INDEX COPERNICUS
INTERNATIONAL

№45
NOVEMBER, 2024

The issue of journal contains:

Proceedings of the III Correspondence International Scientific and Practical Conference

OPEN SCIENCE NOWADAYS: MAIN MISSION, TRENDS AND INSTRUMENTS, PATH AND ITS DEVELOPMENT

held on November 1st, 2024 by

NGO European Scientific Platform (Vinnytsia, Ukraine)
LLC International Centre Corporative Management (Vienna, Austria)

ISSN 2710-3056

GRAIL OF SCIENCE

PERIODICAL SCIENTIFIC JOURNAL

ISSN 2710–3056

INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL

GRAIL OF SCIENCE

№ 45 (November, 2024)

with the proceedings of the:

III Correspondence International Scientific and Practical Conference

OPEN SCIENCE NOWADAYS: MAIN MISSION, TRENDS AND INSTRUMENTS, PATH AND ITS DEVELOPMENT

held on November 1st, 2024 by

NGO European Scientific Platform (Vinnytsia, Ukraine)
LLC International Centre Corporative Management (Vienna, Austria)

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

ГРААЛЬ НАУКИ

№ 45 (листопад, 2024)

за матеріалами:

III Міжнародної науково-практичної конференції

ВІДКРИТА НАУКА СУЧАСНОСТІ: ГОЛОВНА МІСІЯ, НАПРЯМИ ТА ІНСТРУМЕНТИ, ШЛЯХ І ЇЇ РОЗВИТОК

що проводилася 01.11.2024

ГО «Європейська наукова платформа» (Вінниця, Україна)
ТОВ «International Centre Corporative Management» (Відень, Австрія)

Вінниця – Відень, 2024

DOI 10.36074/grail-of-science.01.11.2024

ГРААЛЬ НАУКИ : міжнар. наук. журнал. – Вінниця : ГО «Європейська наукова платформа»; НУ «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці», 2024. – No 45. – 702 с.

Видання розраховане на науковців, викладачів, аспірантів, студентів, усіх, хто прагне отримати ґрунтовні знання теоретичного і прикладного характеру.

Рекомендовано до видання Вченою Радою Наукової установи «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці». Протокол № 60 від 31.10.2024.

«Грааль науки» є офіційно зареєстрованим мультидисциплінарним науковим виданням з міжнародною сферою поширення, що підтримує політику відкритого доступу. **Ідентифікатор медіа R30-02704** (рішення № 430 від 22.02.2024 Національної Ради України з питань телебачення і радіомовлення).

Наказом МОН України № 582 від 24.04.2024 виданню «Грааль науки» присвоєно Категорію Б фахових видань України з питань економіки (051 «Економіка»).

«Грааль науки» індексується в міжнародних реферативних та наукометричних базах даних:
Index Copernicus Journals Master List; «Наукова періодика України» (Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського НАН України); Національний репозитарій академічних текстів; Google Scholar; WorldCat; Open Ukrainian Citation Index; CrossRef; Mendeley; Scite; Semantic Scholar; Scilit; OpenAIRE, PubPeer.

Конференція зареєстрована УкрІНТЕІ (Посвідчення № 370 від 12.06.2024) та сертифікована Euro Science Certification Group (Сертифікат № 22686 від 27.09.2024).

ISSN 2710–3056

DOI 10.36074/grail-of-science.01.11.2024.058

UNKNOWN FORMULAS OF TRIANGLE ANGLE BISECTOR SEGMENTS

Liudmyla Hetmanenko
Senior Lecturer,
Department of the Natural Sciences and Mathematics Education and Technologies
Institute of In-Service Teacher's Training
Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine

Summary. *In triangle geometry, alongside basic segments such as altitudes, angle bisectors, medians, and circle radii, there exist so-called secondary segments which, despite their less obvious nature, play a crucial role in solving various geometric problems. The study of these segments significantly deepens the understanding of triangle properties, enriching its structural geometry. This paper, in particular, examines segments located on the angle bisector of a triangle. It is noteworthy that these segments exhibit cyclic properties, meaning they can be found on the bisectors of all triangle angles, not just one. The analysis of these segments enables the derivation of a set of important formulas presented in this work. The obtained results may prove valuable in solving a wide range of geometric problems related to the properties of triangles.*
Keywords: *Mansion Circle; Circumscribed Circle; Inscribed Circle; Excircle; Angle Bisector; Angle Bisector Segments; Trinity formula; Identity Proofs; Segments of Tangents to the Circle.*

The center of the inscribed circle in triangle ABC lies on the bisector of angle $\angle BAC$, or I, the incenter of the triangle. The line AI intersects the circumscribed circle around triangle ABC at point W_1, which is the center of the Mansion circle with radius

$$W_1C = W_1B = W_1I = R_M.$$

Similarly, the point I_a lies on the bisector AI as the center of the excircle, which is tangent to the extensions of two sides AC and AB of triangle ABC and to side BC (see Fig. 1).

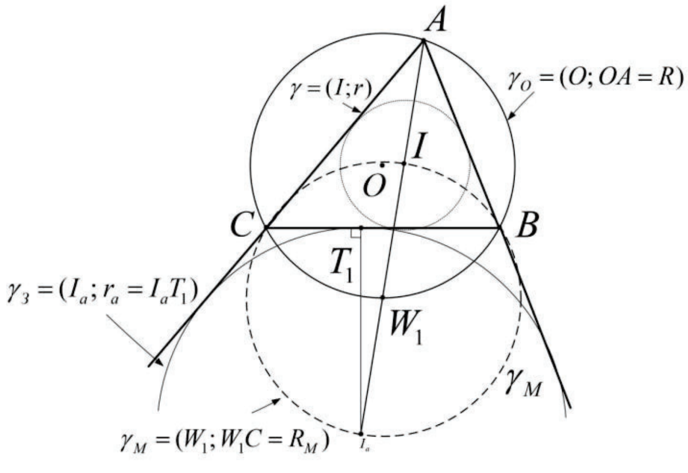

Fig. 1

ISSN 2710–3056

This paper discusses segments located on the angle bisector $\angle BAC$ of triangle ABC and the resulting formulas. Problems are presented for consideration, and a series of related identities are proven.

Problem 1.

Prove the two proposed formulas: $AI + AI_a = 2AW_1$ or $\frac{AI+AI_a}{2} = AW_1$.

Proof.

$$AW_1 = AI + IW_1, \quad (1)$$

$$AW_1 = AI_a - IW_1, \quad (2)$$

Thus, (1) + (2) → $2AW_1 = AI + AI_a$.

$\frac{AI+AI_a}{2} = AW_1$.

Problem 2.

Prove the formula $AI_a - AI = 2IW_1$ [3].

Proof.

The proof follows from the Mansion circle $\gamma_M(W_1; R_M = W_1C = W_1B = IW_1)$.

Alternatively, $IW_1 = I_aW_1 = R_M$, the radius of the Mansion circle.

Or $AI_a - AI = II_a$.

Since $II_a = 2R_M$, the diameter of the Mansion circle, we have $II_a = 2IW_1$.

Therefore, $AI_a - AI = 2IW_1$.

Problem 3.

Prove the formula $AI \cdot AI_a = bc$,

where b and c are the sides AC and AB of triangle ABC. This formula is known as the Trinity formula [1] introduced in the works of I. A. Kushnir [2], an honored teacher of Ukraine and author of more than 60 books.

Proof.

We apply the well-known formula for the area of a triangle, $S = rp$, where r is the radius of the inscribed circle, and p is the semiperimeter of triangle ABC (see Fig. 2).

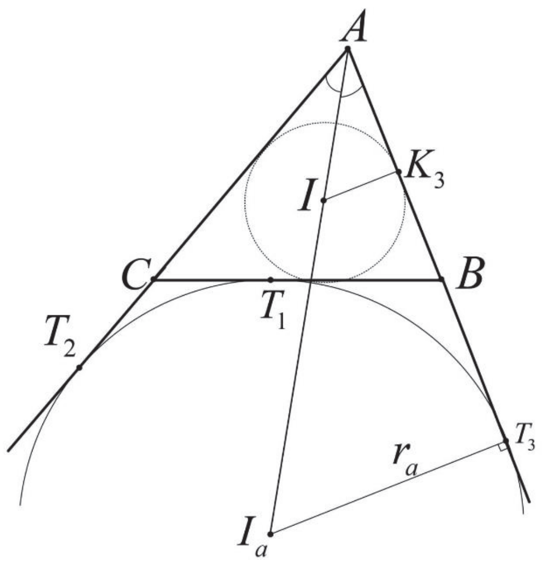

Fig. 2

$r = IK_3 = AI \sin\frac{\angle BAC}{2}$

$p = AT_3 = AI_a \cos\frac{\angle BAC}{2}$.

Since $AT_3 = AT_2$, as they are segments of tangents to the excircle $\gamma_3 = (I_a; r_a)$, we have

$$AT_2 = AC + CT_2 = AC + CT_1, \quad (3)$$

$$AT_3 = AB + BT_3 = AB + BT_1, \quad (4)$$

Setting (3) equal to (4), otherwise we get

$AC + CT_1 = AB + BT_1 = p$.

We have $S = rp = AI \sin\frac{\angle BAC}{2} \cdot AI_a \cos\frac{\angle BAC}{2}$ (applying the double-angle sine formula).

$S = \frac{1}{2} AI \cdot AI_a \sin\angle BAC$,

$S = \frac{1}{2} AI \cdot AI_a \sin\angle BAC = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\angle BAC$,

$AI \cdot AI_a = bc$.

Proven.

We will prove the identities that form the segments of the angle bisectors of the triangle (see Fig. 3).

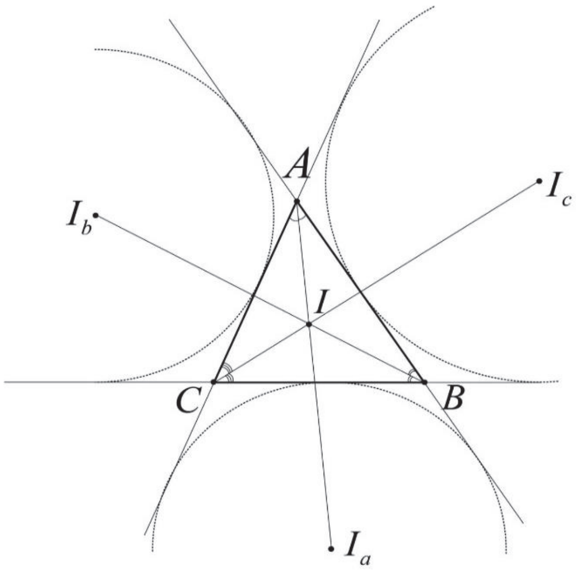

Fig. 3

Problem 4.

Prove the formula $\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} = 1$.

Proof.

We have (see Fig. 3) $\frac{AI}{AI_a} = \frac{p-a}{p}$, since

$AI = AK_3 \cos\frac{\angle BAC}{2} = (p-a)\cos\frac{\angle BAC}{2}$, and

$AI_a = AT_3 \cos\frac{\angle BAC}{2} = p \cos\frac{\angle BAC}{2}$.

Therefore, $\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{p} = \frac{3p-2p}{p} = \frac{p}{p} = 1$.

Proven.

Problem 5.

Prove that $\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ac} + \frac{CI^2}{ab} = 1$.

where a, b, and c are the sides BC, AC, and AB of triangle ABC.

Proof.

We have $\frac{AI^2}{bc} = \frac{AI^2}{AI \cdot AI_a} = \frac{AI}{AI_a}$, (since $bc = AI \cdot AI_a$ – see Problem 3).

Similarly, $\frac{BI^2}{ac} = \frac{BI^2}{BI \cdot BI_b} = \frac{BI}{BI_b}$, $\frac{CI^2}{ab} = \frac{CI}{CI_c}$.

The sum of these fractions $\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c}$ equals 1 (proven in Problem 4).

Thus, $\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ac} + \frac{CI^2}{ab} = \frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} = 1$.

Proven.

Similarly, it can be proven that $\frac{bc}{AI^2} + \frac{ac}{BI^2} + \frac{ab}{CI^2} = 1$.

Problem 6.

Prove that $\frac{K_2K_3}{T_2T_3} + \frac{K_1K_3}{{T_1}^b{T_3}^b} + \frac{K_1K_2}{{T_1}^c{T_2}^c} = 1$ [4]

Where K_1, K_2, and K_3 are the points of tangency of the inscribed circle with the sides BC, AC, and AB of triangle ABC; ${T_1}^b$, ${T_1}^c$; T_2, ${T_2}^c$; T_3, ${T_3}^b$ are the points of tangency of the excircles with the sides BC, AC, and AB of triangle ABC (see Fig. 5).

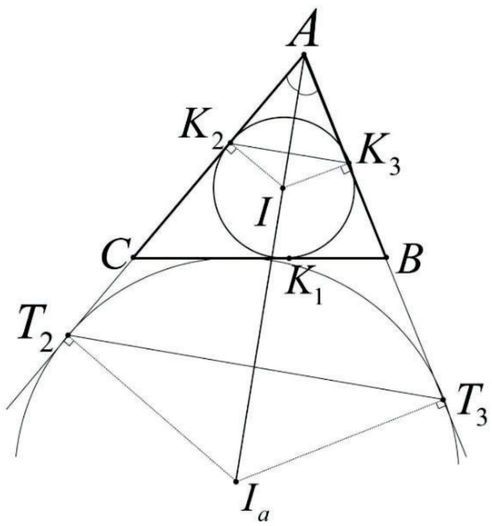

Fig. 4

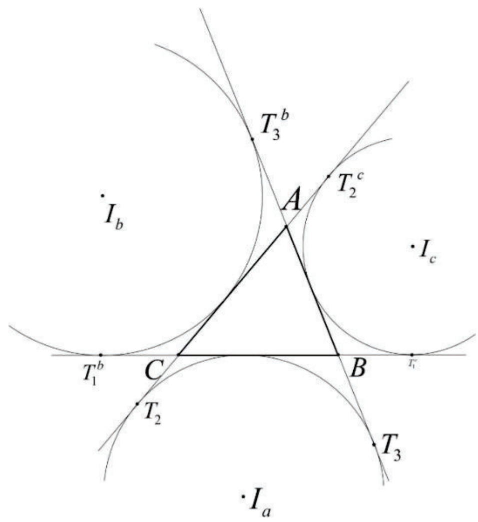

Fig. 5

Proof.

We have (see Fig. 4) $\frac{K_2K_3}{T_2T_3} = \frac{AI \sin\angle BAC}{AI_a \sin\angle BAC}$ or $\frac{K_2K_3}{T_2T_3} = \frac{AI}{AI_a}$.

Similarly (see Fig. 5), $\frac{K_1K_2}{{T_1}^c{T_2}^c} = \frac{CI \sin\angle ACB}{CI_c \sin\angle ACB} = \frac{CI}{CI_c}$, $\frac{K_1K_3}{{T_1}^b{T_3}^b} = \frac{BI \sin\angle ABC}{BI_b \sin\angle ABC} = \frac{BI}{BI_b}$.

Otherwise we have $\frac{K_2K_3}{T_2T_3} + \frac{K_1K_3}{{T_1}^b{T_3}^b} + \frac{K_1K_2}{{T_1}^c{T_2}^c} = \frac{AI}{AI_a} + \frac{CI}{CI_c} + \frac{BI}{BI_b} = 1$ (see identity 4).

Proven.

Problem 7.

Prove that $AI^2 \sin\angle BAC + BI^2 \sin\angle ABC + CI^2 \sin\angle ACB = 2S$.

ISSN 2710–3056

Proof.

Consider $I^2 \sin\angle BAC = \frac{AI \cdot AI \sin\angle BAC \cdot AI_a}{AI_a} = \frac{AI \cdot AI_a \sin\angle BAC \cdot AI}{AI_a} = \frac{2S \cdot AI}{AI_a}$ where we applied the formula from Problem 3, $AI \cdot AI_a = bc$.

Therefore, we have:

$$AI^2 \sin\angle BAC + BI^2 \sin\angle ABC + CI^2 \sin\angle ACB = \frac{2S \cdot AI}{AI_a} + \frac{2S \cdot BI}{BI_b} + \frac{2S \cdot CI}{CI_c} =$$
$$= 2S\left(\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c}\right) = 2S \text{ (see identity 4).}$$

Proven.

Problem 8.

Prove that $S = \frac{1}{2}\left(\frac{(K_2K_3)^2}{\sin\angle BAC} + \frac{(K_1K_3)^2}{\sin\angle ABC} + \frac{(K_1K_2)^2}{\sin\angle ACB}\right)$ [3].

Proof.

We have $\frac{(K_2K_3)^2}{\sin\angle BAC} = \frac{(AI \sin\angle BAC)^2}{\sin\angle BAC} = AI^2 \sin\angle BAC$ or

$$\frac{(K_2K_3)^2}{\sin\angle BAC} + \frac{(K_1K_3)^2}{\sin\angle ABC} + \frac{(K_1K_2)^2}{\sin\angle ACB} = AI^2 \sin\angle BAC + BI^2 \sin\angle ABC + CI^2 \sin\angle ACB = 2S$$

(see identity 7).

Otherwise we have $\frac{1}{2}\left(\frac{(K_2K_3)^2}{\sin\angle BAC} + \frac{(K_1K_3)^2}{\sin\angle ABC} + \frac{(K_1K_2)^2}{\sin\angle ACB}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2S = S$.

$S = S$. Proven.

Problem 9.

Prove the formula $AI \cdot IW_1 = 2Rr$,
where R is the radius of the circumcircle of triangle ABC.

Proof.

We have $AI = \frac{r}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}$ (see Fig. 2).

Also, $IW_1 = CW_1$ (as the radius of the Mansio circle).

Now, $IW_1 = CW_1 = 2R \sin\frac{\angle BAC}{2}$ (see triangle CDW_1) (Fig. 6).

Thus, we can write $AI \cdot IW_1 = \frac{r}{\sin\frac{\angle BAC}{2}} \cdot 2R \sin\frac{\angle BAC}{2} = 2Rr$.

Proven.

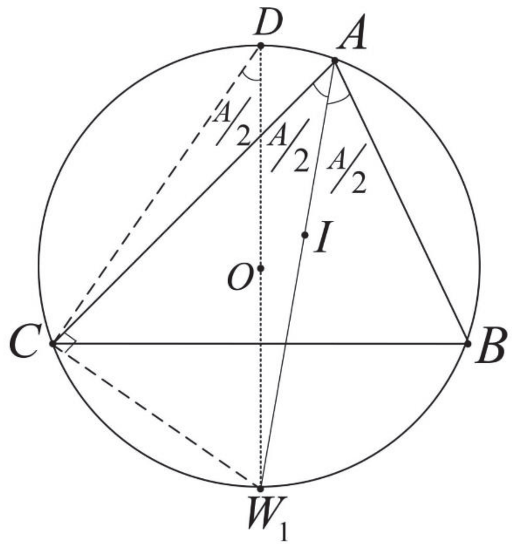

Fig. 6

Problem 10.

Prove that $AI^2 = bc^2 - 4Rr$,

where b and c are the sides AC and AB of triangle ABC; R is the radius of the circumcircle of triangle ABC.

Proof.

We have

$bc = AI \cdot AI_a$ (see the formula from Problem 3).

$2Rr = AI \cdot IW_1$ (see the formula from Problem 9).

Also, $bc - 4Rr = AI \cdot AI_a - 2AI \cdot IW_1 = AI(AI_a - 2IW_1)$

Using the formula from Problem 2:

$AI_a - AI = 2IW_1$, or $AI_a - 2IW_1 = AI$.

Therefore, we have: $bc - 4Rr = AI(AI_a - 2IW_1) = AI \cdot AI = AI^2$.

Proven.

I invite the readers to attempt to prove the formula $\mathrm{AI_a} \cdot \mathrm{I_aW_1} = 2\mathrm{Rr_a}$, which is manageable but equally significant.

References:

[1] Гетманенко, Л. (2023). ФОРМУЛА-ТРІЙЦЯ ЯК РЕЗУЛЬТАТ ЕМОЦІЙНОГО ПОШУКУ НОВИХ ФОРМУЛ ГЕОМЕТРІЇ. Фізико-математична освіта, 38(4), 31–35. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-004
[2] Кушнір І.А. (2002). ГЕОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ, ЩО НЕ ВВІЙШЛИ ДО ШКІЛЬНИХ ПІДРУЧНИКІВ. Київ: Факт.
[3] Кушнір І.А. (2007). ТРІУМФ ШКІЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ: НАВЧ. ПОСІБНИК ДЛЯ 7-11 КЛ. Київ: Наш час.
[4] Рубльов Б.В. (2016). МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДНІ ЗМАГАННЯ ШКОЛЯРІВ УКРАЇНИ: 2014/15 НАВЧАЛЬНИЙ РІК. Харків: Гімназія

НЕВІДОМІ ФОРМУЛИ ВІДРІЗКІВ БІСЕКТРИСИ КУТА ТРИКУТНИКА

Гетманенко Людмила Миколаївна
старша викладачка кафедри природничо-математичної освіти і технологій
Інститут післядипломної освіти
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна

Анотація. *У геометрії трикутника, поряд із базовими відрізками, такими як висоти, бісектриси, медіани та радіуси кіл, існують також так звані неосновні відрізки, які, попри свою менш очевидну природу, відіграють ключову роль у вирішенні багатьох геометричних задач. Вивчення цих відрізків значно поглиблює розуміння властивостей трикутника, збагачуючи його структурну геометрію. Зокрема, у даній статті розглядаються відрізки, що лежать на бісектрисі кута трикутника. Важливо зазначити, що ці відрізки є циклічними, тобто можуть бути розташовані на бісектрисах усіх кутів трикутника, а не лише на одній із них. Аналіз цих відрізків дозволяє вивести низку важливих формул, які пропонуються в цій роботі. Отримані результати можуть бути корисними у вирішенні широкого кола геометричних задач, що стосуються властивостей трикутників.*

Ключові слова: *коло Мансіона; описане коло; вписане коло; зовнівписане коло; бісектриса кута; відрізки бісектриси кута; формула-трійця; доведення тотожностей; відрізки дотичних до кола.*