Дійсні та комплексні числові ряди

1. Дослідити на збіжність додатний ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{200n-1}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n n!}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

2. Дослідити на абсолютну (умовну) збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^3+3n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{n^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{n^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^{n+1}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}$.

3. Довести збіжність ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\pi n}}{n^2+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\pi/n}}{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}+e^{in}}{n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{e^{i\pi n/2}}{n^2-2n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i5\pi n/6}}{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{3^n}$.

Дійсні та комплексні степеневі ряди

1. Знайти область збіжності ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{nn^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n10^{n-1}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}x^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n5^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n x^n$.

2. Знайти круг збіжності комплексного степеневого ряду:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}z^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{5^{2n}+1}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n\left(z-2i\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n 2\right)^n\left(z+i\right)^n$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}\left(z-i\right)^n$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(3^n+2^n\right)\left(z+2i\right)^n$.

3. Знайти розклад у степеневий ряд функцій в околах вказаних точок $z=z_0$ та визначити область збіжності отриманих рядів:

1) $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$, $z_0=0$; 2) $f(z)=z\sin(z+1)$, $z_0=0$, $z_0=-1$;

3) $f(z)=\frac{z^2+1}{(1-z)^2}$, $z_0=0$; 4) $f(z)=\cos(z+2)$, $z_0=0$, $z_0=-2$;

5) $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=0$; 6) $f(z)=\sin z\cdot\cos(z+2)$, $z_0=0$;

7) $f(z)=\frac{1}{z+5}$, $z_0=0$, $z_0=2$; 8) $f(z)=\sin z\cdot\cos 2z$, $z_0=0$.

Застосування рядів до наближених обчислень

1. Знайти наближене значення:

   1) $\cos 15°$ з точністю до 0,001; 2) $\ln 1{,}2$ з точністю до 0,001;

   3) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ з точністю до 0,001;

   4) $\displaystyle\int_0^{1} \sin x^2\,dx$ з точністю до 0,001;

   5) $\dfrac{1}{\sqrt[20]{e^7}}$ з точністю до 0,001;

   6) $\sin 0{,}4$ з точністю до 0,001;

   7) $\displaystyle\int_0^{0{,}1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ з точністю до 0,001;

   8) $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,001;

   9) $\sqrt[5]{36}$ з точністю до 0,001;

   10) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ з точністю до 0,001.

Ряд Лорана

1. Знайти кільце збіжності ряду Лорана:

   1) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} z^n$; 2) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{5^{2n}+1}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{4^n}$;

   4) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$; 5) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n} z^n$;

   6) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(5+(-1)^n 2^n\right)\left(z+2i\right)^n$; 7) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{e^n+e^{-n}}$.

2. Знайти розклад в ряд Лорана функцій в околі вказаних точок та знайти їх області збіжності:

   1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=0$, $z_0=1$, $z_0=\infty$;

   2) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$, $z_0=1$, $z_0=3$, $z_0=\infty$;

   3) $f(z)=\dfrac{z^4}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=0$, $z_0=1$, $z_0=\infty$;

   4) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$, $z_0=0$, $z_0=i$, $z_0=2$;

   5) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z^2-4)}$, $z_0=1$, $z_0=2$, $z_0=\infty$;

   6) $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=1$, $z_0=2$, $z_0=\infty$;

   7) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0=-1$, $z_0=-2$, $z_0=\infty$;

   8) $f(z)=\dfrac{(z-1)^2}{(z+1)(z+2)}$, $z_0=0$, $z_0=-1$, $z_0=-2$.

3. Знайти всі особливі точки функції та визначити їх тип:

   1) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$; 2) $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z}$;

   3) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)}$; 4) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}e^z$;

   5) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z+2)}$; 6) $f(z)=\dfrac{1}{z+2}\sin\left((z+2)^2\right)$;

   7) $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$; 8) $f(z)=\sin z\sin\dfrac{1}{z}$.

Ряд Фур'є за тригонометричною системою

1. Розкласти в ряд Фур'є функцію:

1) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi;0),\\ 1, & x\in(0;\pi);\end{cases}$ 2) $f(x)=|x|,\ x\in(-2;2)$;

3) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\pi;0),\\ 3, & x\in(0;\pi);\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\pi;0),\\ x, & x\in(0;\pi).\end{cases}$

2. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію:

1) $f(x)=\pi-x$ на проміжку $(0;\pi)$;

2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0;\pi),\\ 0, & x\in(\pi;2\pi);\end{cases}$

3) $f(x)=e^x$ в інтервалі $(0;\pi)$;

4) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ в інтервалі $(0;\pi)$.

3. Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію:

1) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ в інтервалі $(0;\pi)$;

2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0;\pi),\\ 0, & x\in(\pi;2\pi).\end{cases}$

4. Розкласти в ряд Фур'є за синусами і косинусами функцію:

1) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ в інтервалі $(0;\pi)$;

2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0;\pi),\\ 0, & x\in(\pi;2\pi).\end{cases}$

Розділ 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

10.1. Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язаних задач

Диференціальне рівняння — це рівняння, що містить похідні або диференціали невідомої функції та, можливо, незалежні змінні і саму невідому функцію.

Розрізняють два види диференціальних рівнянь: звичайні диференціальні рівняння (невідома функція є функцією однієї змінної) та диференціальні рівняння в частинних похідних (невідома функція є функцією багатьох змінних).

Порядком диференціального рівняння є порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить в дане рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка диференційовна функція $y = y(x)$, яка при підстановці у дане рівняння перетворює його у тотожність. Так, наприклад, функція $y = \sin x$ є розв'язком рівняння $y'' + y = 0$. Дійсно, для будь-яких x маємо: $(\sin x)'' + \sin x = (\cos x)' + \sin x = -\sin x + \sin x \equiv 0$.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою*. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням даного рівняння.

Основною задачею теорії інтегрування диференціального рівняння є знаходження *всіх* його розв'язків та дослідження їх властивостей.

Розв'яжемо диференціальне рівняння другого порядку $y'' = x$:

$$(y')' = x \Rightarrow y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y = \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Розв'язок $y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$ називається ***загальним*** розв'язком рівняння $y'' = x$. Надаючи будь-яких значень сталим C_1 та C_2, із загального розв'язку завжди можна отримати *частинний* розв'язок відповідного рівняння.

Якщо в загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку можна представити у вигляді $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, то загальним розв'язком буде функція виду $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, а *загальним інтегралом* — функція виду $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$. Графіком загального розв'язку є сімейство (сукупність) інтегральних кривих.

На практиці часто виникає потреба виокремити із сімейства інтегральних кривих конкретну криву, що проходить через точку з наперед заданими координатами. Дана задача називається *задачею Коші*, і для диференціального рівняння n-го порядку $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ вона полягає у відшукуванні частинного розв'язку, що задовольняє початкові умови: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0^{(1)}$, $y''(x_0) = y_0^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку формулює теорема Пікара (*див.: частина 1, розділ 2, п. 2.4.1*).

Розв'язок диференціального рівняння n-го порядку, в кожній точці якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші для цього рівняння, називається *особливим розв'язком*.

Очевидно, що особливі розв'язки не можна отримати із загального за жодних числових значень довільних параметрів.

Якщо розв'язки диференціального рівняння вдається виразити через елементарні функції або через інтеграли від елементарних функцій, то говорять, що такі диференціальні рівняння *інтегруються в квадратурах*. У даному розділі розглядаються саме такі

рівняння, хоча значно більше диференціальних рівнянь, які не інтегруються у квадратурах, і для представлення їх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

10.1.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Розглянемо звичайні *диференціальні рівняння першого порядку*, які у загальному вигляді задаються співвідношенням $F(x, y, y') = 0$ або $y' = f(x, y)$.

Найпростішим прикладом диференціальних рівнянь першого порядку, що інтегруються у квадратурах, є *рівняння з відокремлюваними змінними*. До них належать рівняння виду $f(x)dx = g(y)dy$ або такі, що зводяться до даного вигляду за допомогою елементарних алгебраїчних перетворень.

Наприклад, $f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy \Rightarrow f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy \,|:$ $(g_1(y) \cdot f_2(x)) \Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$.

Для того щоб знайти загальний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними, потрібно знайти інтеграл від обох частин:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy \Rightarrow F(x) + C_1 = G(y) + C_2 \Rightarrow F(x) = G(y) + C.$$

Приклад 10.1.1. Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку: $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

►$x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0 \Rightarrow x(y^2 + 1)dx = y(x^2 - 1)dy \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(y^2+1)dx = y(x^2-1)dy \,|: \Rightarrow (y^2+1):(x^2-1) \Rightarrow \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{y}{y^2+1}dy \Rightarrow$$

$$\int\frac{x}{x^2-1}dx = \int\frac{y}{y^2+1}dy \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2y}{y^2+1}dy \Rightarrow \int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \int\frac{d(y^2+1)}{y^2+1} \Rightarrow \ln\left|x^2-1\right| = \ln\left|y^2+1\right| + \ln C \Rightarrow \ln\left|x^2-1\right| = \ln C(y^2+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = C(y^2+1).$$◄

Приклад 10.1.2. Розв'язати задачу Коші: $y' = -y^2$, $y(1) = 1$.

►Враховуючи, що $\dfrac{dy}{dx} = y'$, отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \,\Big|\cdot dx : y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -dx \quad \int y^{-2}dy = -\int dx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y} = -x + C.$$

Підставляючи початкові дані $x_0 = 1$ та $y_0 = 1$ у загальний інтеграл рівняння, отримаємо: $-\dfrac{1}{1} = -1 + C$. Звідси: C = 0.

Розв'язок задачі Коші набуває вигляду: $-\dfrac{1}{y} = -x$ або $\dfrac{1}{y} = x$.◄

Диференціальне рівняння виду $y' = f(x, y)$, де $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового порядку, називається *однорідним диференціальним рівнянням першого порядку*.

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку заміною $\dfrac{y}{x} = z(x)$ зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 10.1.3. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$.

►Перевіримо умову однорідності нульового порядку для правої частини заданого рівняння:

$$f(tx, ty) = \frac{t^2y^2 - t^2x^2}{2tx \cdot ty} = \frac{t^2(y^2 - x^2)}{2t^2xy} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = f(x, y).$$

Представимо задане рівняння у вигляді $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{\dfrac{y^2}{x^2} - 1}{2\dfrac{y}{x}}.$$

Після заміни $\dfrac{y}{x} = z(x)$ отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними $z + xz' = \dfrac{z^2 - 1}{2z}$. Звідси:

$$xz' = \frac{z^2 - 1}{2z} - z = \frac{z^2 - 1 - 2z^2}{2z} = -\frac{z^2 - 1}{2z}$$

$$x\frac{dz}{dx} = -\frac{z^2 + 1}{2z} \;\Rightarrow\; x\frac{dz}{dx} = -\frac{z^2 + 1}{2z}\,\Big|\cdot dx : x : \frac{z^2 + 1}{2z} \;\Rightarrow\; \frac{2z}{z^2 + 1}dz =$$

$$= -\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{2z}{z^2 + 1}dz = -\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{d(z^2 + 1)}{z^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln(z^2 + 1) =$$

$$= -\ln|x| + C.$$

Враховуючи заміну $\dfrac{y}{x} = z$, загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння набуде вигляду $\ln\left(\dfrac{y^2}{x^2} + 1\right) = -\ln|x| + C$.◄

Розглянемо диференціальне рівняння виду $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$, де a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — сталі величини, причому, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ одночасно.

Дане рівняння не є однорідним. Розглянемо випадок, коли $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. У цьому випадку заміною змінних $\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0 \end{cases}$, де x_0 та y_0 — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, неоднорідне рівняння вигляду $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ зводиться до відповідного йому однорідного рівняння $Y' = \dfrac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$.

Останнє рівняння розв'язується методом, запропонованим у *прикладі 10.1.3*.

Приклад 10.1.4. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \dfrac{x+y-2}{y-x-4}$.

►Маємо неоднорідне диференціальне рівняння. Перевіримо виконання умови $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2 \neq 0$. Отже, за допомогою заміни його можна звести до однорідного. Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x+y-2=0, \\ y-x-4=0 \end{cases}$, знайдемо значення $x_0 = -1$ та $y_0 = 3$. Звідси відповідна заміна набуде вигляду: $\begin{cases} x = X-1, \\ y = Y+3. \end{cases}$

Використовуючи заміну, перейдемо від рівняння $y' = \dfrac{x+y-2}{y-x-4}$ до рівняння $Y' = \dfrac{X+Y}{Y-X}$, яке є однорідним. Запишемо його у формі $Y' = \dfrac{1+\frac{Y}{X}}{\frac{Y}{X}-1}$. Введемо заміну $\dfrac{Y}{X} = z(x) \Rightarrow Y' = z + X\cdot z'$.

Отримаємо рівняння $z + Xz' = \dfrac{1+z}{z-1}$, яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Звідси:

$$Xz' = \frac{1+z}{z-1} - z \Rightarrow X\frac{dz}{dX} = \frac{1+z-z^2+z}{z-1} \Rightarrow X\frac{dz}{dX} = \frac{-z^2+2z+1}{z-1} \Big| \cdot dX :$$

$$X : \frac{-z^2+2z+1}{z-1} \Rightarrow \frac{z-1}{-z^2+2z+1}dz = \frac{dX}{X}.$$

Інтегруємо останню рівність: $\displaystyle\int \frac{z-1}{-z^2+2z+1}\,dz = \int \frac{dX}{X}$.

Отримаємо:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|z^2-2z-1\right| = \ln|X| + \ln|C| \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|z^2-2z-1\right| = \ln|CX| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|z^2-2z-1\right| = \ln(CX)^{-2} \Rightarrow \left|z^2-2z-1\right| = (CX)^{-2}.$$

Використовуючи заміну $z(x) = \dfrac{Y}{X}$, повернемося до функції Y $\left|\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2 - 2\dfrac{Y}{X} - 1\right| = (CX)^{-2}$. Але у вихідному рівнянні фігурували змінні x та y, а не X та Y. Тому завершальним кроком нашого розв'язання буде введення заміни, яка дозволяє здійснити перехід $\begin{cases} X \to x \\ Y \to y \end{cases}$.

Повернемося до заміни $\begin{cases} x = X-1, \\ y = Y+3. \end{cases}$ Очевидно, що $\begin{cases} X = x+1, \\ Y = y-3. \end{cases}$

Отже, загальний інтеграл вихідного рівняння набуде вигляду:

$$\left|\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y-3}{x+1} - 1\right| = (Cx+C)^{-2}. ◄$$

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду $y' + f(x)y = g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ — деякі неперервні функції.

Якщо $g(x) \equiv 0$, то лінійне рівняння набуває вигляду $y' + f(x)y = 0$ і називається *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням. Очевидно, що $y' + f(x)y = 0$ належить до рівнянь з відокремлюваними змінними: $\dfrac{dy}{dx} = -f(x)y \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -f(x)dx \Rightarrow$ $\ln|y| = -\int f(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int f(x)dx}$.

Якщо $g(x) \neq 0$, то рівняння $y' + f(x)y = g(x)$ називається *лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням.

Розглянемо два методи розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь.

I. Метод варіації довільної сталої *(метод Лагранжа)*

1. Записуємо відповідне до $y' + f(x)y = g(x)$ лінійне однорідне рівняння $y' + f(x)y = 0$ та знаходимо його загальний розв'язок: $y = Ce^{-\int f(x)dx}$.

2. Шукатимемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді $y = C(x)e^{-\int f(x)dx}$, де $C(x)$ — деяка функція від x.

3. Підставимо значення y та $y' = C'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} + C(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}\cdot\left(-f(x)\right)$ у вихідне рівняння. Матимемо:

$$C'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} + C(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}\cdot\left(-f(x)\right) + f(x)\cdot C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x).$$

Звідси: $C'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} = g(x) \Rightarrow C'(x) = g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}$. Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо вираз для $C(x)$:

$$C(x) = \int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + C.$$

4. Підставимо отримане значення $C(x)$ у форму загального розв'язку, запропоновану у пункті 2 даного алгоритму. Отже, загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння матиме вигляд:

$$y = e^{-\int f(x)dx}\cdot\left(\int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + C\right).$$

Приклад 10.1.5. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + xy = x^3$ методом варіації довільної сталої.

►На першому кроці алгоритму, запропонованого в методі I, знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y' + xy = 0$: $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

Звідси, згідно з методом варіації довільної сталої, загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Продиференціюємо дану рівність і підставимо значення y та y' у вихідне рівняння. Матимемо:

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - x\cdot C(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + x\cdot C(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3 \Rightarrow C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = x^3\cdot e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow C(x) = \int x^3\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx = \begin{vmatrix} x^2 = u, & 2xdx = du \\ xe^{\frac{x^2}{2}}dx = dv, & v = e^{\frac{x^2}{2}} \end{vmatrix} =$$

$$= x^2e^{\frac{x^2}{2}} - 2\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = x^2e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y' + xy = x^2$ матиме вигляд: $y = \left(x^2e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + C\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ або $y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.◄

II. Метод підстановки *(метод д'Аламбера)*

1. Шукатимемо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння $y' + f(x)y = g(x)$ у вигляді добутку двох функцій $y = u(x)\cdot v(x)$.

2. Підставимо значення y та $y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ у вихідне рівняння. Матимемо: $u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + f(x)\cdot u(x)\cdot v(x) = g(x)$.

У другому та третьому доданках лівої частини рівності винесемо спільний множник за дужки: $u'(x)\cdot v(x) + u(x)(v'(x) + f(x)\cdot v(x)) = g(x)$.

3. Шукатимемо функцію $v(x)$ як *частинний* розв'язок рівняння $v'(x) + f(x)\cdot v(x) = 0$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

4. Шукатимемо функцію $u(x)$ як *загальний* розв'язок рівняння $u'(x)\cdot v(x) = g(x)$, яке також є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Приклад 10.1.6. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + xy = x^3$ методом підстановки.

►Шукатимемо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння $y' + xy = x^3$ у вигляді добутку двох функцій $y = u(x) \cdot v(x)$.

Підставивши значення y та $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ у вихідне рівняння, матимемо: $u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + x \cdot u(x) \cdot v(x) = x^3$. Згрупувавши відповідним чином доданки (див. пункт 2 алгоритму методу II), отримаємо рівність: $u'(x) \cdot v(x) + u(x)(v'(x) + x \cdot v(x)) = x^3$.

Звідси рівнянням для визначення функції $v(x)$ буде рівняння виду $v'(x) + x \cdot v(x) = 0$. Розв'язавши дане рівняння як рівняння у відокремлюваних змінних, знайдемо частинний розв'язок: $v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Шукатимемо функцію $u(x)$ як загальний розв'язок рівняння $u'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3 \Rightarrow u'(x) = x^3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$. Звідси: $u(x) = \int x^3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + C$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + xy = x^3$ набуде вигляду $y = \left(x^2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + C\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ або $y = x^2 - 2 + C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.◄

Диференціальне рівняння першого порядку називається *рівнянням Бернуллі*, якщо воно має вигляд $y' + f(x)y = g(x)y^n$, де $f(x)$ і $g(x)$ — деякі неперервні функції, $n \in R$, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння першого порядку. Для цього потрібно спочатку поділити його на y^n: $y'y^{-n} + f(x)y^{1-n} = g(x)$. Потім ввести заміну $y^{1-n} = z \Rightarrow z' = (1 - n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}$.

Отримаємо $\frac{z'}{1-n} + f(x)z = g(x)$ або $z' + (1 - n)f(x)z = (1 - n)g(x)$. Дане рівняння відносно z є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням, яке розв'язується методом Лагранжа або д'Аламбера.

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, у якому ліва частина є повним диференціалом деякої функції $f(x, y)$, називається *рівнянням у повних диференціалах*.

Загальним інтегралом диференціального рівняння у повних диференціалах називається вираз виду $f(x, y) = C$, де $f(x, y)$ — функція, повний диференціал якої задається лівою частиною рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Умови, за яких ліва частина рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ є диференціалом деякої функції, встановлює наступна теорема.

Теорема 10.1.1

Нехай в деякій області D існують і неперервні функції $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$. Тоді, для того щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було рівнянням у повних диференціалах, необхідно й достатньо виконання наступної умови: $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$.

Алгоритм розв'язування рівнянь у повних диференціалах

1. Перевіряємо умову теореми, тобто з'ясовуємо, чи є правильною рівність $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$. У разі її виконання переходимо до п. 2.

2. Враховуючи, що $M(x, y)=\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, а $N(x, y)=\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, з першої рівності (для визначеності) знаходимо $f(x, y)=\int M(x, y)dx=F(x, y)+C$, де $C = \varphi(y)$.

3. Диференціюємо по змінній y знайдений у попередньому пункті вираз для $f(x, y)$ та прирівнюємо отриману рівність до виразу, що задає функцію $N(x, y)$. Отримаємо диференціальне рівняння (яке є рівнянням з відокремлюваними змінними) для визначення $\varphi(y)$.

4. Знайшовши з останньої рівності значення функції $\varphi(y)$, підставляємо її у вираз для $f(x, y)$, знайдений у п. 2.

5. Записуємо загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах у формі $f(x, y) = C$ або $f(x, y, C) = 0$.

Приклад 10.1.7. Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку $(2x\sin y - y^2\sin x)dx + (x^2\cos y + 2y\cos x + 1)dy = 0$.

►Введемо позначення: $M(x, y) = 2x\sin y - y^2\sin x$, а $N(x, y) = x^2\cos y + 2y\cos x + 1$. Тоді, $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}=2x\cos y-2y\sin x$, $\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}=2x\cos y-2y\sin x$. Тобто, умова $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ виконується, а отже, задане диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах.

Згідно з п. 2 алгоритму знайдемо $f(x, y)$ як інтеграл від першого доданку:

$$f(x, y)=\int\left(2x\sin y-y^2\sin x\right)dx=x^2\sin y+y^2\cos x+\varphi(y).$$

Продиференціюємо останній вираз по змінній y та прирівняємо до функції $N(x, y)$: $f'_y(x, y) = x^2\cos y + 2y\cos x + \varphi'(y) = x^2\cos y + 2y\cos x + 1$. Отримаємо: $\varphi'(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y + C$.

Підставимо знайдене значення $\varphi(y)$ у вираз для $f(x, y)$, знайдений у п. 2 відповідного алгоритму: $f(x, y) = x^2\sin y + y^2\cos x + y + C$.

Звідси загальний інтеграл вихідного рівняння набуде вигляду: $x^2\sin y + y^2\cos x + y + C = 0$.◄

Зауваження. Рівняння в повних диференціалах можна розв'язати, використовуючи криволінійний інтеграл. Метод, що ґрунтується на застосуванні криволінійного інтеграла до знаходження загального інтеграла диференціального рівняння в повних диференціалах, наведено в [4].

Розглянемо випадок, коли умова теореми для рівняння виду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ не виконується, тобто $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$, отже, диференціальне рівняння не є рівнянням у повних диференціалах.

Інтегрувальним множником для рівняння виду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ називається така функція $m(x, y)$, після множення на яку дане рівняння перетворюється на рівняння в повних диференціалах.

Тобто, для рівняння $m(x, y)\cdot M(x, y)dx + m(x, y)\cdot N(x, y)dy = 0$ виконується умова $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(m(x, y)\cdot M(x, y)\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(m(x, y)\cdot N(x, y)\right)$.

У загальному випадку задача знаходження інтегрувального множника є навіть складнішою за задачу інтегрування рівняння. Адже рівняння, яке служить для визначення функції $m(x, y)$, є рівнянням з частинними похідними.

Однак в окремих випадках, якщо наперед відома форма $m(x, y)$, задача знаходження інтегрувального множника значно спрощується.

Розглянемо такі випадки.

I. Нехай $m(x, y) = m(x)$. Тоді умова теореми набуде вигляду: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(m(x)\cdot M(x,y)\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(m(x)\cdot N(x,y)\right)\Rightarrow m\cdot\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial m}{\partial x}\cdot N+m\cdot\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Звідси рівнянням для визначення інтегрувального множника буде наступне рівняння: $\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$.

Отже, для того щоб інтегрувальний множник був функцією однієї змінної x: $m = m(x)$, необхідно й достатньо, щоб вираз $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ також залежав тільки від змінної x.

II. Нехай $m(x, y) = m(y)$. Тоді умова теореми набуде вигляду: $\frac{\partial}{\partial y}\left(m(y)\cdot M(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(m(y)\cdot N(x,y)\right)\Rightarrow\frac{\partial m}{\partial y}\cdot M+m\cdot\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial m}{\partial x}=$
$=m\cdot\frac{\partial N}{\partial x}$.

Звідси рівнянням для визначення інтегрувального множника буде наступне рівняння: $\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dy}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$.

Отже, для того щоб інтегрувальний множник був функцією однієї змінної y: $m = m(y)$, необхідно й достатньо, щоб вираз $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ також залежав тільки від змінної y.

III. Нехай $m(x, y) = m(w(x, y))$, де $w(x, y)$ — деяка відома функція.

У даному випадку рівнянням для визначення інтегрувального множника буде наступне рівняння: $\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dw}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial w}{\partial x}-M\frac{\partial w}{\partial y}}$.

Приклад 10.1.8. Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку $ydx - (x + x^2 + y^2)dy = 0$, якщо відомо, що $m(x, y) = m(x^2 + y^2)$.

►Згідно з позначеннями, які введені в диференціальному рівнянні вигляду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, для заданого в умові задачі рівняння $M(x, y) = y$, $N(x, y) = -(x + x^2 + y^2)$. Звідси: $\frac{\partial M}{\partial y}=1$; $\frac{\partial N}{\partial x}=-1-2x$. Очевидно, що умова $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ не виконується, а рівняння $ydx - (x + x^2 + y^2)dy = 0$ на даний момент не є диференціальним рівнянням у повних диференціалах.

Оскільки за умовою задачі $w(x, y) = x^2 + y^2$, $\frac{\partial w}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial w}{\partial y}=2y$.

Підставивши отримані вирази у рівняння, яке служить для визначення інтегрувального множника, що залежить від наперед заданої деякої відомої функції, отримаємо:

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dw}=\frac{1+1+2x}{-2x\left(x+x^2+y^2\right)-y\cdot 2y}=\frac{2+2x}{-2\left(x^2+x^3+xy^2+y^2\right)}=$$
$$=\frac{1+x}{-\left(x^2+y^2\right)\left(x+1\right)}.$$

Враховуючи, що $w(x, y) = x^2 + y^2$, матимемо $\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dw}=-\frac{1}{w}$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. Помножимо на dw ліву та праву частини останньої рівності, отримаємо:

$$\frac{dm}{m}=-\frac{dw}{w}\Rightarrow\int\frac{dm}{m}=-\int\frac{dw}{w}\Rightarrow\ln m=-\ln w\Rightarrow m=\frac{1}{w}.$$

Остаточно інтегрувальний множник набуде вигляду $m=\frac{1}{x^2+y^2}$.

Після застосування інтегрувального множника до вихідного рівняння отримаємо диференціальне рівняння в повних диференціалах $\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2}dy=0$, яке розв'язується за алгоритмом, проілюстрованим у прикладі 6.◄

Диференціальне рівняння першого порядку називається *не розв'язаним відносно похідної*, якщо воно має загальний вигляд $F(x, y, y') = 0$, причому його *не можна* розв'язати відносно y' в явному вигляді.

Рівняння $F(x, y, y') = 0$ також називають *неявним* диференціальним рівнянням першого порядку. Інтегрування неявних диференціальних рівнянь пов'язане зі значними труднощами. На практиці їх найчастіше розв'язують *методом введення параметра*.

Розглянемо найпростіший варіант даного методу.

Припустимо, що рівняння виду $F(x, y, y') = 0$ можна розв'язати відносно y або x. Для визначеності візьмемо, що розв'язується явно відносно y, а отже, його можна записати у вигляді $y = f(x, y')$.

Введемо параметр $y' = p$ $\left(\frac{dy}{dx}=p, \quad dy=pdx\right)$, отримаємо $y = f(x, p)$. Взявши повний диференціал від обох частин останньої рівності і замінивши dy на pdx, отримаємо рівняння:

$$pdx=\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp.$$

Якщо загальний розв'язок останнього рівняння можна представити у вигляді $x = \varphi(p, C)$, то розв'язок вихідного рівняння можна записати у параметричній формі: $\begin{cases} x=\varphi(p,C), \\ y=f(x,p). \end{cases}$

Прикладами рівнянь, які інтегруються даним методом є рівняння Лагранжа $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ та рівняння Клеро $y = xy' + \psi(y')$, яке є частинним випадком рівняння Лагранжа.

Приклад 10.1.9. Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку $y = x(y')^2 + (y')^2$.

►Дане рівняння є рівнянням Лагранжа. Введемо параметр $y' = p$, отримаємо $y = xp^2 + p^2$.

Знайдемо диференціал отриманого рівняння і підставимо замість dy вираз pdx:

$$dy = d(xp^2 + p^2) = p^2dx + (2xp + 2p)dp \Rightarrow pdx = p^2dx + (2xp + 2p)dp.$$

Маємо рівняння, яке допускає відокремлення змінних:

$$(p - p^2)dx = (2xp + 2p)dp \Rightarrow p(1 - p)dx = 2p(x + 1)dp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-p)dx=2(x+1)dp \Rightarrow \frac{1}{(x+1)}dx=\frac{2}{(1-p)}dp \Rightarrow \int\frac{1}{(x+1)}dx=$$

$$=\int\frac{2}{(1-p)}dp \Rightarrow \ln|x+1|=-2\ln|1-p|+\ln C \Rightarrow \ln|x+1|=$$

$$=\ln\frac{C}{(1-p)^2} \Rightarrow x+1=\frac{C}{(1-p)^2}.$$

Звідси загальний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі матиме вигляд:

$$\begin{cases} y=xp^2+p^2, \\ x=\dfrac{C}{(1-p)^2}-1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y=\dfrac{C\,p^2}{(1-p)^2}, \\ x=\dfrac{C}{(1-p)^2}-1. \end{cases}$$ ◄

Приклад 10.1.10. Розв'язати диференціальне рівняння $\ln y' + \sin y' - x = 0$.

►Як бачимо, дане рівняння неможливо розв'язати відносно y' в явному вигляді, але легко розв'язати відносно x: $x = \ln y' + \sin y'$.

Введемо параметр $y' = p$, отримаємо $x = \ln p + \sin p$. Маємо одну з двох рівностей, що входять до загального розв'язку вихідного рівняння, продиференціюємо її: $dx = d(\ln p + \sin p) = \left(\frac{1}{p}+\cos p\right)dp$.

Враховуючи, що $dy = pdx$, отримаємо: $dy=p\cdot\left(\frac{1}{p}+\cos p\right)dp$.

Звідси: $dy = (1 + p\cos p)dp$. Проінтегрувавши останню рівність (інтеграл $\int p\cos p\,dp$ інтегрується за частинами: $u=p$, $dv=\cos p\,dp$), отримаємо розв'язок $y = p + \cos p + p\sin p + C$.

Остаточно загальний розв'язок рівняння $\ln y' + \sin y' - x = 0$ в параметричній формі матиме вигляд:

$$\begin{cases} y = p+\cos p + p\sin p + C, \\ x = \ln p + \sin p. \end{cases} ◄$$

Приклад 10.1.11. Розв'язати рівняння $(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy\sin x = 0$.

►Прийти до диференціальних рівнянь, інтегрування яких не викликає труднощів, можна використовуючи алгебраїчні перетворення (групування, винесення спільного множника за дужки тощо). Так, наприклад, $(y')^2 + y'\sin x - 2xyy' - 2xy\sin x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y'(y' + \sin x) - 2xy(y' + \sin x) = 0 \Rightarrow (y' - 2xy)(y' + \sin x) = 0$.

Звідси розв'язки заданого рівняння знаходимо з сукупності рівнянь: $\left[\begin{array}{l} y'-2xy=0, \\ y'+\sin x = 0. \end{array}\right.$ Після інтегрування відповідних рівнянь матимемо сукупність розв'язків: $\left[\begin{array}{l} y = Ce^{x^2}, \\ y = \cos x + C. \end{array}\right.$ ◄

10.1.2. Диференціальні рівняння вищих порядків

Розглянемо окремі види диференціальних рівнянь вищих порядків та методи їх розв'язування.

I. Диференціальні рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$

Найпростішим диференціальним рівнянням n-го порядку є рівняння, яке містить незалежну змінну (в окремому випадку постійну величину) і похідну n-го порядку $y^{(n)} = f(x)$, де $f(x)$ — диференційовна на інтервалі $(a; b)$ функція.

Загальний розв'язок рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ знаходиться шляхом n кратного інтегрування даного рівняння.

Приклад 10.1.12. Розв'язати задачу Коші $xy'' = 1$, якщо $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

►Поділимо обидві частини рівняння на x: $y'' = \dfrac{1}{x}$.

Проінтегруємо перший раз і знайдемо: $y' = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C_1$.

Оскільки $y'(1) = 2$, то після підстановки отримаємо:

$$2 = \ln 1 = C_1.$$

Отже, $C_1 = 2$ і $y' = \ln|x| + 2$.

Проінтегруємо вдруге $y' = \ln|x| + 2$, отримаємо:

$$y = \int(\ln x + 2)dx = \int \ln x\,dx + 2\int dx = x\ln|x| + x + C_2.$$

Оскільки $y(1) = 0$, то $0 = 1 + C_2$. Звідси: $C_2 = -1$ і розв'язок задачі Коші набуде вигляду: $y = x\ln|x| + x - 1$.◄

II. Рівняння другого порядку, які не містять невідомої функції y в явному вигляді

Рівняння виду $F(x, y', y'') = 0$ за допомогою підстановки $y' = z$, $y'' = z'$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція, зводиться до рівняння першого порядку $F(x, z, z') = 0$.

Приклад 10.1.13. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y'' - 2y'\mathrm{ctg}2x = \sin^2 2x$.

►Задане рівняння не містить явно невідомої функції y, тому скористаємося підстановкою $y' = z$, $y'' = z'$ і отримаємо лінійне рівняння першого порядку: $z' - 2z\mathrm{ctg}2x = \sin^2 2x$.

Шукатимемо розв'язок даного рівняння у вигляді $z = u \cdot v$, $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Отримаємо: $u'v + uv' - 2uv\mathrm{ctg}2x = \sin^2 2x$.

Згрупувавши відповідним чином доданки, отримаємо рівність: $u' \cdot v + u \cdot (v' - 2v\mathrm{ctg}2x) = \sin^2 2x$.

Звідси рівнянням для визначення функції $v(x)$ буде рівняння виду $v' - 2v\mathrm{ctg}2x = 0$, з якого знаходимо $v = \sin 2x$.

Шукатимемо функцію $u(x)$ як загальний розв'язок рівняння $u'\sin 2x = \sin^2 2x$ або $u' = \sin 2x$. Звідси: $u(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C_1$.

Отже, вираз для функції $z = z(x)$ набуде вигляду $z(x) = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right)\sin 2x = -\frac{1}{4}\sin 4x + C_1 \sin 2x$.

Перейшовши до заміни $z(x) = y'$, отримаємо: $y' = -\frac{1}{4}\sin 4x + C_1 \sin 2x$.

Звідси загальний розв'язок вихідного рівняння набуде вигляду $y = \int\left(-\frac{1}{4}\sin 4x + C_1\sin 2x\right)dx = \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{2}C_1\cos 2x + C_2$.◄

III. Рівняння другого порядку, які містять невідому функцію y і не містять незалежної змінної x в явному вигляді

Рівняння виду $F(y, y', y'') = 0$ за допомогою підстановки $y' = z$, $y'' = z' \cdot z$, де $z = z(y)$ — нова невідома функція, зводиться до рівняння першого порядку $F(y, z, z') = 0$.

Приклад 10.1.14. Розв'язати рівняння $yy'' + (y')^2 = 0$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

►Задане рівняння не містить явно незалежної змінної x, тому скористаємося підстановкою $y' = z$, $y'' = z' \cdot z$. Отримаємо рівняння першого порядку $yz'z + z^2 = 0$ з відокремлюваними змінними:

$$yz\frac{dz}{dy} = -z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \int\frac{dz}{z} = -\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z| = -\ln|y| + \ln C_1.$$

Звідси: $z = \frac{C_1}{y}$.

Повернемося до заміни $y' = z$, отримаємо: $y' = \frac{C_1}{y}$. Після інтегрування загальний розв'язок вихідного рівняння набуде вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y} \Rightarrow ydy = C_1dx \Rightarrow \int ydy = C_1\int dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = C_1x + C_2 \Rightarrow y^2 = 2C_1x + C_2.$$

Використаємо початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ для того, щоб знайти значення C_1 та C_2: $\begin{cases} 1 = C_1, \\ 1 = C_2. \end{cases}$

Отже, розв'язком задачі Коші буде крива $y^2 = 2x + 1$.◄

IV. Однорідні лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Однорідними лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$, де a_i, $i = \overline{0,n}$ — деякі дійсні числа.

Шукатимемо частинні розв'язки даного рівняння у вигляді $y = e^{\lambda x}$, де λ — стала (дійсна чи комплексна), яку потрібно знайти.

Підставимо функцію $y = e^{\lambda x}$ у рівняння $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$.

Отримаємо:

$$a_0(e^{\lambda x})^{(n)} + a_1(e^{\lambda x})^{(n-1)} + \ldots + a_ne^{\lambda x} = 0 \Rightarrow a_0\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_ne^{\lambda x} = 0 \Rightarrow (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)e^{\lambda x} = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$ для $x \in (-\infty; +\infty)$, то функція $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком рівняння $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$ тоді й тільки тоді, коли λ є коренем рівняння n-го степеня $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, яке називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$.

Очевидно, що характеристичне рівняння n-го степеня має n коренів λ_1, λ_2, … , λ_n, яким відповідають n лінійно незалежних *частинних* розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ диференціального рівняння $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$.

Загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами є лінійною комбінацією відповідних частинних розв'язків:

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, де C_i, $i = \overline{1,n}$ — деякі довільні сталі.

1. Якщо корені характеристичного рівняння є дійсними різними числами $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$, то кожному кореню λ відповідає частинний розв'язок виду $y = e^{\lambda x}$.

2. Якщо серед коренів характеристичного рівняння є дійсні кратні корені (наприклад, кратності k) $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \in R$, то їм відповідають k лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, …, $y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}$.

3. Кожній парі комплексно-спряжених коренів виду $\alpha \pm \beta i$ відповідають два лінійно незалежних частинних розв'язки $e^{\alpha x}\cos\beta x$ та $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

4. Кожній парі комплексно-спряжених коренів виду $\alpha \pm \beta i$ кратності k відповідають $2k$ лінійно незалежних частинних розв'язків виду $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, … , $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ та $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, … , $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Приклад 10.1.15. Розв'язати задачу Коші $y'' - 9y = 2$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

►Запишемо характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння: $\lambda^2 - 9 = 0$. Очевидно, що коренями будуть числа $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = -3$.

Звідси загальний розв'язок диференціального рівняння набуде вигляду: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$.

Знайдемо частинний розв'язок, що задовольняє умову $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$. Для цього підставимо дані умови у функцію загального розв'язку та у похідну функції загального розв'язку: $y' = 3C_1e^{3x} - 3C_2e^{-3x}$.

Отримаємо систему, яка дозволить знайти значення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0 = C_1e^3 + C_2e^{-3}, \\ 2 = 3C_1e^3 - 3C_2e^{-3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1e^3 = -C_2e^{-3}, \\ 2 = -3C_2e^{-3} - 3C_2e^{-3} \Rightarrow 2 = -6C_2e^{-3} \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}e^3. \end{cases}$$

Підставимо отримане значення C_2 в перше рівняння системи, отримаємо: $C_1e^3 = -\left(-\frac{1}{3}e^3\right)e^{-3} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3}e^{-3}$.

Звідси розв'язок задачі Коші набуде вигляду: $y = \frac{1}{3}e^{-3}\cdot e^{3x} - \frac{1}{3}e^3\cdot e^{-3x}$ або $y = \frac{1}{3}\left(e^{3x-3} - e^{3-3x}\right)$.◄

Приклад 10.1.16. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 13y'' = 0$.

►Запишемо характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння: $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 13\lambda^2 = 0$. Звідси: $\lambda^2(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0$, коренями відповідного характеристичного рівняння будуть два комплексно-спряжені числа $\lambda_1 = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i$, $\lambda_2 = \frac{-4-6i}{2} = -2-3i$ і дійсне число кратності 2: $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо у вигляді $y = C_1e^{-2x}\cos 3x + C_2e^{-2x}\sin 3x + C_3x + C_4$.◄

V. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду: $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x)$, де $a_i, i = \overline{0,n}$ — деякі дійсні числа, $f(x) \neq 0$ — неперервна на інтервалі $(a; b)$ функція.

Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку загальним розв'язком даного рівняння є сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$ та довільного частинного розв'язку неоднорідного. Тобто: $y_{зн} = y_{зо} = y_{чн}$.

Метод знаходження загального розв'язку однорідного рівняння було розглянуто в попередньому пункті IV. Наразі докладно зупинимося на питанні знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Зауважимо, що одним із методів знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння є метод варіації довільної сталої. Тобто, якщо загальний розв'язок однорідного рівняння представити у вигляді $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$, то частинний розв'язок неоднорідного шукатимемо у формі $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$.

Проте для рівнянь *зі спеціальною правою частиною* існує значно простіший спосіб відшукання частинного розв'язку, не вдаючись до операції інтегрування.

Якщо праву частину рівняння $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x)$ можна представити у вигляді $f(x) = (P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$, де α і β — дійсні числа, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — задані многочлени степеня відповідно m та n, то частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами шукатимемо у формі:

$$y_{\text{чн}} = (R_h(x)\cos\beta x + S_h(x)\sin\beta x)x^k e^{\alpha x},$$

де $R_h(x)$, $S_h(x)$ — задані многочлени степеня $h = \max\{m, n\}$, k — кратність чисел $\alpha + \beta_i$ як коренів відповідного характеристичного рівняння.

Теорема 10.1.2

Якщо права частина рівняння $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x)$ дорівнює сумі двох функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — частинні розв'язки відповідно рівнянь $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f_1(x)$ та $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f_2(x)$, то функція $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ буде розв'язком рівняння $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f_1(x) + f_2(x)$.

Приклад 10.1.17. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' = 1 + 6x$.

►Запишемо характеристичне рівняння однорідного рівняння, що відповідає заданому диференціальному рівнянню $\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Звідси: $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 = 3$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння набуде вигляду: $y_{\text{зо}} = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{3x} = C_1 + C_2e^{3x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у формі $y_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x^s$, де s — кратність «0» серед коренів характеристичного рівняння.

У нашому випадку $s = 1$, отже, $y_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x = C_0x + C_1x^2$.

Знайдемо коефіцієнти C_0 та C_1 частинного розв'язку. Для цього підставимо відповідну функцію $y_{\text{чн}} = C_0x + C_1x^2$ та її похідні $y'_{\text{чн}} = C_0 + 2C_1x$ і $y''_{\text{чн}} = 2C_1$ у вихідне рівняння.

Отримаємо:

$$2C_1 - 3(C_0 + 2C_1x) = 1 + 6x \Rightarrow 2C_1 - 3C_0 - 6C_1x = 1 + 6x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2C_1 - 3C_0 - 6C_1x = 1 + 6x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та прийдемо до алгебраїчної системи рівнянь, з якої знаходимо коефіцієнти C_0 та C_1: $\begin{cases} x: & -6C_1 = 6 \Rightarrow C_1 = -1, \\ x^0: & 2C_1 - 3C_0 = 1 \Rightarrow 3C_0 = 2C_1 - 1 = -3 \Rightarrow C_0 = -1. \end{cases}$

Таким чином, $y_{\text{чн}} = -x - x^2$ і загальний розв'язок, враховуючи формулу $y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}$, набуде вигляду: $y_{\text{зо}} = C_1 + C_2e^{3x} - x - x^2$.◄

Приклад 10.1.18. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + y = (1 + x^2)e^x$.

►Запишемо характеристичне рівняння однорідного рівняння, що відповідає заданому диференціальному рівнянню: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ або $(\lambda - 1)^2 = 0$. Звідси: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння набуде вигляду: $y_{\text{зо}} = C_1e^x + C_2xe^x$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у формі $y_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x + C_2x^2)e^xx^s$, де s — число повторів «$\alpha = 1$» серед коренів характеристичного рівняння, тобто $s = 2$.

Звідси: $y_{чн} = (C_0 + C_1x + C_2x^2)e^x x^2 = (C_0x^2 + C_1x^3 + C_2x^4)e^x$.

Знайдемо коефіцієнти $C_i,\ i = \overline{0,2}$ частинного розв'язку.

Для цього підставимо функцію $y_{чн} = (C_0x^2 + C_1x^3 + C_2x^4)e^x$ та її похідні першого та другого порядків:

$$y'_{чн} = (2C_0x + 3C_1x^2 + 4C_2x^3 + C_0x^2 + C_1x^3 + C_2x^4)e^x,$$

$$y''_{чн} = (2C_0 + 6C_1x + 12C_2x^2 + 4C_0x + 6C_1x^2 + 8C_2x^3 + C_0x^2 + C_1x^3 + C_2x^4)e^x$$

у рівняння $y'' - 2y' + y = (1 + x^2)e^x$.

Отримаємо:

$$(2C_0 + 6C_1x + 12C_2x^2 + 4C_0x + 6C_1x^2 + 8C_2x^3 + C_0x^2 + C_1x^3 + C_2x^4)e^x - 2 \cdot (2C_0x + 3C_1x^2 + 4C_2x^3 + C_0x^2 + C_1x^3 + C_2x^4)e^x + (C_0x^2 + C_1x^3 + C_2x^4)e^x = (1 + x^2)e^x.$$

Після скорочення на e^x та зведення подібних доданків в лівій частині рівності отримаємо: $2C_0 + 6C_1x + 12C_2x^2 = 1 + x^2$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та прийдемо до алгебраїчної системи рівнянь, з якої знаходимо коефіцієнти C_0, C_1 та C_2:

$$\begin{cases} x^2: \quad 12C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \dfrac{1}{12}, \\ x: \quad 6C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0, \\ x^0: \quad 2C_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_0 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким чином, $y_{чн} = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{12}x^4\right)e^x$ і загальний розв'язок, враховуючи формулу $y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}$, набуде вигляду:

$$y_{зн} = C_1e^x + C_2xe^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4\right)e^x$$

або $y_{зн} = \left(C_1 + C_2x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{12}x^4\right)e^x$.◄

10.1.3. Системи лінійних диференціальних рівнянь. Дослідження стійкості розв'язку

Система виду $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + f_i(t),\ i = \overline{1,n}$ називається системою лінійних *неоднорідних* диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами a_{ij}.

Система виду $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ i = \overline{1,n}$ називається системою лінійних *однорідних* диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами a_{ij}.

Найпростішим прикладом таких систем є відповідно неоднорідні та однорідні системи двох рівнянь виду

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Існує два методи розв'язування даних систем рівнянь.

Метод I. Зведення системи двох рівнянь до лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Проілюструємо на конкретному прикладі алгоритм застосування даного методу для знаходження розв'язків лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 10.1.19. Розглянемо систему $\begin{cases} x'(t) = 2x + y, \\ y'(t) = 3x + 4y. \end{cases}$

►Для розв'язання даної системи виконаємо ряд кроків.

1. Продиференціюємо одне із рівнянь системи (для визначеності візьмемо друге) по t: $y'' = 3x' + 4y'$.

2. Підставимо в отримане рівняння значення $x' = 2x + y$ з першого рівняння системи: $y'' = 3(2x + y) + 4y' = 6x + 3y + 4y'$.

3. Виразимо з другого рівняння системи $x = \frac{1}{3}\left(y' - 4y\right)$ і підставимо у рівняння, отримане в п. 2:

$$y'' = 6 \cdot \frac{1}{3}\left(y' - 4y\right) + 3y + 4y' = 2y' - 8y + 3y + 4y' = 6y' - 5y .$$

4. Розв'яжемо отримане в п. 3 рівняння $y'' - 6y' + 5y = 0$. Корені відповідного характеристичного рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ мають значення $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. Звідси загальний розв'язок набуде вигляду: $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.

5. Використовуючи рівність $x = \frac{1}{3}\left(y' - 4y\right)$, знайдемо другу частину розв'язку системи:

$$x = \frac{1}{3}\left(C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} - 4C_1 e^x - 4C_2 e^{5x}\right) = \frac{1}{3}\left(C_2 e^{5x} - 3C_1 e^x\right).$$

6. Запишемо загальний розв'язок заданої лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} C_2 e^{5x} - C_1 e^x, \\ y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}. \end{cases} ◄$$

Метод II. Метод Ейлера

Опишемо метод Ейлера для розв'язування систем диференціальних рівнянь виду $\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$

Шукатимемо розв'язок даної системи у вигляді $\begin{cases} x = a_1 e^{\lambda t}, \\ y = a_2 e^{\lambda t}, \end{cases}$

де a_1, a_2, λ — деякі невідомі сталі величини, які потрібно знайти. Для цього підставимо відповідну форму розв'язку у задану систему рівнянь. Отримаємо:

$$\begin{cases} a_1 e^{\lambda t} \cdot \lambda = a_{11} \cdot a_1 e^{\lambda t} + a_{12} \cdot a_2 e^{\lambda t}, \\ a_2 e^{\lambda t} \cdot \lambda = a_{21} \cdot a_1 e^{\lambda t} + a_{22} \cdot a_2 e^{\lambda t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \lambda = a_{11} \cdot a_1 + a_{12} \cdot a_2, \\ a_2 \lambda = a_{21} \cdot a_1 + a_{22} \cdot a_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(a_{11} - \lambda\right) a_1 + a_{12} \cdot a_2 = 0, \\ a_{21} \cdot a_1 + \left(a_{22} - \lambda\right) a_2 = 0. \end{cases}$$

Система, яку ми отримали, є лінійною алгебраїчною однорідною системою відносно невідомих a_1 та a_2. Для того, щоб вона мала ненульовий розв'язок, потрібно, щоб визначник системи дорівнював нулю, тобто: $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$.

Розкривши даний визначник, отримаємо квадратне рівняння відносно λ, яке називається характеристичним рівнянням системи $\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$

Послідовно підставляючи кожний з отриманих коренів, спочатку у форму розв'язку заданої системи, а потім відповідний розв'язок (з конкретним значенням λ) безпосередньо у систему, — знаходимо коефіцієнти a_1 та a_2.

Зауваження 1. Якщо корені характеристичного рівняння $\left|A - \lambda E\right| = 0$ є дійсними, але рівними: $\left\{\lambda_1, \lambda_2\right\} \in R, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то розв'язок лінійної однорідної системи шукаємо у вигляді

$$\begin{cases} x = \left(a_1 + b_1 t\right) e^{\lambda t}, \\ y = \left(a_2 + b_2 t\right) e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Зауваження 2. Якщо корені характеристичного рівняння $\left|A - \lambda E\right| = 0$ є комплексно-спряженими числами: $\left\{\lambda_1, \lambda_2\right\} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$, то розв'язок лінійної однорідної системи шукаємо у вигляді $\begin{cases} x = \left(a_1 \cos\beta t + b_1 \sin\beta t\right) e^{\alpha t}, \\ y = \left(a_2 \cos\beta t + b_2 \sin\beta t\right) e^{\alpha t}. \end{cases}$

Приклад 10.1.20. Розв'яжемо систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$ методом Ейлера.

►Корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

мають значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Отже, розв'язок системи будемо шукати у формі $\begin{cases} x = a_1 e^{\lambda t}, \\ y = a_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$

При $\lambda_1 = 1$ розв'язок лінійної системи набуває вигляду $\begin{cases} x = a_1 e^{t}, \\ y = a_2 e^{t}. \end{cases}$

Після підстановки відповідного розв'язку у вихідну систему отримаємо: $\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ 3a_1 + 3a_2 = 0. \end{cases}$

Звідси: $a_2 = -a_1$. Отже, якщо $a_1 = C_1$, то $a_2 = -C_1$ і один із незалежних розв'язків системи, що відповідає $\lambda_1 = 1$, набуде вигляду $\begin{cases} x = C_1 e^{t}, \\ y = -C_1 e^{t}. \end{cases}$

При $\lambda_2 = 5$ розв'язок лінійної системи набуває вигляду $\begin{cases} x = a_1 e^{5t}, \\ y = a_2 e^{5t}. \end{cases}$

Після підстановки відповідного розв'язку у вихідну систему отримаємо: $\begin{cases} -3a_1 + a_2 = 0, \\ 3a_1 + a_2 = 0. \end{cases}$

Звідси: $a_2 = 3a_1$. Отже, якщо $a_1 = C_2$, то $a_2 = 3C_2$ і другий із незалежних розв'язків системи, що відповідає $\lambda_2 = 5$, набуде вигляду $\begin{cases} x = C_2 e^{5t}, \\ y = 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$

Загальний розв'язок вихідної системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює лінійній комбінації (отриманих при $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 5$ відповідно) незалежних розв'язків: $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$ ◄

Нагадаємо, що основною задачею теорії інтегрування диференціальних рівнянь є знаходження всіх його розв'язків та дослідження їх властивостей. Однією з таких властивостей є стійкість розв'язку.

Для систем виду $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i = \overline{1,n}$ стійкість нульового розв'язку (стійкість точки спокою) визначається знаком дійсної частини коренів відповідного характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$, де $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

(Умови стійкості (асимптотичної стійкості) точок спокою лінійних однорідних систем та вигляд фазових траєкторій в кожному з випадків див.: табл. 2.4.1, частина I, розділ 2, п. 2.4.2).

Приклад 10.1.21. Дослідити на стійкість точку спокою системи $\begin{cases} \dot{x} = x + \alpha y, \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ в залежності від параметра α та встановити її характер.

►Характеристичне рівняння заданої системи

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda) - \alpha = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - (\alpha + 2) = 0$$

має корені $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + 4(\alpha + 2)}$.

Звідси, залежно від значення параметра α, можемо зробити висновки:

- якщо $\alpha < -2\frac{1}{4}$ (корені комплексні, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$) — стійкий фокус;
- якщо $\alpha = -2\frac{1}{4}$ (корені дійсні, від'ємні, рівні) — стійкий вироджений вузол;
- якщо $-2\frac{1}{4} < \alpha < -2$ (корені дійсні, від'ємні, різні) — стійкий невироджений вузол;
- якщо $\alpha > -2$ (корені дійсні, різних знаків) — точка спокою нестійка, сідло.◄

10.1.4. Задачі, при розв'язанні яких використовуються диференціальні рівняння

Досліджуючи різноманітні фізичні явища, деякі процеси, що виникають в економіці, біології, соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, що описують певний процес чи явище. Однак у багатьох випадках можна виявити функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (швидкість їх зміни та час).

Диференціальне рівняння, одержане в процесі дослідження деякого реального явища або процесу, називають диференціальною моделлю даного процесу або динамічною математичною моделлю.

Дані моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їх станів, а також передбачити подальший розвиток без проведення експериментів.

Розглянемо декілька задач, при розв'язанні яких в якості математичної моделі використовуються диференціальні рівняння.

Задача 10.1.1. Відомо, що площа трапеції, обмеженої осями координат, дотичною до кривої $y = f(x)$ у довільній її точці $M(x, y)$ і прямою, проведеною через точку M паралельно до осі ординат, дорівнює 1,5 кв. од.

Побудувати математичну модель для знаходження усіх кривих $f(x)$, що мають вказану в умові властивість.

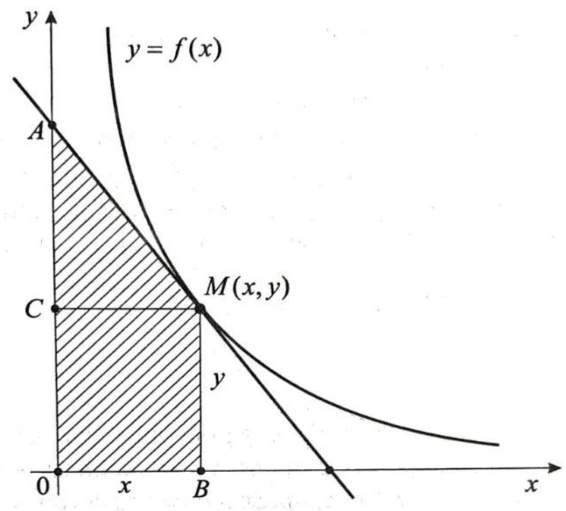


Рис. 10.1.1

►Нехай $M(x, y)$ — довільна точка кривої $y = f(x)$. Площа трапеції $AMBO$ обчислюється за формулою $S = \frac{MB + AO}{2} \cdot BO$, де MB, AO — основи трапеції, а BO — її висота.

Дотична до кривої $y = f(x)$ в довільній точці $M(x, y)$ має рівняння $Y - y = f'(x)(X - x)$.

Розглянемо точку A, що є однією з вершин трапеції, яка знаходиться на осі Oy. Виходячи з *рис. 10.1.1*, її координати $(0; |AO|)$. Окрім того, дана точка належить дотичній, отже, її координати мають задовольняти рівняння дотичної: $AO - y = -y'x \Rightarrow AO = y - y'x$.

Підставимо отриманий вираз для AO у формулу $S=\dfrac{MB+AO}{2}\cdot BO$, також врахуємо, що $BO = x$, $MB = y$, значення площі трапеції, згідно з умовою задачі, S = 1,5 кв. од.: $1{,}5=\dfrac{y+y-y'x}{2}\cdot x$. Після перетворень отримаємо шукане диференціальне рівняння $2xy-y'x^2=3$ або $y'=\dfrac{2xy-3}{x^2}$.◄

Задача 10.1.2. У посудину, що містить 100 л водного розчину солі, вливається чиста вода зі швидкістю 5 л/хв, а суміш витікає з тією ж швидкістю, причому концентрація розчину за допомогою перемішування є рівномірною. Скласти диференціальне рівняння вмісту солі в посудині.

►Нехай $y(t)$ — вміст солі в 100 л води на початок експерименту ($t_0 = t$), тоді концентрація водного розчину солі на момент t становить $\dfrac{y(t)}{100-y(t)}$. Знайдемо вміст солі в розчині через Δt хв: $y(t+\Delta t)=y(t)-\dfrac{y(t)}{100-y(t)+5\Delta t}\cdot 5\Delta t$, де $5\Delta t$ — кількість чистої води, що вливається, а також кількість суміші, що витікає за час Δt (оскільки швидкість однакова для обох процесів).

Величина $\dfrac{y(t)}{100-y(t)+5\Delta t}$ характеризує концентрацію соляного розчину на момент $t + \Delta t$. Звідси:

$$\Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)=-\frac{y(t)}{100-y(t)+5\Delta t}\cdot 5\Delta t .$$

Запишемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=-\dfrac{5y(t)}{100-y(t)+5\Delta t}$ та перейдемо в даній рівності до границі при $\Delta t\to 0$.

Отримаємо шукане диференціальне рівняння, що описує вміст солі в посудині: $y'=-\dfrac{5y}{100-y}$.◄

10.2. Завдання для самостійної роботи

Диференціальні рівняння першого порядку

1. Скласти диференціальне рівняння для заданої сім'ї кривих:

   1) $x^2+y^2-Cx=0$; 2) $x+y+C\left(1-xy\right)=0$;

   3) $x-y-Ce^{\frac{x}{y-x}}=0$; 4) $\arcsin\dfrac{y}{x}+x=C$; 5) $y=\sin x+C\cos x$;

   6) $y=x+C\sqrt{1+x^2}$; 7) $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $y=\sin Cx$;

   9) $y=\dfrac{C}{x-1}$; 10) $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=Cy^2$.

2. Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

   1) $\left(1+y^2\right)dx=\left(1+x^2\right)dy$; 2) $y'=e^{x+y}$; 3) $y'=\dfrac{1}{2y}$;

   4) $\left(1+y\right)dx=\left(1+x\right)dy$; 5) $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$; 6) $xy'+y'=y^2$;

   7) $y'=\dfrac{x}{e^y}$; 8) $y'=y\ln y$; 9) $y'=\dfrac{e^y}{x}$;

   10) $ydx=xdy$; 11) $\dfrac{dy}{dx}=e^x\cdot e^y$; 12) $y'=-y^2$, $y\left(1\right)=1$.

3. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння або такі, що зводяться до них:

   1) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$, $y\left(-1\right)=1$; 2) $\dfrac{dx}{y+x}=\dfrac{dy}{y-x}$;

   3) $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$, $y\left(1\right)=0$; 4) $y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$;

5) $\left(x+y-2\right)dx+\left(x-y+4\right)dy=0$; 6) $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$;

7) $2\left(x+y\right)dx+\left(3x+3y-1\right)dy=0,\ y\left(0\right)=2$.

4. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння та рівняння Бернуллі:

1) $y+y'=e^{-x},\quad y\left(0\right)=1$; 2) $y'-4\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x}$; 3) $y'+2xy=xe^{-x^2}$;

4) $y'+y=xy^2,\quad y\left(0\right)=2$; 5) $xy'+y^2\ln x=-y$;

6) $\left(x+y^2\right)dy+dx=0$; 7) $y'+\dfrac{1}{x}y=-y^2$;

8) $y'+xy=x^3$; 9) $xy'+y=x^3$.

5. Розв'язати диференціальні рівняння у повних диференціалах або такі, що зводяться до них, за допомогою інтегрувального множника:

1) $\left(2x-y\right)dx-xdy=0,\quad y\left(1\right)=1$;

2) $\left(3x-7y-3\right)y'=7x-3y-7$;

3) $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$;

4) $\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy=0$;

5) $\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos ydx-xdy=0$;

6) $ydx-\left(x+x^2+y^2\right)dy=0$;

7) $\left(2x\sin y-y^2\sin x\right)dx+\left(x^2\cos y+2y\cos x+1\right)dy=0$.

6. Знайти розв'язок диференціального рівняння не розв'язаного відносно похідної:

1) $y'\sin y'+\cos y'-y=0$; 2) $\ln y'+\sin y'-x=0$;

3) $\left(y'\right)^3-2x\left(y'\right)^2+y'=2x$; 4) $4\left(y'\right)^2-9x=0$;

5) $y'+y=x\left(y'\right)^2$; 6) $y=\left(y'\right)^2\cdot e^{y'}$; 7) $y=xy'-e^{y'}$;

8) $\left(y'\right)^2+\left(\sin x-2xy\right)y'-2xy\sin x=0$; 9) $y=x\left(y'\right)^2+\left(y'\right)^2$.

7. Встановити тип диференціального рівняння і знайти його розв'язок:

1) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; 2) $y'=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$;

3) $y'+ytgx=\sin 2x$; 4) $\left(x^2+xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$;

5) $xy'-3y=x^4e^x$; 6) $\left(2xy-x\right)y'=2y$;

7) $3x^2ydx+2\sqrt{4-x^3}dy=0$; 8) $\left(y'\right)^2-1=0$;

9) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{x^2\cos y+\sin 2y}$.

Диференціальні рівняння вищих порядків

1. Розв'язати диференціальні рівняння методом послідовного інтегрування:

1) $xy''=1,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=2$; 2) $y''=xe^{3x}$;

3) $y'''=\cos x$; 4) $y''=x\ln x$.

2. Розв'язати диференціальні рівняння, понизивши їх порядок за допомогою певної заміни:

1) $\left(y''x - y'\right)y' = 3x^4, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=0$;

2) $yy'' = \left(y'\right)^2$; 3) $y''' = \left(y''\right)^2$;

4) $yy''' + \left(y'\right)^2 = 0, \quad y\left(0\right)=1, \quad y'\left(0\right)=1$;

5) $y'' - 2y' ctg 2x = \sin^2 2x$; 6) $yy'' - y'\left(1+y'\right) = 0$;

7) $y''' = 2\left(y''-1\right)ctgx, \quad y\left(0\right)=0, \quad y'\left(0\right)=1$.

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=1$;

2) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=1$;

3) $y'' - 4y = 0, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=2$;

4) $y'' + y = 0, \quad y(\pi/2)=1, \quad y'(\pi/2)=0$;

5) $y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' = 0$;

6) $y'' + 4y' + 13y = 0$;

7) $y'' - 9y = 0, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=2$.

4. Знайти розв'язок неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, права частина якого має спеціальний вигляд:

1) $y'' - 2y' + y = xe^x, \ y(0)=1, \ y'(0)=1$; 2) $y'' + y' - 6y = \cos 2x$;

3) $y'' - 4y = e^{-2x} + e^{-x}$; 4) $y'' + y = \sin x, \ y(\pi/2)=1, \ y'(\pi/2)=0$;

5) $y'' + 2y' + 10y = 4x\cos x$; 6) $y'' - 2y' + y = (1+x^2)e^x$;

7) $y'' - 3y' = 1 + 6x$.

Системи лінійних диференціальних рівнянь. Дослідження стійкості розв'язку

1. Розв'язати однорідну систему лінійних диференціальних рівнянь (методом Ейлера або звівши її до диференціального рівняння другого порядку):

1) $\begin{cases} x'(t) = 8y - x, \\ y'(t) = x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x'(t) = x - y, \\ y'(t) = y - 4x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x'(t) = x - 3y, \\ y'(t) = 3x + y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x'(t) = 2x + y, \\ y'(t) = 3x + 4y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x'(t) = 2x + y, \\ y'(t) = 4y - x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x'(t) = 3x + y, \\ y'(t) = y - x; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x'(t) = y - 3x, \\ y'(t) = 5x - 2y. \end{cases}$

2. Розв'язати неоднорідну систему лінійних диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ \dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$

3. Дослідити стійкість нульового розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = 2y - z, \\ \dot{z} = z; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = x + y - z; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = z - y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = z - x. \end{cases}$

Задачі, при розв'язанні яких використовуються диференціальні рівняння

1. Плоска крива проходить через точку (–1; 1), а кутовий коефіцієнт дотичної до неї у будь-якій точці дорівнює квадрату ординати точки дотику. Знайти цю криву.

2. Про криву $y = y(x)$ відомо, що дотична, проведена у будь-якій її точці з додатними координатами, перетинає вісь Ox у точці, абсциса якої удвічі більша за абсцису точки дотику. Знайти площу трикутника, утвореного дотичною в точці (1; 2) до знайденої кривої і осями координат.

3. Моторний човен рухається зі швидкістю 5 м/с. Після того як вимкнули двигун, човен сповільнює свій рух під дією сили опору води, яка пропорційна швидкості човна, і через 40 секунд його швидкість зменшується до 2 м/с. Якою буде швидкість човна через 2 хв після того, як вимкнули двигун?

4. Відомо, що площа трапеції, обмеженої осями координат дотичною до кривої $y = f(x)$ у довільній її точці $M(x, y)$ і прямою, проведеною через точку M паралельно до осі ординат, дорівнює 3,5 кв. од. Побудувати математичну модель для знаходження усіх кривих $f(x)$, що мають вказану в умові властивість.

5. Відомо, що каструля з водою, яка закипіла, охолоджується до 60° в кімнаті з температурою 20° за 10 хвилин. За законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці температур. Скільки хвилин потрібно, щоб охолодити каструлю з водою до 25°?

6. Записати диференціальне рівняння для знаходження кривих, які мають таку властивість: відрізок осі абсцис, що відтинається дотичною та нормаллю, проведеними в довільній точці кривої, дорівнює $2a$.

7. У посудину, що містить 100 л водного розчину солі, вливається чиста вода зі швидкістю 5 л/хв, а суміш витікає з тією ж швидкістю, причому концентрація розчину у результаті перемішування є рівномірною. Скласти диференціальне рівняння вмісту солі в посудині.

8. Знайти швидкість спуску парашутиста масою m, якщо опір повітря пропорційний до квадрата його швидкості.

9. Кожна дотична до кривої перетинає вісь абсцис у точці, рівновіддаленій від точки дотику і початку координат. Знайти цю криву.

10. Бак, що має форму циліндра з радіусом основи $R = 2$ м і вертикальною віссю заввишки $h = 4$ м, наповнений водою. У дні бака відкрили зливний отвір круглої форми, радіус якого $r = 0{,}1$ м. Записати диференціальне рівняння, що описує залежність рівня води в баку від часу, якщо швидкість витікання води через отвір, розміщений на глибині x від поверхні води дорівнює $\mu\sqrt{2gx}$ (g — прискорення вільного падіння, $\mu = 0{,}62$).

Рекомендована література

1. Александров А.Д. Геометрия : учебное пособие / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. — М. : Наука, 1990. — 672 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М. : Наука, 1985. — 384 с.
3. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії : навчальний посібник / В.Н. Боровик, В.П. Яковець. — Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. — 464 с.
4. Вища математика: готуємось до атестації. Частина I. Теоретичні матеріали: навч. посібник / М.М. Астаф'єва, О.С. Литвин, С.П. Радченко, Ю.І. Самойленко, С.О. Семеняка; за заг. ред. М.М. Астаф'євої. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2022. — 176 с.
5. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. У 2-х ч. — К. : Вища шк., 1978. — Ч. 1. — 368 с. Ч. 2. — 390 с.
6. Давыдов Н.А. Сборник задач по математическому анализу / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. — М. : Просвещение, 1981. — 255 с.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М. : Наука, 1969. — 544 с.
8. Вища математика [Текст] : приклади і задачі : посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Академія, 2003. — 624 с.
9. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособ. Ч. I / Под ред. Н.Я. Виленкина. — М., 1971. — 349 с.
10. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособ. Ч. II / Под ред. Н.Я. Виленкина. — М., 1971. — 335 с.
11. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Частина 2 / С.Т. Завало, С.С. Левищенко, В.В. Пилаєв, І.А. Рокицький. — К. : Вища шк. Гол. в-во, 1986. — 264 с.
12. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. — М. : Наука, 1971. — 576 с.
13. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М. : Наука, 1983. — 304 с.
14. Каленюк П.І. Диференціальні рівняння / П.І. Каленюк, Ю.К. Рудавський, Р.М. Тацій та ін. — Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2014. — 380 с.
15. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. — М. : Наука, 1986. — 240 с.
16. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М. : Наука, 1963. — 431 с.
17. Ляпин Е.С. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Ч. 1. Числа / Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев. — М. : Просвещение, 1974. — 383 с.
18. Математичний аналіз у задачах і прикладах. У 2-х ч. : навчальний посібник для студентів вузів / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник та ін. — К. : Вища школа, 2003. — Ч. 1. — 462 с. Ч. 2. — 470 с.
19. Мельник Т.А. Комплексний аналіз : підручник. — К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. — 192 с.
20. Михелович Ш.Х. Теория чисел. — М. : Высшая школа, 1967. — 336 с.
21. Мищенко А.С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. — М. : Физматлит, 2004. — 304 с.
22. Погорелов А.В. Геометрия. — М. : Просвещение, 1993. — 176 с.
23. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. — 6-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1974. — 176 с.
24. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М. : Наука, 1984. — 432 с.
25. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. — К. : Либідь, 2003. — 600 с.
26. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння в задачах / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. — К. : Либідь, 2003. — 504 с.
27. Фадеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фадеев, И.С. Соминский. — М. : Наука, 1972. — 303 с.
28. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х т. — М. : Наука, 1968. — Т. 1. — 448 с. Т. 2. — 464 с.
29. Шкіль М.І. Вища математика у 3-х кн. Кн. 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. — К. : Либідь, 1994. — 280 с.
30. Шкіль М.І. Вища математика. Книга 1 / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник В.М. Котлова — К. : Либідь, 2010. — 592 с.
31. Шкіль М.І. Вища математика : підручник для студ. вищих пед. навч. закладів : у 2 кн. Кн. 2 / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник. — К. : Либідь, 2010. — 496 с.
32. Шкіль М.І. Диференціальні рівняння : навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. / М.І. Шкіль, В.М. Лейфура, П.Ф. Самусенко. — К. : Техніка, 2003. — 368 с.
33. Шкіль М.І. Звичайні диференціальні рівняння / М.І. Шкіль, М.А. Сотніченко. — К. : Вища школа, 1991. — 303 с.

Навчальне видання

АСТАФ'ЄВА Марія Миколаївна
ЛИТВИН Оксана Степанівна
РАДЧЕНКО Сергій Петрович
САМОЙЛЕНКО Юлія Іванівна
СЕМЕНЯКА Світлана Олексіївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА: ГОТУЄМОСЬ ДО АТЕСТАЦІЇ

У двох частинах

Частина II

ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник для студентів спеціальності 111 «Математика» першого (бакалаврського) освітнього рівня

За зміст і якість поданих матеріалів відповідають автори

Науково-методичний центр видавничої діяльності
Київського університету імені Бориса Грінченка

Завідувачка НМЦ видавничої діяльності *М.М. Прядко*
Відповідальна за випуск *А.М. Даниленко*
Над виданням працювали *О.А. Марюхненко, Т.В. Нестерова, Н.І. Погорєлова*

Підписано до друку ??.07.2023 р. Формат 60x84/16.
Ум. друк. арк. ??,??. Наклад ??? пр. Зам. № ?-??.

Київський університет імені Бориса Грінченка,
вул. Бульварно-Кудрявська, 18/2, м. Київ, 04053.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4013 від 17.03.2011 р.