

УДК 378.147:517

## КОМПЕТЕНЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У СТРУКТУРІ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ: ЗАЛЕЖНОСТІ, ВЗАЄМОДІЇ ТА ПІДХОДИ ДО ФОРМУВАННЯ

**Марія АСТАФ'ЄВА**

*Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна*

[m.astafieva@kubq.edu.ua](mailto:m.astafieva@kubq.edu.ua)

<https://orcid.org/0000-0002-2198-4614>

**Катерина ГРУЗДЬОВА**

*Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна*

[kihruzdova.fitm23m@kubq.edu.ua](mailto:kihruzdova.fitm23m@kubq.edu.ua)

<https://orcid.org/0000-0002-2747-3364>

## MATHEMATICAL MODELLING COMPETENCY IN MATHEMATICAL COMPETENCE STRUCTURE: DEPENDENCIES, INTERACTIONS AND APPROACHES TO DEVELOPMENT

**Mariia ASTAFIEVA**

*Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine*

[m.astafieva@kubq.edu.ua](mailto:m.astafieva@kubq.edu.ua)

<https://orcid.org/0000-0002-2198-4614>

**Kateryna HRUZDOVA**

*Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine*

[kihruzdova.fitm23m@kubq.edu.ua](mailto:kihruzdova.fitm23m@kubq.edu.ua)

<https://orcid.org/0000-0002-2747-3364>

### АНОТАЦІЯ

**Формулювання проблеми.** Компетенція математичного моделювання (ММ) є важливим предметом як теоретичних дискусій в контексті навчання і викладання ММ і математики загалом, так і емпіричних досліджень. Водночас залишається недостатньо дослідженим питання інтеграції компетенції ММ у структуру математичної компетентності, а також її взаємодії з іншими ключовими компетенціями. Дедалі більше досліджень підтверджують, що ММ є не лише однією з ключових компетенцій в структурі математичної грамотності, але й ефективним педагогічним інструментом для формування математичної компетентності здобувачів освіти. Особливого значення набуває розробка підходів, які забезпечують формування цієї компетенції, зокрема, через дослідницько-орієнтовані педагогічні стратегії, що сприяє розвитку здатності до ММ у контексті реальних задач.

**Матеріали і методи.** Для вирішення поставленої проблеми було застосовано теоретичні та емпіричні методи, зокрема, аналіз дослідницьких праць українських і зарубіжних учених, узагальнення та систематизація практичного досвіду, педагогічний експеримент, а також математичні методи обробки даних педагогічного експерименту.

**Результати.** На основі аналізу результатів досліджень з питань перспектив ММ та практик використання його як педагогічної технології з'ясовано місце і роль ММ в структурі математичної компетентності. Також аналізуються типові труднощі здобувачів освіти, що виникають у них при розв'язуванні задач ММ, пропонуються шляхи пом'якшення цих труднощів, аргументується їх доцільність.

**Висновки.** Простежено асиметричний характер зв'язку між компетенцією ММ й іншими компетенціями математичної компетентності. Запропоновано та апробовано деякі підходи до формування компетенції ММ.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** математичне моделювання; математична компетентність; компетенція математичного моделювання; Inquiry-Based Learning (IBL); методи теорії нечітких множин.

### ABSTRACT

**Formulation of the problem.** Mathematical modelling competency is an essential subject of theoretical discussions in the context of learning and teaching mathematical modelling and mathematics in general, and empirical research. Numerous studies confirm that mathematical modelling is not only a key competency in mathematical literacy but also an effective pedagogical tool for developing students' mathematical competence. It is essential to develop strategies that promote the formation of this competency, primarily through research-oriented pedagogical methods, which aid in developing the ability to use mathematical modelling in real-world problem contexts.

**Materials and methods.** To solve the problem, theoretical and empirical methods were applied, in particular, the analysis of research works of Ukrainian and international scientists, generalisation and systematisation of practical experience, pedagogical experiment, as well as mathematical methods of data processing of pedagogical experiment.

**Results.** Based on the analysis of research results on the prospects of mathematical modelling and practices of its use as a pedagogical technology, the place and role of mathematical modelling in the structure of mathematical competence are clarified. Typical challenges for students that arise in solving mathematical modelling problems are also analysed, ways to mitigate these issues are proposed, and their feasibility is also argued.

**Conclusions.** The asymmetrical nature of the relationship between the mathematical modelling competency and other parts of mathematical competence is traced. Some approaches to the formation of the competence of mathematical modeling are proposed and tested.

**KEYWORDS:** mathematical modelling; mathematical competence; mathematical modelling competency; Inquiry-Based Learning (IBL); methods of fuzzy set theory.

## ВСТУП

**Постановка проблеми.** Математичне моделювання (ММ) полягає в тому, щоб піддати нематематичні проблеми математичній обробці і подальшому аналізу з метою їх вирішення. Таким чином, ММ використовується для розв'язування найрізноманітніших важливих і складних задач в різних галузях виробництва й науки, які не можуть бути розв'язані без залучення математики. Тому все актуальнішою проблемою математичної освіти постає питання як формувати здатність здобувачів освіти розв'язувати задачі ММ, які методи навчання ММ та як оцінити їх ефективність.

**Аналіз актуальних досліджень.** В математичній освіті ММ виступає не лише об'єктом, а й інструментом навчання, який дозволяє реалізовувати прикладну спрямованість математики та сприяє формуванню математичної компетентності загалом. Концептуалізація поняття компетентності ММ та її історичний розвиток розглядалися в низці досліджень (Blomhøj, Jensen, 2003; Blum, Niss, 2024). ММ включає кілька послідовних процесів, об'єднаних в так званий цикл моделювання. Попри певні відмінності у трактуванні циклу ММ, які зустрічаємо в літературі (Blum, Leiss, 2007; Blomhøj, Jensen, 2003; Blomhøj, Jensen, 2007 та ін.), усі вони підкреслюють наявність трьох ключових елементів: 1) математизація, тобто, переклад процесів, ситуацій, відношень і запитань із нематематичного контексту, т. зв. «реального світу» в математичний контекст; 2) розв'язання сформульованої математичної задачі і отримання відповідних математичних висновків; 3) дематематизація, тобто інтерпретація цих математичних висновків в контексті і термінах реальної нематематичної задачі. Таким чином, ММ можна трактувати як трійку (S, M, R) що складається з деякої реальної проблемної ситуації S, деякого набору M математичних сутностей і деякого відношення R, за допомогою якого об'єкти і відношення S пов'язані з об'єктами та відношеннями M (Blum, Niss, 1991). Тоді ММ – це весь процес, що веде від реальної проблемної ситуації до математичної моделі. Незважаючи на те, що це визначення здається легким для розуміння, на практиці діяльність з ММ є досить складною, і в спільноті математичної освіти існують певні розбіжності щодо того, що саме вважається моделлю/моделюванням, які цілі ММ і як цього можна навчати (Kaiser, Sriraman, 2006; Hernandez-Martinez et al., 2021; Rogovchenko et al., 2021).

За останні роки зростає впевненість дослідників і вчителів / викладачів практиків, що навчання ММ важливе і корисне не лише тому, що закладає підвалини для майбутньої реалізації здобувачами освіти різних перспектив самого ММ, визначених, зокрема Кайзером і Шріраманом (Kaiser, Sriraman, 2006), а й слугує інструментом формування концептуального розуміння математики, розвитку математичного мислення, математичної компетентності загалом. Зокрема, компетенція ММ визнана однією із восьми складових математичної компетентності (Niss, Højgaard, 2019).

**Метою статті** є пошук відповіді на два дослідницькі запитання: (1) яке місце ММ в структурі математичної компетентності? (2) які підходи доцільні у навчанні ММ і як перевірити їх ефективність?

## МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети дослідження були використані теоретичні методи (логіко-системний, порівняльний аналіз дослідницьких праць українських і зарубіжних науковців, узагальнення та систематизація науково-теоретичних і практичних даних, власного практичного досвіду), педагогічний експеримент, а також нечітке математичне моделювання для аналізу даних педагогічного експерименту і оцінки ефективності використовуваних в ході експерименту методів і підходів.

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

**Місце математичного моделювання у структурі математичної компетентності.** Компетентнісний підхід у навчанні математики на всіх рівнях освіти передбачає формування і розвиток математичної компетентності. Попри деякі відмінності численних тлумачень терміну «математична компетентність», усі вони сходяться на тому, що це здатність ефективно застосовувати математику в різних контекстах. Зокрема, Державний стандарт базової середньої освіти трактує математичну компетентність як «здатність розвивати і застосовувати математичні знання та методи для розв'язання широкого спектра проблем у повсякденному житті; моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичного апарату» (Державний стандарт, 2020), а навчальні програми шкільного курсу математики визначають формування навичок застосування математики однією із головних цілей навчання. Наведено найбільш цитоване в науковій літературі означення математичної компетентності, сформульоване Могенсом Ніссом: «Математична компетентність означає розуміння, оцінювання, виконання та використання математики в різних математичних та позаматематичних контекстах і ситуаціях, у яких математика відіграє чи може відігравати певну роль» (Niss, 2003). Згідно з (Niss, Højgaard, 2019) структура математичної компетентності (mathematical competence) включає 8 основних складових або компетенцій (competencies), де ММ – одна із них. Під нею автори розуміють «уміння використовувати математику для опису реальних ситуацій, а саме створювати математичні моделі в заданому контексті і використовувати ці моделі для прогнозів та аналізу, а також аналізувати та оцінювати існуючі моделі» (Niss, Højgaard, 2019). Складові математичної компетентності взаємно перекриваються, що ілюструє їх взаємозв'язок і взаємозалежність. Щоб проаналізувати, як взаємодіє ММ з іншими сімома складовими математичної компетентності, ми визначили, на основі (Kaiser, 2007), п'ять ключових компетенцій, які описують послідовні етапи спрощеного циклу ММ, оптимального, на наш погляд, у навчальних цілях:

- 1) формулювання і спрощення реальної задачі / проблеми;
- 2) переклад реальної задачі на мову математики (математизація) і побудова математичної моделі;
- 3) аналіз і розв'язання математичної моделі;
- 4) інтерпретація та оцінка результатів;
- 5) презентація та обґрунтування результатів.

Ми проаналізували, як компетенція ММ спирається на інші сім компетенцій математичної компетентності. Результат такого аналізу наведено в Таблиці 1. Як бачимо, компетенція ММ спирається на всі інші компетенції, хоча і не обов'язково одночасно, і не в усіх їхніх аспектах. Кожна компетенція містить багато аспектів, які не проявляються в моделюванні. Тому компетенція ММ не вичерпує жодну із них. Разом із тим, спираючись на всі інші компетенції, вона не є їх комбінацією і, отже, зайвою. Вона не може бути «розосереджена» в інших компетенціях хоча б тому, що включає в себе й позаматематичні сутності. Очевидно також, що інші сім складових математичної компетентності не потребують в явному вигляді навичок ММ. Проте компетенція ММ, будучи, у певному розумінні, інтегральною компетенцією, посилює кожную із решти математичних компетенцій, оскільки є «полігоном» для їх тренування як поодиночки, так і в сукупності.

**Табл. 1.** Залежність компетенції математичного моделювання (ММ) від інших математичних компетенцій

Етапи ММ Компетенції	Формулювання і спрощення реальної задачі	Математизація, побудова матем. моделі (Мм)	Розв'язання математичної моделі (Мм)	Інтерпретація та оцінка результатів	Презентація та обґрунтування результатів
Математичне мислення	Аналіз ситуації, виявлення основних елементів та відно- шень, усвідомлення вимоги задачі / суті проблеми	Перехід від реаль- них об'єктів до математичних, виявлення залеж- ностей між змін- ними, осмислення абстракцій, необ- хідних для моделі	Логічна послідов- ність кроків для розв'язання Мм	Інтерпретація ма- тематичного роз- в'язку в термінах реальної задачі, аналіз і оцінка його адекватності та відповідності реальній ситуації	Структурування презентації, вио- кремлення ключо- вих моментів для пояснення суті моделі та отрима- них результатів
Розв'язування математичних задач	-	Вибір чи побудова Мм, яка коректно і оптимально відо- бражає реальні залежності	Розробка й реалі- зація стратегії розв'язку Мм; виконання проце- дур, необхідних для розв'язання	Оцінка коректно- сті розв'язку Мм, розгляд окремих випадків; додатко- ві обчислення або модифікації	-
Математичні міркування, аргументація	Вибір суттєвих параметрів задачі, визначення мож- ливих припущень, логічна побудова структури концеп- туальної моделі	Виявлення мате- матичних залеж- ностей, які відпо- відають реальним явищам, вибір математичних інструментів для їх відображення	Оцінка переваг та недоліків можливих підходів і методів розв'язання, обґрунтування обраного в даній ситуації методу	Оцінка результатів щодо їх значущо- сті в контексті реальної задачі та відповідності її вимогам, можли- ве коригування та оптимізація Мм	Обґрунтування вибору методів розв'язання, відповідності моделі реальній ситуації, форму- лювання перекон- ливих висновків
Представлення, інтерпретації	Вибір інструментів для опису задачі в математичних термінах	Представлення реальної ситуації через математичні об'єкти (графіки, таблиці, рівняння тощо)	Представлення розв'язку у зрозумілій формі (формули, графіки, діаграми, числові значення тощо)	Представлення результатів для полегшення їх інтерпретації в контексті реальної задачі / проблеми	Вибір найефектив- ніших способів подання результа- тів у максимально зрозумілій формі
Використання математичної символіки та формалізмів	-	Точний математич- ний запис моделі із правильним використанням символіки	Точний запис усіх етапів розв'язання з правильним використанням символіки	-	За потреби
Математична комунікація	Чітке словесне формулювання задачі, яке можна перевести в математичну форму	Обговорення по- будованої моделі, обґрунтування ви- бору математич- них методів і пе- ревірка на корект- ність припущень	Обговорення можливих методів розв'язання з метою отримання коректних і оптимальних, результатів	Критична оцінка результатів щодо їх доцільності та застосовності в реальній ситуації	Аналіз, наскільки точно і коректно представлені результати, чи всі важливі моменти відображені
Використання допоміжних засобів та інструментів	Пошук та аналіз інформації про проблему	Технологічна перевірка адекватності Мм або побудова складних структур	Використання технологій для розв'язання Мм	Обробка та аналіз даних з метою точної інтерпрета- ції або додатковий аналіз результатів	Створення презентаційних матеріалів

*Джерело: авторська розробка*

**Навчання математичного моделювання: деякі проблеми та підходи.** Аналіз результатів багатьох досліджень та власний досвід показують, що школярі і студенти відчувають значні труднощі на різних етапах математичного моделювання (Ikeda, Stephens, 1998; Galbraith, Stillman, 2006; Blum, 2011). Але найважче їм дається процес математизації та етап, що йому передує, коли потрібно реальну задачу «ідеалізувати», виявивши в умові усе суттєве та відкинувши несуттєве, зробити необхідні припущення, тобто правильно зрозуміти реальну проблему в контексті мети моделювання (Galbraith, Stillman, 2006; Stillman, Brown, Galbraith, 2010; Schaap, Vos, Goedhart, 2011). Проілюструємо зазначені труднощі прикладами задач з нашої практики.

**Задача 1** (пропонувалася учням 7 класу). На гору Копілаш (що в українських Карпатах), висота якої 1155 м над рівнем моря, турист піднімався стежкою завдовжки 4 км із середньою швидкістю 3 км за год, а спускався удвічі швидше. Яка середня швидкість туриста на всьому шляху? Відповідь обґрунтувати.

Ключові помилки на етапі, що передує математизації були такі: а) припущення, що зворотній шлях теж становить 4 км, ніяк не обґрунтовувався, тобто частина учнів прийняли це припущення «за замовчуванням», вважаючи, очевидно, що така інформація є в умові задачі, що насправді не так; жоден учень не пояснив, що, якщо не припустити, що турист спускався тією ж стежкою, якою піднімався, то задачу не вдається розв'язати; б) частина учнів висоту гори (1155 м) прийняла за суттєву інформацію в задачі, більше того – вважала, що це довжина маршруту від підніжжя гори до вершини, бо час піднімання на вершину обчислювали так:  $1155 : 3$ .

**Задача 2** (пропонувалася студентам першого року навчання при вивченні похідної). Уздовж лісу простягається прямолінійна дорога. Уявіть, що ви знаходитесь в лісі, на відстані 5 км від дороги і 13 км від дому, що стоїть при дорозі. Лісом ви можете йти зі швидкістю 3 км/год., а дорогою – 5 км/год. Ви йтимете по прямій до дороги, а далі дорогою до дому. Скільки щонайменше часу вам потрібно, щоб дістатися дому?

$S_2 = \sqrt{5^2 - 5^2} = \sqrt{769 - 25} = 42$   
 час до гори:  
 $t_1 = \frac{S_1}{V_1} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1 \text{ год } 40 \text{ хв}$   
 $t_2 = \frac{S_2}{V_2} = \frac{42}{5} = 2\frac{2}{5} = 2 \text{ год } 24 \text{ хв}$   
 $t = t_1 + t_2 = 4 \text{ год } 4 \text{ хв}$   
 Якщо йти через ліс  $t = \frac{S}{V} = \frac{13}{3} = 4 \text{ год } 20 \text{ хв}$

Рис. 1. Помилкове розв'язання задачі студентом

Дехто зі студентів помилково вважав, що є лише два варіанти маршруту: а) по прямій – додому; б) по перпендикуляру – до дороги і далі дорогою – додому (див. розв'язання на Рис. 1).

Щоб зменшити та попередити труднощі, з якими стикаються здобувачі освіти під час ММ, вчителю / викладачу математики варто застосовувати такі стратегії: розвивати концептуальне розуміння математичних понять, фактів, методів, процедур; цілеспрямовано навчати етапів моделювання, використовуючи реальні приклади, досліджувати варіативність; створювати можливості для співпраці, підтримувати дискусії; надавати

необхідну індивідуальну підтримку, скеровуючи самостійну пошуково-дослідницьку роботу здобувачів; розвивати їх технологічні навички. Численні дослідження і власний досвід дозволяють стверджувати, що дослідницько орієнтоване навчання, зокрема, IBL, сприяє успішній реалізації зазначених стратегій (Bruder, Prescott, 2013; Rogovchenko et al., 2021; Astafieva et al., 2021; Астаф'єва, Груздьева, 2021). Таке навчання ідеально відповідає природі ММ, яке є процесом дослідження реальних проблем, формулювання запитань, аналізу даних і перевірки гіпотез. Процесові моделювання притаманні ті ж діяльності, що й IBL: формулювання запитання, дослідження, аналіз результатів та рефлексія. Крім того IBL сприяє розвитку таких якостей, важливих для ММ, як критичне мислення, творчість, комунікативність, самостійність і відповідальність, підвищує інтерес до навчання математики, стимулює внутрішню мотивацію.

Очевидно, що навчати ММ слід на задачах. Найновіші шкільні підручники з математики містять багато задач, спрямованих на формування навичок моделювання. Однак, це, в основному (за невеликим винятком), прикладні задачі. А це не те саме, що задачі ММ. Прикладні математичні задачі та задачі ММ мають певні схожості, оскільки вони пов'язані з реальними ситуаціями, де використовується математика з метою вирішення реальної проблеми. Однак їх відрізняє суттєва ознака. Прикладні математичні задачі, зазвичай, прямолінійні, з ідеалізованими умовами і для їх розв'язання досить застосувати стандартні математичні методи і готові моделі. Наприклад, розрахунок відсотків на кредит, вимірювання площ земельних ділянок певної форми, визначення середньої швидкості транспортного засобу. Задачі ж ММ включають побудову і дослідження моделі, що дає змогу робити прогнози, аналізувати ризики, оптимізувати процеси тощо. Тому у своїй роботі ми періодично практикуємо командне виконання проєктів, а прикладні задачі із підручників часто трансформуємо в задачі ММ. Приклади таких проєктів, виконаних у 2024 р. учнями 8-А класу Ліцею №129 м. Києва: 1) визначення за допомогою підручних засобів (з наявністю недоступних точок) довжини проєктованого надземного переходу через проспект біля своєї школи (виконувався під час вивчення подібності трикутників); 2) розрахунок площі даху своєї школи для встановлення сонячних панелей з метою покриття внутрішніх потреб в електроенергії (міждисциплінарний проєкт). Наведемо далі два варіанти трансформації задачі: «№793. Теплохід пройшов 16 км по озеру, а потім 18 км по річці, яка бере початок із цього озера, за 1 годину. Знайти швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії становить 4 км/год.» (Мерзляк, 2021).

**Варіант 1 (достатній рівень).** Теплохід плыв 1 годину, спочатку озером 16 км, а потім річкою, яка з нього витікає, ще 18 км. Швидкість течії річки 4 км/год. Ваше завдання: а) побудувати математичну модель для визначення швидкості руху теплохода озером; б) знайти швидкість руху теплохода в озері за даними умови задачі; в) проаналізувати, як змінюється час руху теплохода, якщо швидкість течії змінюється (зростає від 2 до 6 км/год); г) з'ясувати, як зміниться час руху теплохода назад (збільшиться, зменшиться, на скільки?).

**Варіант 2 (високий рівень).** Теплохід виконує навігаційні завдання в африканському озері Вікторія. Спочатку він пливе озером на схід 16 км, а потім рікою Білий Ніл на північ ще 18 км і витрачає на увесь маршрут одну годину. Швидкість течії ріки 4 км/год. Ваше завдання: а) побудувати математичну модель руху теплохода; б) користуючись побудованою моделлю знайти, з якою швидкістю теплохід плыв в озері; в) в ріці; в) як має теплохід змінювати власну швидкість, щоб вкластися в одну годину, враховуючи, що швидкість течії Білого Нілу залежить від кліматичних умов і варіюється в межах 2 – 6 км/год. г) не знаходячи часу руху теплохода назад, з'ясувати, як він зміниться і на скільки; д) з'ясувати, як зміниться розрахунковий час маршруту, якщо загальна відстань збільшиться на 20%; е) побудувати графік залежності часу руху теплохода від швидкості течії річки.

**Результати апробації окреслених підходів у навчанні математичного моделювання.** З метою отримання гіпотетичного висновку про позитивний вплив використання повного (хоч і спрощеного) циклу ММ до розв'язування реальних (або, згенерованих, але правдоподібних) задач та стратегії IBL на сформованість здатності до математичного

моделювання, в період з лютого 2023 р. до листопада 2024 р. проводився педагогічний експеримент в Ліцеї №129 м. Києва. В експерименті брали участь два класи: експериментальний (7-А – 8-А) і контрольний (7-Б – 8-Б), які на старті (в січні 2023 р.) мали приблизно однакові результати успішності з алгебри та геометрії. Оцінка результатів проводилася методом теорії нечітких множин (Zadeh, 1999). З метою перевірки рівня сформованості компетенції ММ, ми провели в обох 8-их класах діагностичне тестування. Учням було запропоновано 5 завдань, які відповідали п'ятьом визначеним нами вище етапам циклу ММ. Таким чином, ми оцінювали не якість математичної моделі, а процес моделювання. Результати тестування в розрізі завдань зображені гістограмою на рис. 2. Ми розглядали ММ як нечітку множину, елементами якої є 5 параметрів (здатності реалізовувати зазначені вище етапи ММ). Визначили для нашої задачі п'ять рівнів (так званих термів) компетенції ММ:  $E_5$  – високий (В),  $E_4$  – достатній (Д),  $E_3$  – середній (С),  $E_2$  – початковий (П),  $E_1$  – незадовільний (Н). Обчислені коефіцієнти сформованості компетенції ММ для контрольного та експериментального класів,  $K_1 \approx 0,39$  і  $K_2 \approx 0,73$ , відповідно, суттєво відрізняються, що наочно ілюструє графічне зображення термів та зазначених коефіцієнтів (Рис. 3). Експериментальний клас показав повну належність до достатнього рівня сформованості компетенції ММ (значення функції належності  $\mu_{E_4}(x) = 1$ ), а контрольний є у перехідній зоні від початкового до середнього, з більшою належністю до зони початкового рівня (0,6 або 60% проти 0,4 – 40%). Таким чином, наша гіпотеза щодо ефективності використовуваних підходів у навчанні ММ підтвердилася.

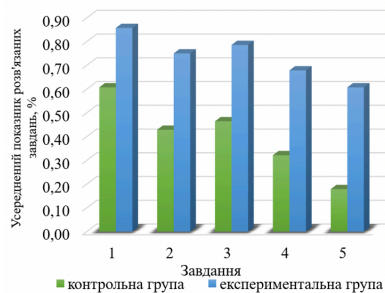


Рис. 2. Результати тестування в розрізі завдань

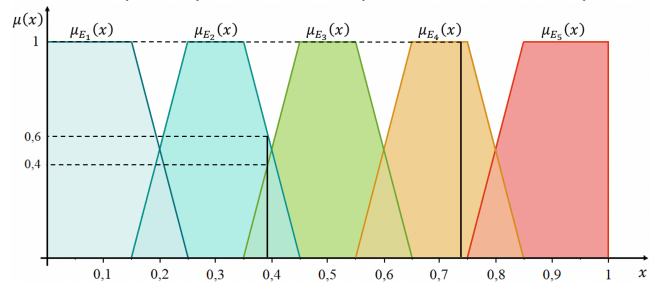


Рис. 3. Терми лінгвістичної змінної «Компетенція ММ»

### ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Компетенція ММ є інтегральною складовою математичної компетентності (за Ніссом) та простежується її асиметричний взаємозв'язок з іншими її компетенціями. Вона залежить від інших компетенцій, але при цьому не є необхідною для їх формування. Водночас компетенція ММ поглиблює та зміцнює усі інші складові математичної компетентності, що сприяє здатності застосовувати математику в різних контекстах.

Ефективним підходом формування здатності до ММ є використання IBL, а також розв'язування задач з повним (в розумних межах для навчальних цілей) циклом моделювання. Запропоновані у статті підходи до формування компетенції ММ можуть бути корисними для розробників освітніх програм та вчителів / викладачів математики, сприяючи забезпеченню цілісного розвитку математичної компетентності здобувачів освіти.

Подальші дослідження будуть спрямовані на емпіричне підтвердження ефективності запропонованих підходів у різних освітніх контекстах та розробку задач, що інтегрують ММ у навчання математики.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Астаф'єва, М. & Груздьова, К. (2021). Педагогічна стратегія inquiry-based learning (IBL) для розвитку математичного мислення школярів. *Фізико-математична освіта*, 32 (6), 7-12. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-032-6-001>
2. Державний стандарт базової середньої освіти (2020). [https://osvita.ua/legislation/Ser\\_osv/76886/](https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/76886/)
3. Мерзляк, А., Полонський, В. & Якір, М. (2021). *Алгебра. Підручн. для 8 кл. закл. загальної середньої освіти*. Харків: Гімназія.
4. Astafieva, M., Voiko, M., Hlushak, O., Lytvyn, O. & Morze, N. (2021). Experience in Implementing IBME at the Borys Grinchenko Kyiv University. In *The PLATINUM Project: monograph* (pp. 327–348). Masaryk University Press, Brno. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M201-9983-2021>
5. Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, Vol.22, Issue 3, 123–139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
6. Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? In *Modeling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 45–56). New York: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3)
7. Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 14–30). Dordrecht: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3)
8. Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example "filling up". In *Mathematical Modeling (ICTMA 12): education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
9. Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
10. Blum, W. & Niss, M. (2024). Origin and Development of the Notion of Mathematical Modelling Competency/Competencies. In *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times* (pp. 185–200). [https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_14)
11. Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM: the international journal on mathematics education*, Vol. 45, 811–822. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0542-2>
12. Galbraith, P. & Stillman G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modeling process. *ZDM: The Int J Math Educ.* 38(2), 143–162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>



13. Hernandez-Martinez, P., Rogovchenko, Y. & Thomas, S. (2021). 'I'm still making dots for them': Mathematics lecturers' views on their mathematical modelling practices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(2), 165–177. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1668977>
14. Ikeda, T., & Stephens, M. (1998). The influence of problem format on students' approaches to mathematical modelling. In *Mathematical Modelling. Teaching and Assessment in a Technology-Rich World* (pp. 222–232). Chichester, UK: Horwood.
15. Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering, and economics* (pp. 110–119). Chichester: Horwood. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.110>
16. Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM:Mathematics Education*, 38(3), 302–310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
17. Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115–124).
18. Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educ Stud Math* 102, 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
19. Rogovchenko, Y., Astafieva, M., Hernandez-Martinez, P., Lytvyn, O., Morze, N., Patikova, Z., Rebenda, J. & Rogovchenko, S. (2021) Mathematical Modelling and Inquiry-Based Mathematics Education. In *The PLATINUM Project: monograph* (pp. 147–170). Masaryk University Press, Brno. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021-8>
20. Schaap, S., Vos, P., Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman, editors. *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 137–146). Dordrecht: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_15)
21. Stillman, G., Brown, J. & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges with transitions phases in mathematical modelling activities at year 9. In *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 385–398). New York: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1\\_33](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_33)
22. Zadeh L. (1999). Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems, Vol.100, 1*, 9–34. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)80004-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)80004-9)

#### REFERENCES

1. Astafieva, M., & Hruzdova, K. (2021). Pedagogical strategy Inquiry-Based Learning (IBL) for development of schoolchildren mathematical thinking. *Physical and Mathematical Education*, 32(6), 7–12. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-032-6-001>
2. Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity. [State standard of basic secondary education]. (2020). [https://osvita.ua/legislation/Ser\\_ospv/76886/](https://osvita.ua/legislation/Ser_ospv/76886/) (in Ukrainian)
3. Merzlyak, A., Polonsky, V. & Yakir, M. (2021). *Algebra. Pidruchnyk dla 8 kl. zakl. zahalnoi serednoi osvity*. Kharkiv: Himnasia. [Merzlyak, A., Polonsky, V. & Yakir, M. (2021). *Algebra. Textbook for the 8th grade of general secondary education institutions*. Kharkiv: Himnasia]. (in Ukrainian)
4. Astafieva, M., Boiko, M., Hlushak, O., Lytvyn, O. & Morze, N. (2021). Experience in Implementing IBME at the Borys Grinchenko Kyiv University. In *The PLATINUM Project: monograph* (pp. 327–348). Masaryk University Press, Brno. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M201-9983-2021>
5. Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, Vol.22, Issue 3*, 123–139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
6. Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? In *Modeling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 45–56). New York: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3)
7. Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 14–30). Dordrecht: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3)
8. Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example "filling up". In *Mathematical Modeling (ICTMA 12): education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
9. Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
10. Blum, W. & Niss, M. (2024). Origin and Development of the Notion of Mathematical Modelling Competency/Competencies. In *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times* (pp. 185–200). [https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_14)
11. Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM: the international journal on mathematics education, Vol. 45*, 811–822. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0542-2>
12. Galbraith, P. & Stillman G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modeling process. *ZDM: The Int J Math Educ.* 38(2), 143–162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>
13. Hernandez-Martinez, P., Rogovchenko, Y. & Thomas, S. (2021). 'I'm still making dots for them': Mathematics lecturers' views on their mathematical modelling practices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(2), 165–177. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1668977>
14. Ikeda, T., & Stephens, M. (1998). The influence of problem format on students' approaches to mathematical modelling. In *Mathematical Modelling. Teaching and Assessment in a Technology-Rich World* (pp. 222–232). Chichester, UK: Horwood.
15. Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering, and economics* (pp. 110–119). Chichester: Horwood. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.110>
16. Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM:Mathematics Education*, 38(3), 302–310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
17. Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115–124).
18. Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educ Stud Math* 102, 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
19. Rogovchenko, Y., Astafieva, M., Hernandez-Martinez, P., Lytvyn, O., Morze, N., Patikova, Z., Rebenda, J. & Rogovchenko, S. (2021). Mathematical Modelling and Inquiry-Based Mathematics Education. In *The PLATINUM Project: monograph* (pp. 147–170). Masaryk University Press, Brno. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021-8>
20. Schaap, S., Vos, P., Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman, editors. *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 137–146). Dordrecht: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_15)
21. Stillman, G., Brown, J. & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges with transitions phases in mathematical modelling activities at year 9. In *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 385–398). New York: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1\\_33](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_33)
22. Zadeh L. (1999). Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems, Vol.100, 1*, 9–34. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)80004-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)80004-9)