INDEX COPERNICUS INTERNATIONAL

№46
NOVEMBER, 2024

## The issue of journal contains:

Proceedings of the VIII Correspondence International Scientific and Practical Conference

**GLOBALIZATION OF SCIENTIFIC KNOWLEDGE: INTERNATIONAL COOPERATION AND INTEGRATION OF SCIENCES**

held on November 29th, 2024 by

NGO European Scientific Platform (Vinnytsia, Ukraine)
LLC International Centre Corporative Management (Vienna, Austria)

ISSN 2710-3056

# GRAIL OF SCIENCE

PERIODICAL SCIENTIFIC JOURNAL

ISSN 2710–3056

INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL

# GRAIL OF SCIENCE

№ 46 (November, 2024)

with the proceedings of the:

VIII Correspondence International Scientific and Practical Conference

## GLOBALIZATION OF SCIENTIFIC KNOWLEDGE: INTERNATIONAL COOPERATION AND INTEGRATION OF SCIENCES

held on November 29th, 2024 by

NGO European Scientific Platform (Vinnytsia, Ukraine)
LLC International Centre Corporative Management (Vienna, Austria)

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

# ГРААЛЬ НАУКИ

№ 46 (листопад, 2024)

за матеріалами:

VIII Міжнародної науково-практичної конференції

## ГЛОБАЛІЗАЦІЯ НАУКОВОГО ЗНАННЯ: МІЖНАРОДНЕ СПІВРОБІТНИЦТВО ТА ІНТЕГРАЦІЯ НАУК

що проводилася 29.11.2024

ГО «Європейська наукова платформа» (Вінниця, Україна)
ТОВ «International Centre Corporative Management» (Відень, Австрія)

Вінниця – Відень, 2024

**DOI** 10.36074/grail-of-science.29.11.2024

**ГРААЛЬ НАУКИ : міжнар. наук. журнал. – Вінниця : ГО «Європейська наукова платформа»; НУ «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці», 2024. – No 46. – 1036 с.**

*Видання розраховане на науковців, викладачів, аспірантів, студентів, усіх, хто прагне отримати ґрунтовні знання теоретичного і прикладного характеру.*

**Рекомендовано до видання Вченою Радою Наукової установи «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці». Протокол № 64 від 28.11.2024.**

---



---

«Грааль науки» є офіційно зареєстрованим мультидисциплінарним науковим виданням з міжнародною сферою поширення, що підтримує політику відкритого доступу. **Ідентифікатор медіа R30-02704** (рішення № 430 від 22.02.2024 Національної Ради України з питань телебачення і радіомовлення).

**Наказом МОН України № 582 від 24.04.2024 виданню «Грааль науки» присвоєно Категорію Б фахових видань України з питань економіки (051 «Економіка»).**

**«Грааль науки» індексується в міжнародних реферативних та наукометричних базах даних:**
Index Copernicus Journals Master List; «Наукова періодика України» (Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського НАН України); Національний репозитарій академічних текстів; Google Scholar; WorldCat; Open Ukrainian Citation Index; CrossRef; Mendeley; Scite; Semantic Scholar; Scilit; OpenAIRE, PubPeer.

Конференція зареєстрована УкрІНТЕІ (Посвідчення № 371 від 12.06.2024) та сертифікована Euro Science Certification Group (Сертифікат № 22689 від 21.10.2024).

*За точність викладених фактів та коректність цитування відповідальність несе автор.*

ARTICLE

DOI 10.36074/grail-of-science.29.11.2024.095

# ТРИКУТНИК ТРЬОХ ЦЕНТРІВ ЗОВНІВПИСАНИХ КІЛ

Гетманенко Людмила Миколаївна
старша викладачка кафедри природничо-математичної освіти і технологій
Інститут післядипломної освіти
*Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна*

*Анотація.* *У статті досліджено властивості трикутника, утвореного центрами трьох зовнівписаних кіл $\gamma_a$, $\gamma_b$, $\gamma_c$, побудованих для довільного трикутника $ABC$. Розглянуто геометричні залежності між трикутником $ABC$ і трикутником $I_a$, $I_b$, $I_c$, а також властивості, що випливають із цієї побудови. Показано, що трикутник $ABC$ є ортоцентричним до трикутника $I_a$, $I_b$, $I_c$, а описане навколо трикутника $ABC$ коло є одночасно колом Ейлера для трикутника $I_a$, $I_b$, $I_c$. Запропоновано нові формули для сторін трикутника $I_a$, $I_b$, $I_c$, а також позиційні задачі на побудову трикутника $ABC$ за заданими точками. Уперше висвітлено зв'язок між елементами цих трикутників і колом Ейлера та запропоновані до розв'язку задачі, які раніше не були опубліковані.*

*Ключові слова:* *зовнівписане коло, коло Ейлера, коло дев'яти точок, ортоцентричний трикутник, позиційні задачі, півколо на стороні трикутника як на діаметрі.*

The circumcircle of triangle $ABC$, with center $O$ and radius $R$, is denoted as $\gamma_1 = (O;\ OA = R)$.

In addition to the circle $\gamma_1$, let us consider the excircles $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ of triangle $ABC$, which are tangent to one of the sides of the triangle $a$, $b$, or $c$ ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) and to the extensions of the other two sides (Fig. 1).

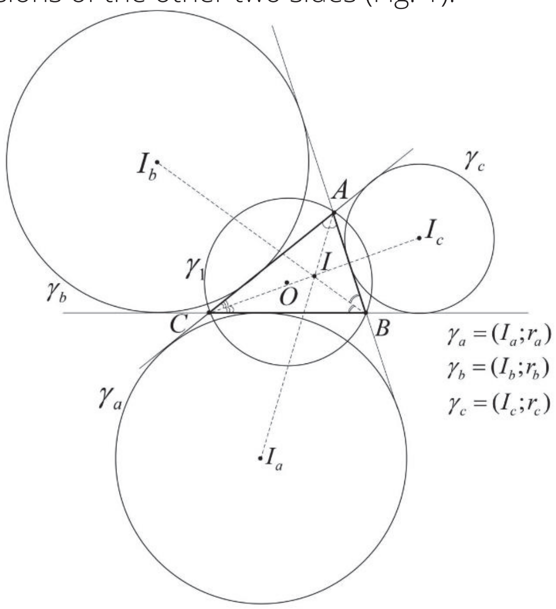


Fig.1

 

ISSN 2710–3056



The centers $I_a$, $I_b$ and $I_c$ of the circles $\gamma_a$, $\gamma_b$, $\gamma_c$, respectively, lie on the angle bisectors of the angles $\angle BAC$, $\angle ABC$ and $\angle ACB$.

Connecting the points $I_a$, $I_b$ and $I_c$, we obtain the triangle $I_aI_bI_c$. Let us explore some properties of the triangle $I_aI_bI_c$, derived formulas, and new positional problems related to the construction of triangle $ABC$ from three given points. These problems are published here for the first time.

Property 1. Since the center of an excircle is the intersection point of the internal angle bisector and two external angle bisectors, the angle $\angle I_cAI_a = 90°$ (as the angle between the bisectors of adjacent angles) (Fig. 2).

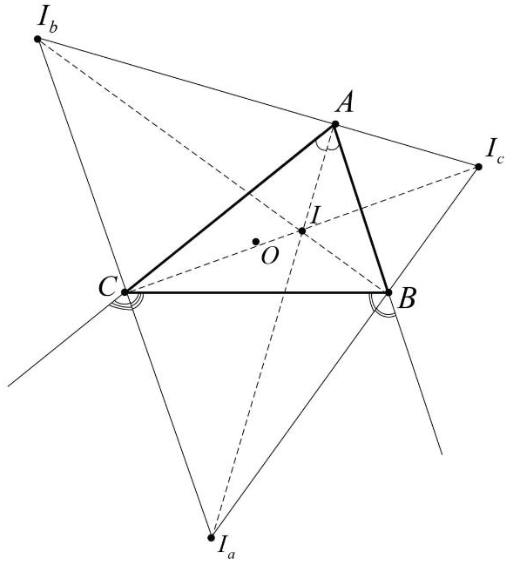


Fig. 2

Similarly, the angles $\angle I_aBI_b$ and $\angle I_bCI_c$ are also $90°$. This implies that the vertices of triangle $ABC$ lie on the sides $I_bI_c$, $I_cI_a$ and $I_bI_a$, serving as the feet of the altitudes of triangle $I_aI_bI_c$. Thus, $I_aA$, $I_bB$ and $I_cC$ are the altitudes of triangle $I_aI_bI_c$.

Triangle $ABC$ is therefore referred to as the orthocentric triangle of triangle $I_aI_bI_c$. The circumcircle $\gamma_1$, circumscribing triangle $ABC$, is the Euler circle (or the nine-point circle) of triangle $I_aI_bI_c$. The midpoints of the sides of triangle $I_aI_bI_c$ lie on the Euler circle $\gamma_1$ (Fig. 3).

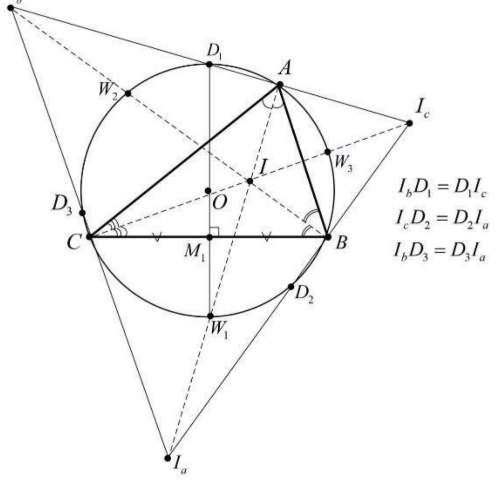


Fig. 3

Property 2. The angles of triangle $I_aI_bI_c$ are equal to $90° - \frac{\angle A}{2}$, $90° - \frac{\angle B}{2}$ and $90° - \frac{\angle C}{2}$, where $\angle A = \angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$ and $\angle C = \angle ACB$. This result follows from triangle $CI_aB$ (Fig. 2).

Specifically, the angles $\angle BCI_a = 90° - \frac{\angle C}{2}$ and $\angle CBI_a = 90° - \frac{\angle B}{2}$, since $CI_a$ and $BI_a$ are the external bisectors of the angles at vertices $C$ and $B$ of triangle $ABC$.

Property 3. Since the circumcircle $\gamma_1$ with radius $R$, circumscribing triangle $ABC$, is the Euler circle of triangle $I_aI_bI_c$, the radius of the circumcircle of triangle $I_aI_bI_c$, equals $2R$, i.e., it is twice as large [2].

Using the sine rule as a corollary, the sides of triangle $I_aI_bI_c$: can be expressed as follows:

$$I_bI_c = 2 \cdot 2R\, sin(90° - \tfrac{\angle A}{2}) = 4R\, cos\tfrac{\angle A}{2};$$
$$I_aI_c = 4R\, sin(90° - \tfrac{\angle B}{2}) = 4R\, cos\tfrac{\angle B}{2}; \quad (1)$$
$$I_aI_b = 4R\, cos\tfrac{\angle C}{2}.$$

Let us propose an alternative way to express the sides of triangle $I_aI_bI_c$ . Refer to Figure 4 for this approach.

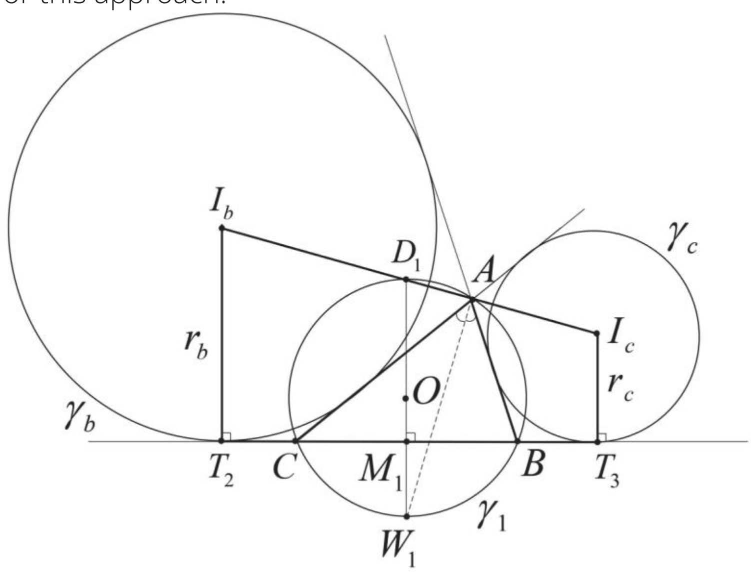


Fig. 4

Points $T_2$ and $T_3$ are the points of tangency of the excircles $\gamma_2$ and $\gamma_3$ with the extension of side $BC = a$.

From the symmetry of the construction, $CM_1 = M_1B$, and thus $T_2M_1 = M_1T_3$. The distances from the centers of the excircles to the tangency points are $I_cT_3 = r_c$, $I_bT_2 = r_b$.

This configuration forms a right trapezoid $I_bT_2T_3I_c$ with bases equal to $r_b$ and $r_c$, and a midline $M_1D_1$, which equals $\frac{r_b+r_c}{2}$ ($I_bD_1 = D_1I_c$).

$$M_1D_1 = \frac{r_b+r_c}{2} \quad (2)$$

From $\angle I_cCI_b = 90°$, and the fact that $D_1$ is the midpoint of side $I_bI_c$ (Fig. 5), it follows that $I_bD_1 = CD_1 = D_1I_c$ (as the median to the hypotenuse). Similarly, $\angle I_bBI_c = 90°$ (see Property 1), so $D_1B = I_cD_1 = I_bD_1$.

$$I_bD_1 = I_cD_1 = CD_1 = BD_1 \quad (3)$$

ISSN 2710–3056



From triangle $CD_1M_1$, we can express $CD_1$ using Equation (2):

$$CD_1 = \frac{D_1M_1}{\cos\frac{\angle A}{2}} = \frac{r_b + r_c}{2\cos\frac{\angle A}{2}}$$

Hence, $I_bI_c = 2CD_1$ (using Equation (3)):

$$I_bI_c = \frac{r_b+r_c}{\cos\frac{\angle A}{2}} \quad (4)$$

Similarly, $I_aI_b = \frac{r_a+r_b}{\cos\frac{\angle C}{2}}$, $I_aI_c = \frac{r_a+r_c}{\cos\frac{\angle B}{2}}$.

Thus, we have derived two distinct formulas, Equations (1) and (4), for the sides of triangle $I_aI_bI_c$.

In reference [4], the following formula is proposed:

$$I_bI_c^{\,2} = 4R(r_b + r_c) \quad (5)$$

By applying Equations (1) and (4), we obtain:

$$I_bI_c^{\,2} = I_bI_c \cdot I_bI_c = 4R\cos\frac{\angle A}{2} \cdot \frac{r_b+r_c}{\cos\frac{\angle A}{2}} = 4R(r_b + r_c).$$

The following formula is suggested for independent proof:

$$S_{ABC} = r_br_c\sqrt{\frac{I_bI_c^{\,2}}{(r_b + r_c)^2} - 1}$$

Positional problems for constructing triangle $ABC$ based on three given points were studied and compiled by the Ukrainian scholar, educator, and Honored Teacher of Ukraine I.A. Kushnir [3].

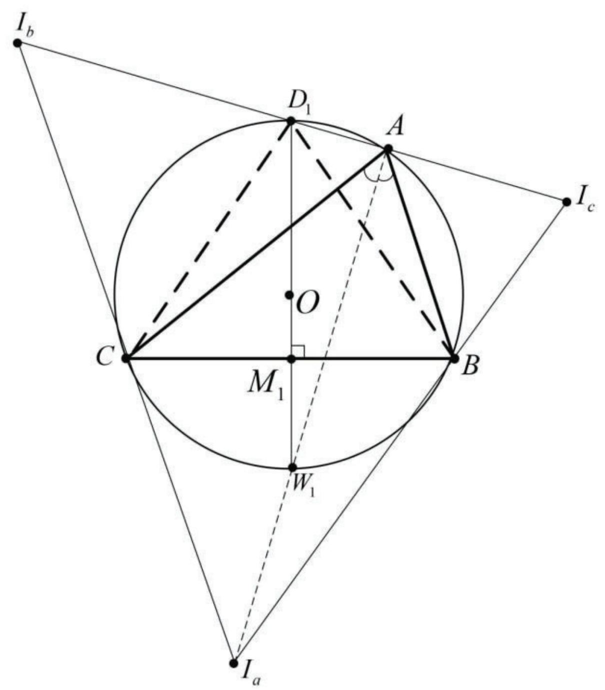


Fig. 5

I propose new positional problems that have not been previously published (see Fig. 5):

1) $I_b$, $I_c$, $M_1$;

2) $I_b$, $I_c$, $I$;

 

ISSN 2710–3056



3) $I_b$, $I_c$, $O$;
4) $I_b$, $I_c$, $W_1$;
5) $I_b$, $I_c$, $(h_a)_X$;
6) $I_b$, $I_c$, $L_1$,
where $CM_1 = M_1B$;
$AI_a \cap BI_b \cap CI_c = I$ (the incenter of triangle $ABC$);
$O$ is the center of the circumcircle of triangle $ABC$;
$AI_a \cap \gamma_1 = W_1$, $AI_a \cap BC = L_1$;
$(h_a)_X$ is the line perpendicular to side $BC$ of triangle $ABC$ and passing through vertex $A$.

More similar construction problems can be found in article [1].

I propose considering the construction of triangle $ABC$ based on the points $I_a$, $I_b$, $I_c$.

1. Connect points $I_b$ and $I_c$ to form side $I_bI_c$ of triangle $I_aI_bI_c$. From previous results (Equation 3), $I_bD_1 = D_1C$. This gives point $D_1$, the midpoint of $I_bI_c$ (Fig. 6).

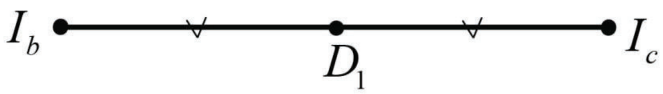


Fig. 6

2. The segment $M_1D_1$ is perpendicular to side $BC$ of triangle $ABC$. By connecting the given points $I_b$, $I_c$, and $M_1$, we determine the angles $\angle I_bM_1D_1$ and $\angle I_cM_1D_1$. Accordingly:
$\angle CM_1I_b = 90° - \angle I_bM_1D_1$,
$\angle BM_1I_c = 90° - \angle I_cM_1D_1$.

Segments $I_bM_1$ and $I_cM_1$ are the hypotenuses of triangles $I_bM_1T_2$ and $I_cM_1T_3$, respectively (Figure 4).

Thus, the right triangles $I_bM_1T_2$ and $I_cM_1T_3$ can be constructed using their hypotenuses and one acute angle. This results in the line $T_2T_3$, where $M_1 \in T_2T_3$. Consequently, $BC \subset T_2T_3$.

3. We apply Property 1 ($I_cC$ and $I_bB$ are the heights of the triangle $I_aI_bI_c$), and draw the semicircle $\varphi$ with center $D_1$ on the diameter $I_bI_c$ (Fig. 7). The semicircle $\varphi$ will intersect the line $T_2T_3$ at points $B$ and $C$ of triangle $ABC$.

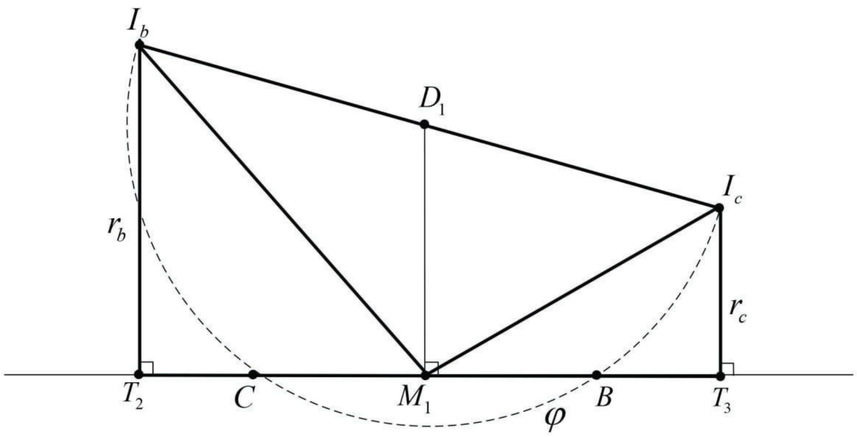


Fig. 7

 

ISSN 2710–3056



4. In Fig. 7, triangle $I_bT_2C$ is formed with angle $\angle I_bCT_2$. It is sufficient to extend the ray $CA$ at angle $\angle I_bCT_2$ from $CI_b$.

$CA \cap I_bI_c = A$, since $CI_b$ is the bisector of the exterior angle $\angle BCA$ of triangle $ABC$. The triangle $ABC$ is constructed.

I suggest solving the following problems independently and deriving great satisfaction from it.

**References:**


[1] Hetmanenko, L. (2024). The role of interactive learning in mathematics education: fostering student engagement and interest. *Multidisciplinary Science Journal*, *6*, 2024ss0733. https://doi.org/10.31893/multiscience.2024ss0733

[2] Кушнір І.А. (1991). Трикутник і тетраедр у задачах. Київ: Радянська школа

[3] Кушнир И.А. (2019). Позиционные задачи. Список Верника. Список Кушнира. Днепр: Середняк Т.К.

[4] Яремчук Ф.П. (ред.) (1966). Збірник геометричних задач. Київ: Радянська школа.


## TRIANGLE OF THREE CENTERS OF EXSCRIBED CIRCLES


Liudmyla Hetmanenko
Senior Lecturer,
Department of the Natural Sciences and Mathematics Education and Technologies
Institute of In-Service Teacher's Training
*Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine*



*Summary The paper investigates the properties of the triangle formed by the centers of the three excircles, $\gamma_a$, $\gamma_b$, $\gamma_c$, constructed for an arbitrary triangle $ABC$. Geometric relationships between the triangle $ABC$ and the triangle $I_a$, $I_b$, $I_c$ are examined, along with the properties arising from this construction. It is shown that the triangle $ABC$ is orthocentric to the triangle $I_a$, $I_b$, $I_c$, and the circumcircle of triangle $ABC$ simultaneously serves as the Euler circle of triangle $I_a$, $I_b$, $I_c$. New formulas for the sides of triangle $I_a$, $I_b$, $I_c$ are proposed, as well as positional problems for constructing triangle $ABC$ given specific points. The connection between the elements of these triangles and the Euler circle is revealed for the first time, and previously unpublished problems are introduced for solution.*



*Keywords: excircle, Euler circle, nine-point circle, orthocentric triangle, positional problems, semicircle on a triangle's side as a diameter.*