МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ БОРИСА ГРІНЧЕНКА
ІНСТИТУТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ НАПН УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМЕНІ В. М. ГЛУШКОВА НАН УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ А. С. МАКАРЕНКА
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ТЕОРЕТИКО-ПРАКТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ І КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОСВІТІ ТА НАУЦІ»

Збірник матеріалів
II Всеукраїнської конференції

28 березня 2018 року
м. Київ

Київ – 2018

УДК 004:378(082)
ББК 32.97:74.58я73

Схвалено Вченою радою
Факультету інформаційних технологій та управління Київського університету імені Бориса Грінченка
(Протокол № 3 від 21.03.2018 р.)

Відповідальні за випуск:
Д. М. Бодненко,
О. М. Глушак,
О. С. Литвин,
В. В. Прошкін

Теоретико-практичні проблеми використання математичних методів та комп'ютерно-орієнтованих технологій в освіті та науці: зб. матеріалів у ІІ Всеукраїнської конференції, 28 березня 2018 р., м. Київ / Київ. ун-т ім. Б. Грінченка; Відповід. за вип.: Д. М. Бодненко, О.М. Глушак, О.С. Литвин, В.В. Прошкін. – К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2018. – 235 с.

УДК 004:378(082)
ББК 32.97:74.58я73

Секція 3.
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ В ОСВІТІ ТА НАУЦІ

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ РІККАТІ

Астаф'єва М. М.
Київський університет імені Бориса Грінченка, м. Київ

Одна з актуальних задач математичної теорії керування – мінімізація певного функціонала якості еволюційних процесів, що описуються диференціальними рівняннями. З'ясовано, що при розгляді цієї задачі для випадку, коли функціонал якості є невласним інтегралом на півосі, а сам процес описується лінійним скалярним диференціальними рівнянням, доводиться мати справу із рівнянням Ріккаті [1]. Оскільки записати загальний розв'язок рівняння Ріккаті, як відомо, можна лише в окремих випадках, то виникає потреба з'ясувати умови, які забезпечують існування обмежених розв'язків, знаходження їх у наперед заданій смузі, при яких, одночасно, потрібний функціонал досягає найменшого значення. Результатам дослідження цих питань присвячена наукова доповідь.

Нехай маємо скалярне рівняння Ріккаті

$$\dot{z} = a(t)z^2 + b(t)z + c(t), \tag{1}$$

де $a(t), b(t), c(t)$ – дійсні скалярні функції, визначені, неперервні і обмежені на R. Поряд із рівнянням (1) розглянемо рівняння

$$\dot{y} = -a(t) - b(t)y - c(t)y^2, \tag{2}$$

отримане з (1) за допомогою заміни $z = y^{-1}$.

Наступне твердження дає достатні умови, при яких розв'язки цих рівнянь на всій дійсній осі змінюються від мінус одиниці до плюс одиниці, причому ці розв'язки єдині.

Теорема 1. *Якщо для деякого* $\alpha > 0$ *при всіх* $t \in R$ *виконується умова*

$$|b(t)| - |a(t) + c(t)| \geq \alpha,$$

то кожне з рівнянь (1) та (2) має єдиний розв'язок $z = z^*(t)$ *та* $y = y^*(t)$, *відповідно, причому виконуються умови* $|z^*(t)| < 1$ *і* $|y^*(t)| < 1$.

Узагальнюючи результати теореми 1, вдалося отримати достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння Ріккаті, який знаходиться в наперед заданій смузі.

Теорема 2. Нехай при деяких фіксованих значеннях $\mu, \nu \in R, \ (\mu < \nu)$ виконується нерівність

$$\left|(\nu+\mu)a(t)+b(t)\right|-\left|\frac{\nu^2+\mu^2}{2(\nu-\mu)}a(t)+\frac{\nu+\mu}{\nu-\mu}b(t)+\frac{2}{\nu-\mu}c(t)\right| \geq \alpha$$

при всіх $t \in R$ і деякому $\alpha = const > 0$. Тоді рівняння Ріккаті (1) має єдиний розв'язок $z = z^*(t)$, який задовольняє нерівність $\mu < z^*(t) < \nu$ при всіх $t \in R$.

Розглянемо тепер матрично-диференціальне рівняння Ріккаті

$$\frac{d}{dt}S = SA(t)S + SB(t) + C(t)S + Q(t), \tag{3}$$

де $A(t), B(t), C(t), Q(t)$ – n-вимірні квадратні матриці, елементами яких є дійсні скалярні функції, неперервні і обмежені на R. Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай для матриць* $A(t), B(t), C(t), Q(t)$ *виконується нерівність*

$$\left|\langle B(t)x, x\rangle + \langle\left[A^T(t)+Q(t)\right]x, y\rangle + \langle C(t)y, y\rangle\right| \geq \varepsilon\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right), \ \varepsilon > 0.$$

Тоді рівняння (3) має єдиний розв'язок $S = \overline{S}(t)$, *який задовольняє умову* $\left\|\overline{S}(t)\right\| < 1$ *при всіх* $t \in R$.

Висновки. Отримано достатні умови існування і єдиності розв'язку рівняння Ріккаті, який знаходиться в певній смузі на всій дійсній осі зміни незалежної змінної. Оскільки проблема існування обмежених розв'язків рівняння Ріккаті виникає при мінімізації певного виду функціоналів, то розв'язана задача має важливе значення і знайде застосування в математичній теорії оптимального керування.

ДЖЕРЕЛА

1. Астаф'єва М. М. Задача мінімізації функціонала в теорії керування // Фізико-математична освіта. – Випуск 4(14), 2017. – С. 143–148.