

The issue of journal contains:

Proceedings of the VIII Correspondence  
International Scientific and Practical Conference

**GLOBALIZATION OF SCIENTIFIC KNOWLEDGE:  
INTERNATIONAL COOPERATION AND  
INTEGRATION OF SCIENCES**

held on November 29<sup>th</sup>, 2024 by

NGO European Scientific Platform (Vinnytsia, Ukraine)  
LLC International Centre Corporative Management (Vienna, Austria)

**№46**  
NOVEMBER, 2024

ISSN 2710-3056



INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL

# GRAIL OF SCIENCE

№ **46** (November, 2024)

with the proceedings of the:  
VIII Correspondence International  
Scientific and Practical Conference

**GLOBALIZATION OF SCIENTIFIC  
KNOWLEDGE: INTERNATIONAL  
COOPERATION AND INTEGRATION  
OF SCIENCES**

held on November 29<sup>th</sup>, 2024 by

NGO European Scientific Platform  
(Vinnytsia, Ukraine)  
LLC International Centre Corporative  
Management (Vienna, Austria)

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

# ГРААЛЬ НАУКИ

№ **46** (листопад, 2024)

за матеріалами:  
VIII Міжнародної науково-  
практичної конференції

**ГЛОБАЛІЗАЦІЯ НАУКОВОГО  
ЗНАННЯ: МІЖНАРОДНЕ  
СПІВРОБІТНИЦТВО ТА  
ІНТЕГРАЦІЯ НАУК**

що проводилася 29.11.2024

ГО «Європейська наукова  
платформа» (Вінниця, Україна)  
ТОВ «International Centre Corporative  
Management» (Відень, Австрія)



*Видання розраховане на науковців, викладачів, аспірантів, студентів, усіх, хто прагне отримати ґрунтовні знання теоретичного і прикладного характеру.*

**Рекомендовано до видання Вченою Радою Наукової установи «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці». Протокол № 64 від 28.11.2024.**

**Головний редактор:** Танасійчук Альона Миколаївна, д-р. екон. наук, доцент (Україна)  
**Заступник головного редактора:** Ємельянов Олександр Юрійович, д-р. екон. наук, професор (Україна)  
**Голова оргкомітету конференції:** Голденблат Марія (Україна)  
**Заступник голови оргкомітету конференції:** Рейчел Апаро (Австрійська Республіка)  
**Відповідальний секретар:** Рабей Настасія Романівна (Україна)

**ЧЛЕНИ РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ:**

**Квасницька Раїса Степанівна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Jakhongir Shaturaev** - канд. екон. наук, доцент (Республіка Узбекистан); **Бойко Світлана Василівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Заднепровська Ганна Ігорівна** - канд. екон. наук (Україна); **Занора Володимир Олександрович** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Маркович Ірина Богданівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Яковенко Роман Валерійович** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Поливана Людмила Анатоліївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Гевчук Анна Вікторівна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Маслій Олександра Анатоліївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Євтушенко Наталія Миколаївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Москвічова Олена Сергіївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Ясишена Валентина Валеріївна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Михайлишин Лілія Іванівна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Гавриленко Наталія Вікторівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Гіулі Гігуашвілі** - д-р. екон. наук, професор (Грузія).

**НАУКОВІ КОНСУЛЬТАНТИ:**

**Онкієнко Сергій Володимирович** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Marko Timchev** - д-р. екон. наук, доцент (Республіка Болгарія); **Khatuna Tabagari** - д-р. екон. наук, професор (Сакартвело); **Грень Лариса Миколаївна** - д-р. наук з держ. управління, професор (Україна); **Михаліцька Наталія Ярославівна** - канд. наук з держ. управління, доцент (Україна); **Ткаченко Павло Ігорович** - аспірант (Україна); **Купріянова Дарина Сергіївна** - практикуючий юрист (Польща); **Губаль Галина Миколаївна** - канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна); **Козуб Галина Олександрівна** - канд. техн. наук, доцент (Україна); **Козьма Антон Антонович** - канд. хім. наук (Україна); **Морозова Тетяна Василівна** - канд. біол. наук, доцент (Україна); **Купріянова Лариса Сергіївна** - канд. мед. наук, доцент (Україна); **Лисенко Дмитро Андрійович** - канд. мед. наук, доцент (Україна); **Цубанова Наталія Анатоліївна** - д-р. фарм. наук., професор (Україна); **Олійник Світлана Валентинівна** - канд. фарм. наук, доцент (Україна); **Полежаєв Юрій Григорович** - канд. наук із соц. ком., доцент (Україна); **Mikhabbat Khakimova** - д-р. пед. наук, професор (Республіка Узбекистан); **Куліченко Алла Костянтинівна** - д-р. пед. наук, доцент (Україна); **Фурман Тарас Юрійович** - канд. пед. наук, доцент (Україна); **Бажан Станіслав Миколайович** - д-р. філософії (Україна); **Ямполь Юрій Віталійович** - аспірант (Україна); **Антипова Жанна Ігорівна** - старший викладач (Україна); **Яцик Мар'яна Романівна** - канд. пед. наук, доцент (Україна); **Корбозерова Ніна Миколаївна** - д-р. філол. наук, професор (Україна); **Ковальська Наталя Аркадіївна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Присяжнюк Оксана Ярославівна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Мелех Галина Богданівна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Корнус Анатолій Олександрович** - канд. геогр. наук, доцент (Україна); **Фомін Андрій Володимирович** - канд. іст. наук, доцент (Україна); **Гірна Наталія Мирославівна** - канд. іст. наук, доцент (Україна); **Устінова Ірина Ігорівна** - д-р. арх., професор (Україна); **Катерина Діденко** - канд. арх. (Україна); **Воскобойнікова Юлія Василівна** - д-р. мист. (Україна); **Крипчук Микола Володимирович** - канд. мист., доцент (Україна); **Лугова Тетяна Анатоліївна** - канд. мист., доцент (Україна)

**Верстальник:** Білоус Тетяна (Україна). **Дизайнер:** Казьміна Надія (Україна). **Коректор:** Дудник Григорій (Україна).

«Грааль науки» є офіційно зареєстрованим мультидисциплінарним науковим виданням з міжнародною сферою поширення, що підтримує політику відкритого доступу. **Ідентифікатор медіа R30-02704** (рішення № 430 від 22.02.2024 Національної Ради України з питань телебачення і радіомовлення).

**Наказом МОН України № 582 від 24.04.2024 виданню «Грааль науки» присвоєно Категорію Б фахових видань України з питань економіки (051 «Економіка»).**

**«Грааль науки» індексується в міжнародних реферативних та наукометричних базах даних:**

Index Copernicus Journals Master List; «Наукова періодика України» (Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського НАН України); Національний репозитарій академічних текстів; Google Scholar; WorldCat; Open Ukrainian Citation Index; CrossRef; Mendeley; Scite; Semantic Scholar; Scilit; OpenAIRE, PubPeer.

Конференція зареєстрована УкрІНТЕІ (Посвідчення № 371 від 12.06.2024) та сертифікована Euro Science Certification Group (Сертифікат № 22689 від 21.10.2024).

*За точність викладених фактів та коректність цитування відповідальність несе автор.*



DOI 10.36074/grail-of-science.29.11.2024.095

## ТРИКУТНИК ТРЬОХ ЦЕНТРІВ ЗОВНІВПИСАНИХ КІЛ

Гетманенко Людмила Миколаївна

старша викладачка кафедри природничо-математичної освіти і технологій  
Інститут післядипломної освіти

Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна

**Анотація.** У статті досліджено властивості трикутника, утвореного центрами трьох зовнівписаних кіл  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ , побудованих для довільного трикутника  $ABC$ . Розглянуто геометричні залежності між трикутником  $ABC$  і трикутником  $I_a, I_b, I_c$ , а також властивості, що випливають із цієї побудови. Показано, що трикутник  $ABC$  є ортоцентричним до трикутника  $I_a, I_b, I_c$ , а описане навколо трикутника  $ABC$  коло є одночасно колом Ейлера для трикутника  $I_a, I_b, I_c$ . Запропоновано нові формули для сторін трикутника  $I_a, I_b, I_c$ , а також позиційні задачі на побудову трикутника  $ABC$  за заданими точками. Уперше висвітлено зв'язок між елементами цих трикутників і колом Ейлера та запропоновані до розв'язку задачі, які раніше не були опубліковані.

**Ключові слова:** зовнівписане коло, коло Ейлера, коло дев'яти точок, ортоцентричний трикутник, позиційні задачі, півколо на стороні трикутника як на діаметрі.

The circumcircle of triangle  $ABC$ , with center  $O$  and radius  $R$ , is denoted as  $\gamma_1 = (O; OA = R)$ .

In addition to the circle  $\gamma_1$ , let us consider the excircles  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$  of triangle  $ABC$ , which are tangent to one of the sides of the triangle  $a, b$ , or  $c$  ( $BC = a, AC = b, AB = c$ ) and to the extensions of the other two sides (Fig. 1).

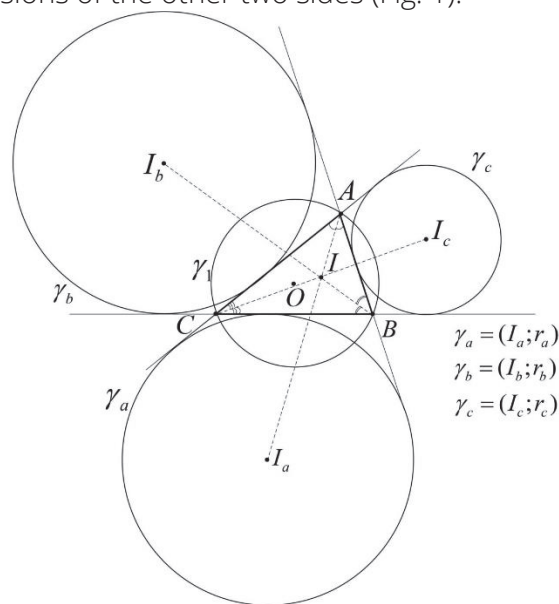


Fig.1



The centers  $I_a$ ,  $I_b$  and  $I_c$  of the circles  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_c$ , respectively, lie on the angle bisectors of the angles  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$  and  $\angle ACB$ .

Connecting the points  $I_a$ ,  $I_b$  and  $I_c$ , we obtain the triangle  $I_aI_bI_c$ . Let us explore some properties of the triangle  $I_aI_bI_c$ , derived formulas, and new positional problems related to the construction of triangle  $ABC$  from three given points. These problems are published here for the first time.

**Property 1.** Since the center of an excircle is the intersection point of the internal angle bisector and two external angle bisectors, the angle  $\angle I_cAI_a = 90^\circ$  (as the angle between the bisectors of adjacent angles) (Fig. 2).

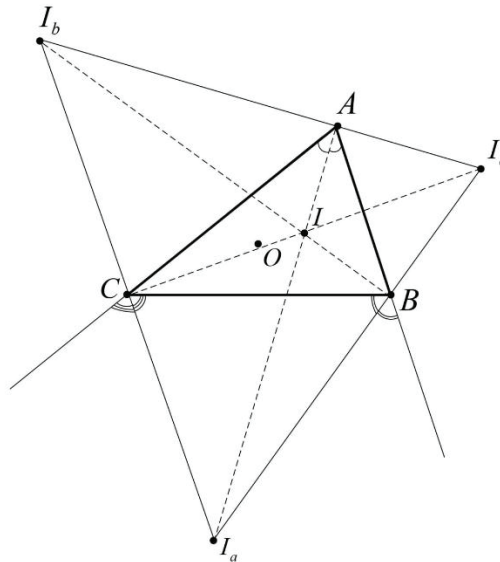


Fig. 2

Similarly, the angles  $\angle I_aBI_b$  and  $\angle I_bCI_c$  are also  $90^\circ$ . This implies that the vertices of triangle  $ABC$  lie on the sides  $I_bI_c$ ,  $I_cI_a$  and  $I_bI_a$ , serving as the feet of the altitudes of triangle  $I_aI_bI_c$ . Thus,  $I_aA$ ,  $I_bB$  and  $I_cC$  are the altitudes of triangle  $I_aI_bI_c$ .

Triangle  $ABC$  is therefore referred to as the orthocentric triangle of triangle  $I_aI_bI_c$ . The circumcircle  $\gamma_1$ , circumscribing triangle  $ABC$ , is the Euler circle (or the nine-point circle) of triangle  $I_aI_bI_c$ . The midpoints of the sides of triangle  $I_aI_bI_c$  lie on the Euler circle  $\gamma_1$  (Fig. 3).

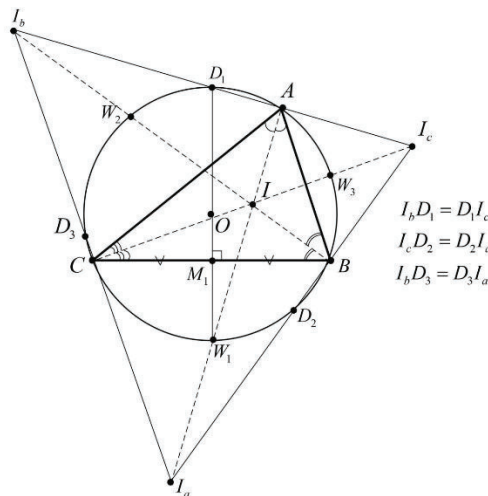


Fig. 3

**Property 2.** The angles of triangle  $I_a I_b I_c$  are equal to  $90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{\angle B}{2}$  and  $90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ , where  $\angle A = \angle BAC$ ,  $\angle B = \angle ABC$  and  $\angle C = \angle ACB$ . This result follows from triangle  $CI_a B$  (Fig. 2).

Specifically, the angles  $\angle BCI_a = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$  and  $\angle CBI_a = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$ , since  $CI_a$  and  $BI_a$  are the external bisectors of the angles at vertices  $C$  and  $B$  of triangle  $ABC$ .

**Property 3.** Since the circumcircle  $\gamma_1$  with radius  $R$ , circumscribing triangle  $ABC$ , is the Euler circle of triangle  $I_a I_b I_c$ , the radius of the circumcircle of triangle  $I_a I_b I_c$ , equals  $2R$ , i.e., it is twice as large [2].

Using the sine rule as a corollary, the sides of triangle  $I_a I_b I_c$ : can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} I_b I_c &= 2 \cdot 2R \sin\left(90^\circ - \frac{\angle A}{2}\right) = 4R \cos \frac{\angle A}{2}; \\ I_a I_c &= 4R \sin\left(90^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) = 4R \cos \frac{\angle B}{2}; \\ I_a I_b &= 4R \cos \frac{\angle C}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Let us propose an alternative way to express the sides of triangle  $I_a I_b I_c$ . Refer to Figure 4 for this approach.

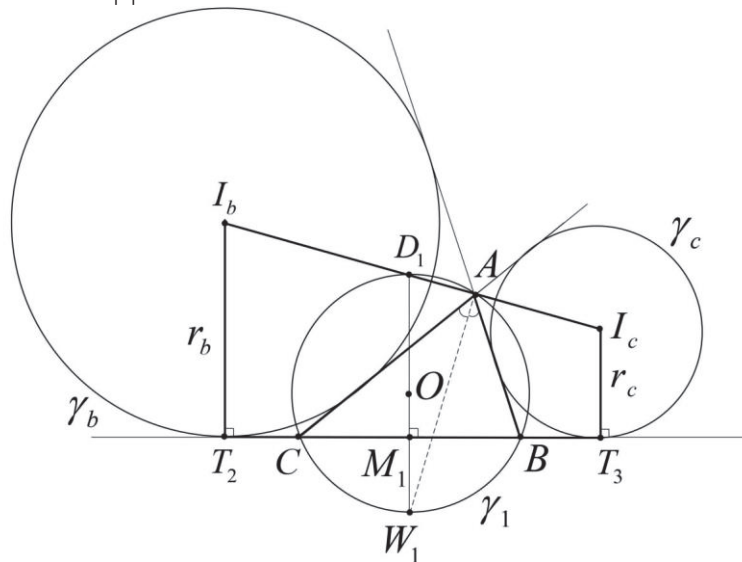


Fig. 4

Points  $T_2$  and  $T_3$  are the points of tangency of the excircles  $\gamma_2$  and  $\gamma_3$  with the extension of side  $BC = a$ .

From the symmetry of the construction,  $CM_1 = M_1 B$ , and thus  $T_2 M_1 = M_1 T_3$ . The distances from the centers of the excircles to the tangency points are  $I_c T_3 = r_c$ ,  $I_b T_2 = r_b$ .

This configuration forms a right trapezoid  $I_b T_2 T_3 I_c$  with bases equal to  $r_b$  and  $r_c$ , and a midline  $M_1 D_1$ , which equals  $\frac{r_b + r_c}{2}$  ( $I_b D_1 = D_1 I_c$ ).

$$M_1 D_1 = \frac{r_b + r_c}{2} \tag{2}$$

From  $\angle I_c C I_b = 90^\circ$ , and the fact that  $D_1$  is the midpoint of side  $I_b I_c$  (Fig. 5), it follows that  $I_b D_1 = CD_1 = D_1 I_c$  (as the median to the hypotenuse). Similarly,  $\angle I_b B I_c = 90^\circ$  (see Property 1), so  $D_1 B = I_c D_1 = I_b D_1$ .

$$I_b D_1 = I_c D_1 = CD_1 = BD_1 \tag{3}$$

From triangle  $CD_1M_1$ , we can express  $CD_1$  using Equation (2):

$$CD_1 = \frac{D_1M_1}{\cos \frac{\angle A}{2}} = \frac{r_b + r_c}{2 \cos \frac{\angle A}{2}}$$

Hence,  $I_bI_c = 2CD_1$  (using Equation (3)):

$$I_bI_c = \frac{r_b + r_c}{\cos \frac{\angle A}{2}} \tag{4}$$

Similarly,  $I_aI_b = \frac{r_a + r_b}{\cos \frac{\angle C}{2}}$ ,  $I_aI_c = \frac{r_a + r_c}{\cos \frac{\angle B}{2}}$ .

Thus, we have derived two distinct formulas, Equations (1) and (4), for the sides of triangle  $I_aI_bI_c$ .

In reference [4], the following formula is proposed:

$$I_bI_c^2 = 4R(r_b + r_c) \tag{5}$$

By applying Equations (1) and (4), we obtain:

$$I_bI_c^2 = I_bI_c \cdot I_bI_c = 4R \cos \frac{\angle A}{2} \cdot \frac{r_b + r_c}{\cos \frac{\angle A}{2}} = 4R(r_b + r_c).$$

The following formula is suggested for independent proof:

$$S_{ABC} = r_b r_c \sqrt{\frac{I_bI_c^2}{(r_b + r_c)^2} - 1}$$

Positional problems for constructing triangle  $ABC$  based on three given points were studied and compiled by the Ukrainian scholar, educator, and Honored Teacher of Ukraine I.A. Kushnir [3].

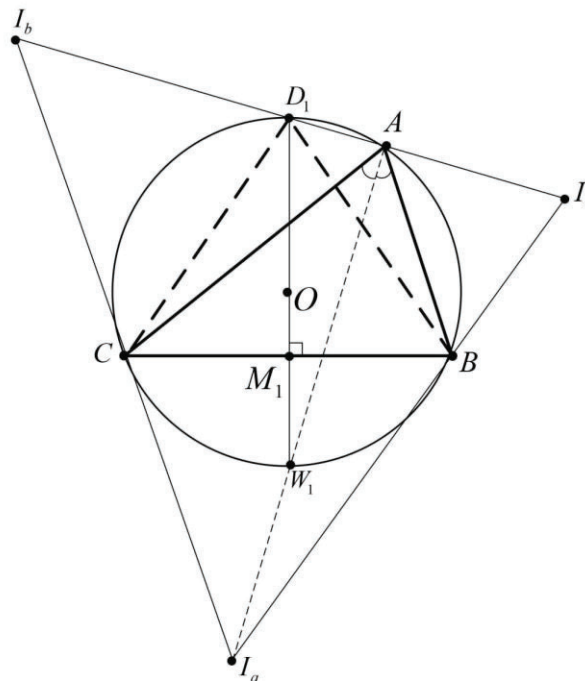


Fig. 5

I propose new positional problems that have not been previously published (see Fig. 5):

- 1)  $I_b, I_c, M_1$ ;
- 2)  $I_b, I_c, I$ ;

- 3)  $I_b, I_c, O$ ;
- 4)  $I_b, I_c, W_1$ ;
- 5)  $I_b, I_c, (h_a)_X$ ;
- 6)  $I_b, I_c, L_1$ ,

where  $CM_1 = M_1B$ ;

$AI_a \cap BI_b \cap CI_c = I$  (the incenter of triangle  $ABC$ );

$O$  is the center of the circumcircle of triangle  $ABC$ ;

$AI_a \cap \gamma_1 = W_1, AI_a \cap BC = L_1$ ;

$(h_a)_X$  is the line perpendicular to side  $BC$  of triangle  $ABC$  and passing through vertex  $A$ .

More similar construction problems can be found in article [1].

I propose considering the construction of triangle  $ABC$  based on the points  $I_a, I_b, I_c$ .

1. Connect points  $I_b$  and  $I_c$  to form side  $I_bI_c$  of triangle  $I_aI_bI_c$ . From previous results (Equation 3),  $I_bD_1 = D_1I_c$ . This gives point  $D_1$ , the midpoint of  $I_bI_c$  (Fig. 6).

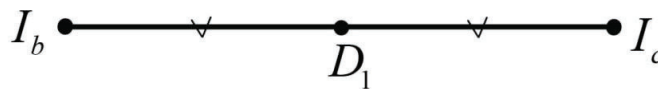


Fig. 6

2. The segment  $M_1D_1$  is perpendicular to side  $BC$  of triangle  $ABC$ . By connecting the given points  $I_b, I_c$ , and  $M_1$ , we determine the angles  $\angle I_bM_1D_1$  and  $\angle I_cM_1D_1$ . Accordingly:

$$\angle CM_1I_b = 90^\circ - \angle I_bM_1D_1,$$

$$\angle BM_1I_c = 90^\circ - \angle I_cM_1D_1.$$

Segments  $I_bM_1$  and  $I_cM_1$  are the hypotenuses of triangles  $I_bM_1T_2$  and  $I_cM_1T_3$ , respectively (Figure 4).

Thus, the right triangles  $I_bM_1T_2$  and  $I_cM_1T_3$  can be constructed using their hypotenuses and one acute angle. This results in the line  $T_2T_3$ , where  $M_1 \in T_2T_3$ . Consequently,  $BC \subset T_2T_3$ .

3. We apply Property 1 ( $I_cC$  and  $I_bB$  are the heights of the triangle  $I_aI_bI_c$ ), and draw the semicircle  $\varphi$  with center  $D_1$  on the diameter  $I_bI_c$  (Fig. 7). The semicircle  $\varphi$  will intersect the line  $T_2T_3$  at points  $B$  and  $C$  of triangle  $ABC$ .

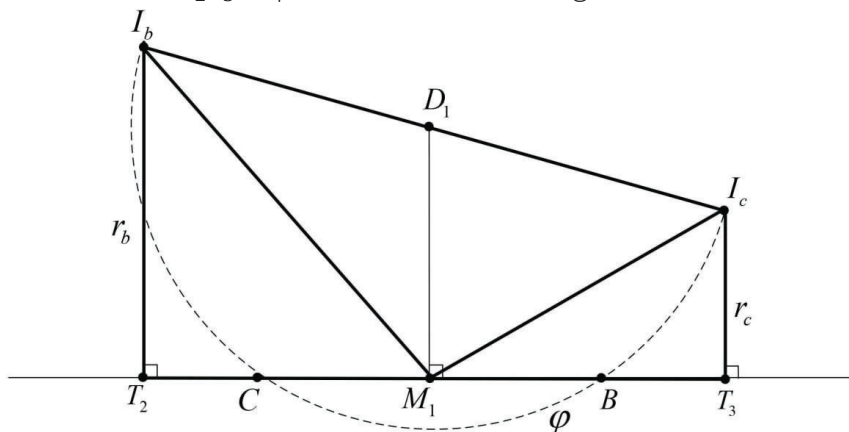


Fig. 7



4. In Fig. 7, triangle  $I_bT_2C$  is formed with angle  $\angle I_bCT_2$ . It is sufficient to extend the ray  $CA$  at angle  $\angle I_bCT_2$  from  $CI_b$ .

$CA \cap I_bI_c = A$ , since  $CI_b$  is the bisector of the exterior angle  $\angle BCA$  of triangle  $ABC$ . The triangle  $ABC$  is constructed.

I suggest solving the following problems independently and deriving great satisfaction from it.

#### References:

- [1] Hetmanenko, L. (2024). The role of interactive learning in mathematics education: fostering student engagement and interest. *Multidisciplinary Science Journal*, 6, 2024ss0733. <https://doi.org/10.31893/multiscience.2024ss0733>
- [2] Кушнір І.А. (1991). Трикутник і тетраєдр у задачах. Київ: Радянська школа
- [3] Кушнір І.А. (2019). Позиционные задачи. Список Верника. Список Кушніра. Днепр: Середняк Т.К.
- [4] Яремчук Ф.П. (ред.) (1966). Збірник геометричних задач. Київ: Радянська школа.

## TRIANGLE OF THREE CENTERS OF EXSCRIBED CIRCLES

Liudmyla Hetmanenko

Senior Lecturer,

Department of the Natural Sciences and Mathematics Education and Technologies

Institute of In-Service Teacher's Training

Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine

**Summary** The paper investigates the properties of the triangle formed by the centers of the three excircles,  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ , constructed for an arbitrary triangle  $ABC$ . Geometric relationships between the triangle  $ABC$  and the triangle  $I_a, I_b, I_c$  are examined, along with the properties arising from this construction. It is shown that the triangle  $ABC$  is orthocentric to the triangle  $I_a, I_b, I_c$ , and the circumcircle of triangle  $ABC$  simultaneously serves as the Euler circle of triangle  $I_a, I_b, I_c$ . New formulas for the sides of triangle  $I_a, I_b, I_c$  are proposed, as well as positional problems for constructing triangle  $ABC$  given specific points. The connection between the elements of these triangles and the Euler circle is revealed for the first time, and previously unpublished problems are introduced for solution.

**Keywords:** excircle, Euler circle, nine-point circle, orthocentric triangle, positional problems, semicircle on a triangle's side as a diameter.