**Київський університет імені Бориса Грінченка**

**Л.Ф. Василевич, С.О. Семеняка**

# ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

**Навчальний посібник для студентів**
**математичних та економічних спеціальностей**

**Київ – 2020**

**УДК 336(075.8)**

**ББК 65.050**

**В20**

Рекомендовано до друку Вченою радою

Київського університету імені Бориса Грінченка

(*протокол № 10 від 27 жовтня 2016 р.*)

**Рецензенти**:

***Виноградова Олена Володимирівна*** - доктор економічних наук, професор, академік АЕН України, завідувач кафедри маркетингу Державного університету телекомунікацій;

***Гончар Микола Семенович*** - доктор фізико-математичних наук, професор, завідуючий відділом методів математичного моделювання в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова.

**В20**

Василевич Л.Ф., Семеняка С.О.

Фінансова математика : навч. посіб. / Л.Ф. Василевич, С.О. Семеняка ; Київ. ун-т ім. Б. Грінченка. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2020. — 228 с.

Навчальний посібник розрахований на студентів математичних та економічних спеціальностей усіх форм навчання. Посібник має на меті допомогти студентам оволодіти основами фінансової математики. У ньому стисло і доступно подано основний теоретичний матеріал з даної дисципліни, запропоновано приклади типових задач, задачі для самостійного розв’язування, а також запитання для самоконтролю.

## Зміст

# Передмова

Для ухвалення обґрунтованих економічних та фінансових рішень, для їхнього аналізу необхідно володіти відповідними методами фінансових розрахунків, які і є предметом фінансової математики. Основним об'єктом фінансового аналізу є гроші та цінні папери.

У навчальному посібнику «Фінансова математика» викладено у стислій формі наступні питання: логіка фінансових операцій (зміна цінностей грошей з часом, операції нарощування та дисконтування, інфляція та необхідність урахування ризику фінансових операцій); прості та складні відсотки; грошові потоки та оцінка ефективності інвестиційних проектів; розглянуто основні задачі фінансової математики.

Посібник складається з семи розділів, кожен з яких містить теоретичну частину, приклади розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язування, а також запитання для самоконтролю.

Методи фінансових та комерційних розрахунків, які розглядаються в посібнику, наведені для задач за умов визначеності інформації.

Фінансовий аналіз за умов визначеності означає, що дані для аналізу відомі, тому майбутні прибутки, які будуть отримані в конкретний час, є гарантованими. Велика увага надається поясненню взаємозалежності економічних категорій інформації, вартості, часу та ризику. Наведено класифікацію економічних ризиків.

Ефективність діяльності підприємств, інвестиційних проектів оцінюється грошовими потоками, відтак потрібно вміти проводити їх порівняльний аналіз. Відповідні задачі розглядаються в кожному розділі.

Вивчення теоретичних основ та опрацювання наведених у посібнику задач дає змогу не тільки належним чином оволодіти методами фінансових розрахунків, а й розвинути фінансове мислення.

Посібник «Фінансова математика» призначений для студентів різних спеціальностей, які вивчають дану дисципліну, а також для бажаючих самостійно оволодіти її основами. У сучасних умовах важко знайти людину, яка не користується послугами банків, тому фінансова грамотність, уміння враховувати фінансовий принцип ***«зміни цінності грошей в часі»*** **(*time value to money*)** та «змушувати» гроші працювати потрібні кожному.

Навчальний посібник підготовлений у відповідності до програми дисципліни «Фінансова математика», яка викладається в Київському університеті імені Бориса Грінченка.

Наприкінці посібника наведено глосарій, який дає можливість студентам вивчати дисципліну більш ефективно, та англо-український словник основних термінів фінансової математики, що допоможе швидше інтегруватися у фінансове середовище будь-якої країни.

Розділи 1, 5, 6 написані Л.Ф. Василевичем; розділи 2, 3, 4 – С.О. Семенякою.

# Тема 1. ПРЕДМЕТ І ЗАДАЧІ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

## 1.1. Нарощення грошей. Час як фактор у фінансових розрахунках

Час – це гроші.
*Народна мудрість*

Фактор часу, особливо в довгострокових фінансових операціях, відіграє дуже важливу роль. Збільшення терміну кредиту призводить до збільшення суми, яку отримує кредитор. Таким чином гроші зростають у часі, або, як кажуть, «гроші роблять гроші».

**Означення 1.1.** Збільшення суми грошей внаслідок видачі грошей (в будь-якій формі) в кредит називається ***нарощенням*** початкової суми грошей.

Згідно з фінансовим принципом «зміни цінності грошей з часом» **(**time value to money**)** сучасні гроші мають більшу ціну, ніж гроші майбутні, тобто грошова одиниця сьогодні не дорівнює грошовій одиниці завтра:

$$1\ 000 \text{ грн в час } t_0 \neq 1\ 000 \text{ грн в час } t.$$

Причинами «зміни цінності грошей з часом» є також інфляція та ризик (*рис. 1.1*).

**Означення 1.2.** ***Інфляція*** **(**inflation**)** – це знецінення грошей, що виявляється в зростанні цін на товари та послуги і, як наслідок, зниженні купівельної спроможності грошей.

***Ризик*** **(**risk**)** як невизначеність у процесі прийняття та реалізації рішення може призвести до того, що інвестор не отримає в майбутньому суму грошей, на яку розраховував на початок фінансової операції.

Всі ці явища і визначають дію економічного закону «часової вартості грошей», або, як ще кажуть**,** «зміни цінності грошей з часом».

Згідно з принципом «зміни цінності грошей в часі» неправомірним є підсумовування, а також порівняння грошових сум, що належать до різних моментів часу. Фактор часу у фінансових розрахунках враховується за допомогою *відсоткових ставок* (rate of interest), які дають можливість для кожної *теперішньої* вартості грошей (present value) або *основної суми* (principal value) знайти (на основі принципу фінансової еквівалентності) відповідну їй величину в майбутньому (future value) чи в минулому.

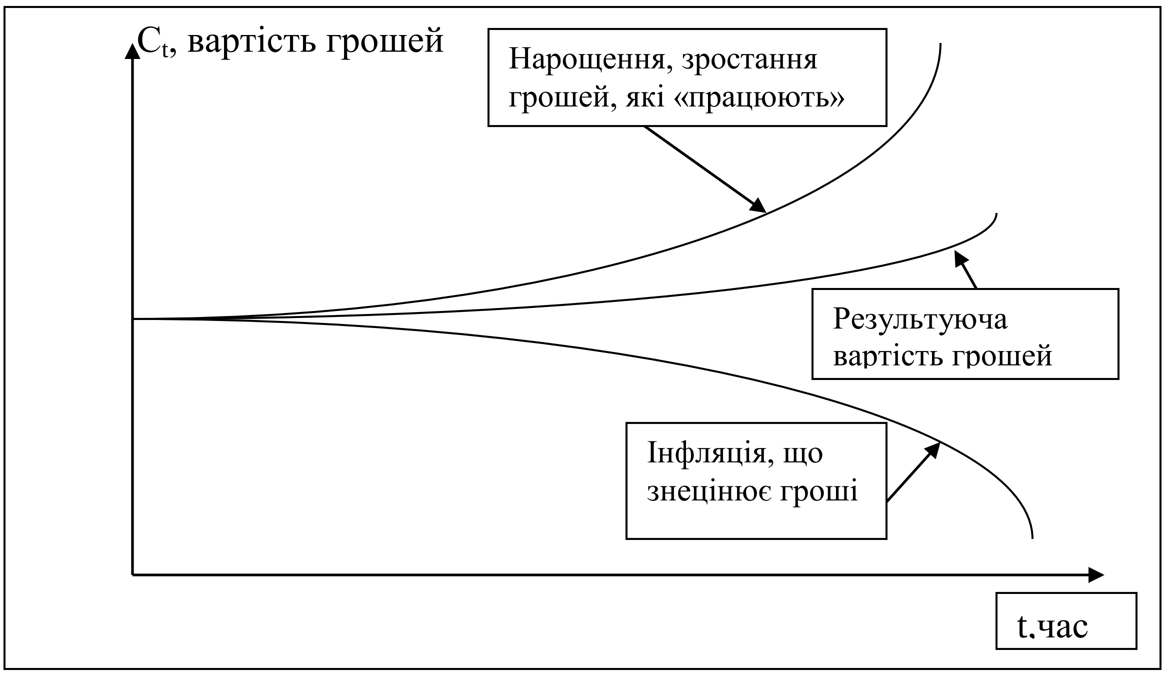



***Рис. 1.1.*** Зміна вартості грошей в часі

Фінансова математика є складовою частиною кількісного *фінансового аналізу* **(**financial analysis**)** і *фінансового менеджменту* **(**financial management). Вона спрямована на вирішення широкого кола питань: від елементарних, пов'язаних із нарахуванням майбутніх грошей; до складних, пов'язаних з *інвестиційними рішеннями* **(**investment decision**)**, *рішеннями з фінансування бізнесу* **(**financing decision**)** та *рішеннями з управління активами* **(**asset management decision**)**.

До ***задач*** фінансової математики належать [1]:

1) вимірювання кінцевих фінансових результатів операцій для кожного з її учасників (кредитора та боржника);

2) розробка планів виконання фінансових операцій, у тому числі планів погашення заборгованості;

3) вимірювання залежності кінцевих результатів операції від основних її параметрів;

4) визначення допустимих критичних значень цих параметрів і розрахунок параметрів еквівалентної зміни початкових умов операції.

***Об'єктом*** фінансової математики є гроші, цінні папери та різні операції з ними, наприклад, видача кредиту, інвестиції грошей у різні активи.

***Предметом*** фінансової математики є методи розрахунку основних показників фінансових операцій та методи їх аналізу.

***Теоретичною основою*** фінансової математики є методи фінансових обчислень, що стосуються взаємозалежності вартості, часу, ризику, та кількісний аналіз ефективності фінансових операцій.

## 1.2. **Відсотки, види відсоткових ставок**

Гроші роблять гроші.
*Народна мудрість*

Наведемо основні поняття фінансової математики, які використовуються при оцінюванні фінансових операцій. Однією з основних фінансових операцій є *кредитна угода*. До кредитних угод належать: відкриття депозитного рахунку в банку, видача банком кредиту, облік векселя, продаж товарів в кредит, купівля облігації та інших цінних паперів. Умови кредитної угоди визначаються у фінансовому контракті (договорі), який є юридичним забезпеченням операції.

Проста кредитна угода являє собою разову видачу кредиту (позики), що погашається одним платежем через точно визначений термін.

**Означення 1.3.** ***Відсотки*** (відсотковий прибуток, відсоткові гроші) $I$ (interest) – це абсолютна величина прибутку (доходу) власника капіталу від видачі грошей в будь-якій формі в кредит, їх інвестицій за певний термін фінансової операції:

$$I = S - P, \tag{1.1}$$

де $S$ – ***нарощена*** (майбутня) сума позики **(**future value, terminal value**)**, а для позичальника – це сума боргу, яка повинна бути погашена в час $t$; $P$ – ***початкова*** **(**теперішня – на даний момент $t_0$ ) сума грошей (present value, principal value) фінансової операції або сума, яка дається в борг.

Відзначимо некоректність у назві $I$ – «відсотки». Дійсно, як випливає із означення, $I$ – це абсолютна величина нарощення суми позики, яка вимірюється в грошових одиницях, а не у відсотках (відносних одиницях). Але традиційно суму нарощених грошей (прибуток) називають відсотками або відсотком.

Величина відсотків залежить від виду фінансової операції, зокрема, від величини та виду відсоткової ставки, способу нараховування відсотків та тривалості фінансової операції.

**Означення 1.4.** ***Відсоткова ставка*** (rate of interest) – це відносна величина, яка характеризує доходність кредитної операції для кредитора та вартість кредиту для боржника та є відношенням відсотків до суми боргу.

Існує два види відсоткових ставок: відсоткова ставка нарощення $\boldsymbol{i}$ та облікова відсоткова ставка $\boldsymbol{d}$.

**Означення 1.5.** ***Відсоткова ставка нарощення*** $i$ **(**interest base rate**)**, яку частіше називають відсотковою ставкою, – це відношення відсотків $I$, отриманих за певний проміжок часу, до початкової суми $P$ боргу:

$$i = \frac{I}{P} = \frac{S-P}{P}. \qquad (1.2)$$

**Означення 1.6.** ***Облікова відсоткова ставка*** $d$ (discount base rate), – це відношення відсотків $I$, отриманих за певний проміжок часу, до нарощеної суми $S$ боргу:

$$d = \frac{I}{S} = \frac{S-P}{S}. \qquad (1.3)$$

Всі відсоткові ставки вимірюються у вигляді десяткових дробів або у відсотках (0,27 = 27%).

***Примітка:*** у фінансових розрахунках відсоткові ставки вживаються тільки у вигляді десяткових дробів.

Зазначимо, що відсоткова ставка – це відносна величина прибутку за фіксований відрізок часу. Вона характеризує інтенсивність зміни вартості грошей в часі, тому формула (1.3) розрахунку відсоткової ставки нарощення має однаковий вигляд з формулою для статистичного показника «темп приросту» грошей або ефективності будь-якої фінансової операції, що вимірюється у відсотках. Тому на фінансових ринках завжди існують певні норми доходності інвестицій, які і визначаються відсотковими ставками.

**Означення 1.7.** Інтервал часу $K$, до якого прив’язана відсоткова ставка, називається ***періодом нарахування відсотків*** (running period).

Періодами нарахування можуть бути: рік, півріччя, квартал, місяць, день. Наприклад, кажуть «річна відсоткова ставка» або «місячна відсоткова ставка». Частіше застосовуються річні відсоткові ставки. Тому надалі, якщо не вказується період нарахування відсотків, це означає, що застосовується *річна відсоткова ставка*.

**Означення 1.8.** Якщо нарахування відсотків здійснюється за дуже малі проміжки часу, то йдеться про ***неперервні відсотки*** (continuous interest). На практиці наближенням до неперервних відсотків є відсотки з щоденним нарахуванням.

**Означення 1.9.** Число $n = \frac{t - t_0}{K}$ називається *числом періодів нарахування* відсотків за інтервал часу $t - t_0$, де $K$ – період нарахування відсотків.

Застосовуючи (1.2), маємо, що відсотки нараховуються на початкову або попередню суму (принцип «від теперішнього до майбутнього») і, відповідно, при цьому застосовується відсоткова ставка нарощення:

$$I = Pi. \tag{1.4}$$

Такі відсотки називають ***декурсивними*** (discursive interest).

Застосовуючи (1.3), маємо, що відсотки нараховуються на кінцеву (нарощену) суму:

$$I = S\,d. \tag{1.5}$$

Дані відсотки називають ***антисипативними*** (antisipative interest).

З формули (1.2) отримуємо формулу для нарахування нарощеної суми при декурсивних відсотках за один період (рік) ($n$ = 1):

$$S = P + I = P + Pi = P(1 + i). \tag{1.6}$$

З формули (1.3) отримуємо формулу для нарахування нарощеної суми при антисипативних відсотках за один рік ($n$ = 1):

$$S = P + I = P + S\,d. \tag{1.7}$$

З (1.7) маємо

$$S = \frac{P}{1 - d}. \tag{1.8}$$

У формулах (1.6), (1.7) та (1.8) $i$ та $d$ – річні відсоткові ставки.

**Приклад 1.1.** Клієнт банку отримав кредит 9 000 грн терміном на 1 рік під відсоткову ставку 10% річних. Обчислити суму, яку клієнт має повернути банку через рік, якщо нарахування відсотків здійснюється за відсотковою ставкою нарощення та за обліковою відсотковою ставкою.

***Розв'язання.*** При нарахуванні на борг декурсивних відсотків (застосовується відсоткова ставка нарощення *i*) клієнт через рік поверне банку суму, яка визначається формулою (1.7):

$$S = P + Pi = 9\,000 + 9\,000 \cdot 0{,}1 = 9\,900 \text{ грн.}$$

При нарахуванні на борг антисипативних відсотків (застосовується облікова відсоткова ставка *d*) клієнт має повернути банку суму, яка визначається формулою (1.8):

$$S = \frac{P}{1-d} = \frac{9\,000}{1-0{,}1} = 10\,000 \text{ грн.}$$

При нарахуванні антисипативних відсотків, як бачимо з попередньої задачі, банк отримує більший прибуток, аніж при нарахуванні декурсивних відсотків. Тому антисипативні відсотки використовують за умов великої інфляції та у банківському обліку (наприклад, при обліку векселів). На практиці, при нормально діючій економіці, як правило, застосовуються декурсивні відсотки (відсоткова ставка нарощення *i*).

***База нарахування відсотків B*** (interest base amount) – це вихідна сума, на яку нараховуються відсотки. В залежності від бази нарахування відсотків, розрізняють прості і складні відсотки.

**Означення 1.10.** Якщо сума, на яку нараховується відсотки, одна і та ж для кожного періоду нарахування ($B = const$), то відсотки називаються ***простими*** **(**simple interest**)**.

**Приклад 1.2.** На депозит $P$ терміном три роки нараховуються прості відсотки з річною відсотковою ставкою $i$. Знайти нарощену (майбутню) суму та відсотки за три роки.

***Розв'язання.*** При нарахуванні простих декурсивних відсотків (застосовується відсоткова ставка нарощення $i$) нарощена за три роки сума дорівнює

$$S = P + I_1 + I_2 + I_3 = P + Pi + Pi + Pi = P(1+3i).$$

Оскільки кожного року база нараховування відсотків незмінна ($B = P$), то маємо прості відсотки. Відсотки (прибуток) за три роки $I = S - P = P \cdot 3i$.

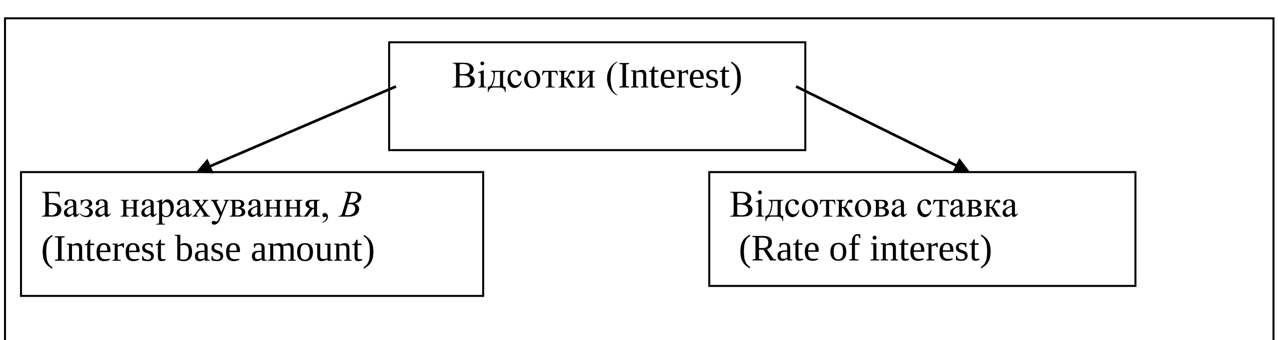
**Означення 1.11.** Якщо сума, на яку нараховуються відсотки, змінюється ($B = varia$), то відсотки називаються ***складними*** **(**compound interest**)**.

**Приклад 1.3.** На депозит $P$, терміном три роки, нараховуються складні відсотки з відсотковою ставкою $i$. У цьому випадк, кожний рік відсотки нараховуються на нарощену за попередні роки суму ($B = varia$). Нарощена за три роки сума (майбутня сума) розраховується за означенням складних відсотків наступним чином:

$$S = P + I_1 + I_2 + I_3 = P + Pi + S_1 i + S_2 i = P + Pi + (P + Pi)i + (P + Pi + (P + Pi)i)i =$$
$$= P(1 + 3i + 3i^2 + i^3) = P(1+i)^3.$$

Так як кожний рік база нараховування відсотків змінюється: $B_1 = P$; $B_2 = S_1 = P + Pi$; $B_3 = S_2 = P + Pi + (P + Pi)i$, то відсотки, згідно з означенням, є складними.

Таким чином, в залежності від бази нарахування відсотків та виду відсоткової ставки існують чотири види відсотків (*рис. 1.2*).



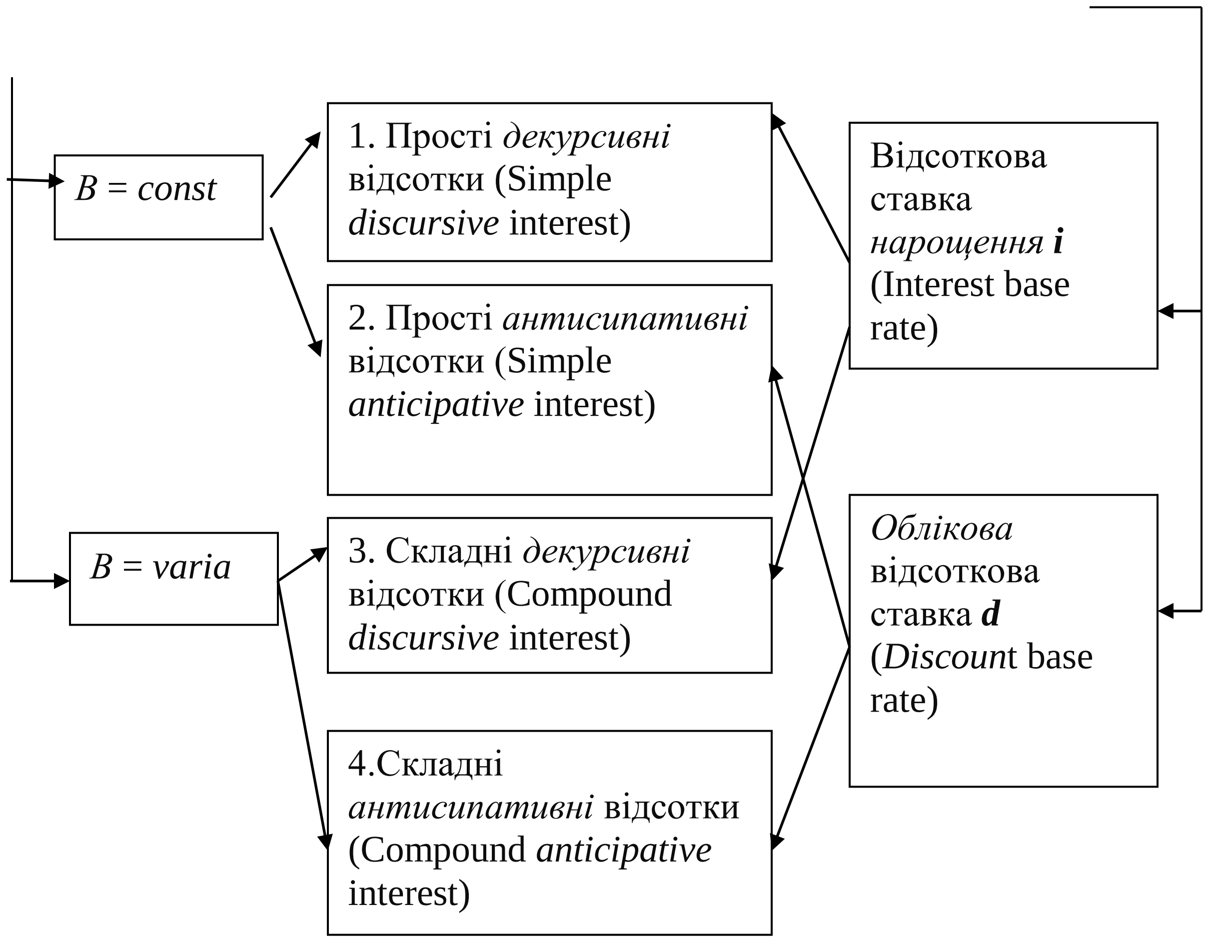



***Рис. 1.2.*** Класифікація відсотків

Операції нарощення грошей (знаходження *S*) застосовуються завжди, коли гроші беруть або дають в борг. Відповідні математичні задачі потребують знаходження майбутньої суми грошей *S*.

**Означення 1.12.** Задачі знаходження нарощеної суми грошей *S* називаються ***прямими задачами*** фінансової математики.

Для урахування принципу нерівноцінності грошей у часі для фінансового менеджменту потрібно звести результати операцій до одного моменту часу, що, як правило, робиться на початковий момент часу. Для цього знаходяться теперішні (приведені) вартості грошей $P$ (present value), які і застосовуються для порівняння різних фінансових операцій.

**Означення 1.13.** Задачі приведення майбутнього платежу $S$ до його теперішньої вартості $P$ при відомих відсотковій ставці та тривалості фінансової операції називаються ***оберненими задачами*** фінансової математики, а відповідний процес називається ***дисконтуванням*** (discount).

Відсоткову ставку в цьому разі називають ***ставкою дисконтування*** (rate of discount). Таким чином, операція дисконтування є оберненою задачею до задачі нарощування, коли знаходиться майбутня вартість платежу $S$ при відомій теперішній вартості $P$.

**Означення 1.14.** ***Дисконтом D*** (discount) називається різниця між майбутньою вартістю платежу $S$ та його теперішньою вартістю $P$:

$$D = S - P, \tag{1.9}$$

де $S$ – нарощена сума, тобто прибуток наприкінці фінансової операції $t$; $P$ – початкова сума фінансової операції (сума грошей в початковий момент $t_0$).

Як бачимо з (1.8) та (1.9), математичні вирази як для відсотків $I$, так і для дисконту $D$ є однаковими. Це пояснюється тим, що кредитна операція між двома суб'єктами є грою з нульовою сумою: коли один виграє певну суму грошей (отримує *премію* (premium)), то інший цю суму програє. Для одного з них ця сума є відсотками (прибутком, премією) $I$, а для іншого – дисконтом (втратою, знижкою) $D$.

Наприклад, для ***облігації*** (bond) дисконт – це різниця між номіналом облігації та її сучасною вартістю. Тому у разі дострокового продажу облігації її власник зазнає фінансових втрат. Для власника векселя втрати дорівнюють прибутку (відсоткам), який отримує банк після завершення фінансової операції.

В залежності від виду відсоткової ставки, яка застосовується в операції дисконтування, існують два метода дисконтування:

– ***математичне дисконтування*** **(**mathematic discount**)**, коли застосовується відсоткова ставка нарощування $i$;

– ***банківський (комерційний) облік*** **(**bank discount**)**, коли застосовується відсоткова облікова ставка $d$.

**Приклад 1.4.** Через рік клієнт отримує в банку 12 000 грн. Яку суму він поклав на депозит під річну відсоткову ставку нарощення $i = 20\%$? Чому дорівнюють відсотки для клієнта та дисконт для банка?

***Розв'язання.*** Оскільки за умов задачі застосовується відсоткова ставка нарощення, то маємо задачу математичного дисконтування. Застосовуючи формулу (1.6), отримуємо початкову суму депозиту: $P = \frac{S}{1+i} = \frac{12}{1+0,2} = 10$ тис. грн. Відсотки для клієнта дорівнюють: $I = S – P = 12 – 10 = 2$ тис. грн. Для банка ця величина є дисконтом (втратою).

**Приклад 1.5.** Вексель, який має номінальну вартість $S = 10$ тис. грн, облікований у банку за рік до його погашення за обліковою ставкою $d = 30\%$ річних. Знайти, яку суму $P$ отримує власник за цей вексель? Чому дорівнює його дисконт $D$?

***Розв'язання.*** Оскільки за умовою задачі застосовується облікова відсоткова ставка, то маємо задачу банківського обліку. Застосовуючи формулу (1.8), обчислюємо суму, яку отримає власник векселя: $P = S(1-d) = 10(1-0,3) = 7$ тис. грн. Величина дисконту (втрати) власника векселя дорівнює $D = S – P = 10 – 7 = 3$ тис. грн. Для банку ця величина є відсотками (прибутком).

У фінансових розрахунках при дисконтуванні потрібно з’ясувати вид відсоткової ставки, за якою маємо шукати сучасну вартість. Дану відсоткову ставку називають ***ставкою дисконтування***. Вибір ставки дисконтування ґрунтується на припущенні, що інвестор завжди намагається вкласти гроші якомога вигідніше; купувати той актив, який забезпечує найкраще співвідношення між доходністю та ризиком. Для оцінювання ставок дисконтування існують такі ринкові правила:

– з двох проектів, які дають однакові майбутні прибутки, більшу ставку дисконтування має той проект, надходження від якого отримають пізніше;

– якщо в середньому доходності на ринку збільшуються, то і зростають ставки дисконтування;

– чим нижчий рівень фінансового ризику, тим нижчою буде відповідна ставка дисконтування.

## 1.3. Інфляція

Жити на спроможність коштує сьогодні значне дорожче,
ніж два роки тому.
*Спостереження*

У сучасних умовах інфляція у грошових відносинах є одним із основних макроекономічних чинників, що впливають на ефективність інвестування. Без урахування інфляції кінцевий результат часто можна вважати умовною величиною. Інфляцію необхідно враховувати принаймні при розрахунку нарощеної суми, при дисконтуванні та при визначенні реальної ефективності (доходності) фінансової операції.

**Означення 1.15.** ***Інфляція*** (inflation) – знецінення грошей, що відображається в зростанні цін на товари та послуги і, як наслідок, зниженні купівельної спроможності грошей.

Характеристиками інфляції є *індекс цін* $J_p$; *індекс купівельної спроможності грошей* $J_c$ та *темп інфляції* $H$. Усі ці кількісні характеристики інфляції пов'язані між собою.

**Означення 1.16.** ***Індекс цін*** **(**prise index**)** $J_p$ – це кількісна характеристика інфляції, яка показує, у скільки разів зросла вартість товару та послуг (наприклад, споживчого кошику) за певний період часу $[t_0, t]$, та визначається за формулою:

$$J_p = \frac{C_t}{C_0}, \qquad (1.10)$$

де $C_t$ – реальна вартість суми грошей або вартість, наприклад, споживчого кошику в момент часу $t$; $C_0$ – вартість суми грошей (споживчого кошику) в попередній час $t_0$.

Тоді реальна вартість $C_t$ суми грошей $S$, яка знецінилася за час $t$, розраховується за формулою

$$C_t = \frac{S}{J_p} = S\,J_c, \qquad (1.11)$$

де $J_c$ – індекс купівельної спроможності грошей (cost index, index of purchasing power), який дорівнює оберненій величині індексу цін і показує, у скільки разів зменшилася купівельна спроможність грошей:

$$J_c = \frac{1}{J_p}. \qquad (1.12)$$

Індекси $J_c$ та $J_p$ мають розраховуватися за однакові проміжки часу. Наприклад, сьогодні отримано 150 тис. грн. Прогноз показує, що за наступні два роки ціни підвищаться в 1,5 рази (на 50%), тобто $J_p = 1{,}5$, а індекс купівельної спроможності дорівнює: $J_c = \frac{1}{1{,}5}$. Звідси, реальна вартість (купівельна спроможність) 150 тис. грн буде складати $C_t = \frac{150}{1{,}5} = 100$ тис. грн у грошах із купівельною спроможністю дворічної давнини.

Коли відомі індекси цін $j_{p\,j}$ за окремі інтервали часу $\Delta_{t\,j} = t_j - t_{j-1}.$, тоді індекс цін за весь період часу $\Delta_t = t_j - t_0$ дорівнює добутку цих індексів цін.

Дійсно,

$$J_p(t_0,\, t_n) = \frac{C_t}{C_0} = \frac{C_{t1}}{C_0} \cdot \frac{C_{t2}}{C_{t1}} \cdot \frac{C_{t3}}{C_{t2}} \cdot \ldots \cdot \frac{C_{t-1}}{C_{t-2}} \cdot \frac{C_t}{C_{t-1}} =$$

$$= j_p(0,\, t_1) \cdot j_p(t_1,\, t_2) \cdot \ldots \cdot j_p(t_{n-1},\, t_n) = j_{p1} \cdot j_{p2} \cdot \ldots \cdot j_{pt-1} \cdot j_{pt} = J_p. \qquad (1.13)$$

**Означення 1.17.** ***Темп інфляції*** (rate of inflation) $H$ – це відносний приріст цін, що вимірюється у відсотках, за період часу [ $t_0$, $t$ ]:

$$H = \frac{C_t - C_0}{C_0} \cdot 100\,(\%). \qquad (1.14)$$

Легко пов’язати темп інфляції та індекс цін:

$$H = \frac{C_t - C_0}{C_0} \cdot 100 = \left(\frac{C_t}{C_0} - \frac{C_t}{C_0}\right) \cdot 100 = (J_p - 1) \cdot 100. \qquad (1.15)$$

З формули (1.15) отримуємо, що, у свою чергу,

$$J_p = 1 + \frac{H}{100}. \qquad (1.16)$$

Коли відомі темпи інфляції $h_j$ за окремі інтервали часу $\Delta_{t\,j} = t_j - t_{j-1}$, тоді для знаходження темпу інфляції за весь період часу $\Delta_t = t_j - t_0$ потрібно спочатку знайти індекси цін $j_{p\,j}$ за вказані періоди:

$$j_{p\,j} = 1 + \frac{h_j}{100}. \qquad (1.17)$$

Застосовуючи властивість (1.13), знаходимо індекс цін $J_p$ за весь період часу:

$$J_p = \prod_i j_{pi} = \prod_i \left(1+\frac{h(t_0,t_1)}{100}\right)\left(1+\frac{h(t_1,t_2)}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{h(t_{n-1},t_n)}{100}\right). \qquad (1.18)$$

Знайшовши $J_p$, обчислюємо темп інфляції $H$ за весь період, застосовуючи формулу (1.15): $H = (J_p - 1)\cdot 100.$

***Примітка.*** Грубою помилкою є додавання темпів інфляції за окремі періоди при знаходженні темпу інфляції за весь період.

**Приклад. 1.6.** Темп інфляції за кожний місяць становить $h_i = 5\%$. Знайти темп інфляції за рік.

***Розв'язання.*** Спочатку знаходимо індекс цін за місяць:

$$j_{pj} = 1+\frac{h_j}{100} = 1+\frac{5}{100} = 1,05.$$

Далі знаходимо індекс цін за рік:

$$J_p = \prod_i j_{pi} = (1,05)^{12} = 1,796.$$

Тоді річний темп інфляції становить:

$$H = (J_p - 1)\cdot 100\% = (1,796-1)\cdot 100\% = 79,6\%.$$

Отриманий результат значно більший за величину $12\cdot 5\% = 60\,\%.$.

**Означення 1.18.** Відсоткові ставки $i$, які не враховують непередбачених темпів інфляції, називаються ***номінальними або звичайними*** **(**nominal interest rate**)**.

Але інвестори не знають, якою буде інфляція, і ризикують отримати внаслідок економічної нестабільності в країні меншу доходність, ніж та, яка відповідає номінальній відсотковій ставці.

**Означення 1.19.** ***Реальна*** відсоткова ставка (real interest rate) $i_p$ – це така відсоткова ставка, яка характеризує доходність операції за умов інфляції та з її урахуванням.

Для визначення реальної відсоткової ставки $i_p$, яка буде характеризувати доходність операції за умов інфляції, можне застосовувати формулу Фішера:

$$i_p = \frac{i - 0,01 \cdot H}{1 + 0,01 \cdot H}, \tag{1.19}$$

де $i$ – річна номінальна ставка; $H$ – річний темп інфляції.

Таким чином, темп інфляції зменшує реальну ставку і, відповідно, доходність кредитора.

За невеликих темпів інфляції $(1 + 0,001H \approx 1)$ маємо:

$$i_p = \frac{i - 0,01 \cdot H}{1 + 0,01 \cdot H} \approx i - 0,01H. \tag{1.20}$$

Формула (1.20) переоцінює величину реальної доходності.

**Приклад 1.7.** Річний темп інфляції $H = 10\%$. Якою повинна бути річна відсоткова ставка $i$ на депозити, щоб клієнт отримав реальну доходність $i_p = 20\%$?

***Розв'язання.*** З формули Фішера (1.19) знаходимо, що

$$i = i_p(1 + 0,01 \cdot H) + 0,01 \cdot H = 0,2(1 + 0,01 \cdot 10) + 0,01 \cdot 10 = 0,32.$$

Більш точно реальну відсоткову ставку можна знаходити на основі її означення.

**Приклад 1.8.** За перше півріччя очікується темп інфляції $h_1 = 10\%$, а за наступне півріччя – $h_2 = 15\%$. Якою повинна бути мінімальна річна відсоткова ставка $i$ на депозити, щоб клієнт отримав реальну доходність $i_p = 20\%$.

***Розв'язання.*** Нарощена за відсотковою ставкою $i$ за рік сума вкладу

$$S = P + I_1 = P + Pi = P\ (1 + i).$$

З урахуванням інфляції реальна вартість $C_t$ суми грошей $S$, яка знецінилася за рік, буде дорівнювати (1.11):

$$C_t = \frac{S}{J_p},$$

де індекс цін відповідно до (1.18) становить

$$J_p = \prod_i j_{pi} = \prod_i \left(1 + \frac{h(t_0, t_1)}{100}\right)\left(1 + \frac{h(t_1, t_2)}{100}\right) = (1 + 0{,}1)(1 + 0{,}15) = 1{,}265.$$

Рівняння доходності, яке відповідає реальній відсотковій ставці $i_p = 20\%$, має вигляд:

$$P\ (1 + i_p) = \frac{P\,(1 + i\,)}{J_p}.$$

Розв’язуючи дане рівняння відносно реальної доходності $i_p$, та враховуючи умову $i_p \geq 20\%$, отримуємо:

$$i_p = \frac{1+i}{J_p} - 1 \geq 0{,}2\,.$$

З цієї нерівності маємо:

$$i \geq \frac{1+i}{J_p} - 1 \geq 1{,}2 \cdot J_p - 1 = 1{,}28 \cdot 1{,}265 - 1 = 0{,}619\,.$$

Таким чином, мінімальна відсоткова ставка розміщення депозиту складає 61,9 %. Але інфляція призводить до того, що реальна доходність буде складати лише 20%.

При застосуванні формули Фішера (1.19) за умови, що відсоткова ставка розміщення депозиту $i = 61{,}9\%$ та темп інфляції $H = (\,J_p - 1)$

$\times 100 = (1{,}265 - 1)\cdot 100 = 26{,}5\%$, отримуємо, що реальна відсоткова ставка дорівнює:

$$i_p = \frac{i - 0{,}01\cdot H}{1 + 0{,}01\cdot H} = \frac{0{,}619 - 0{,}01\cdot 26{,}5}{1 + 0{,}01\cdot 26{,}5} = 0{,}28.$$

Таким чином, формула Фішера переоцінює величину реальної доходності, тому її можна використовувати лише при наближених розрахунках.

## 1.4. Ризик як економічна категорія

Знав би, де упаду, - соломку підстелив би.
Хто не ризикує, той і не виграє.
*Народна мудрість*

Етимологія слова «ризик», яка починається з грецьких слів “ridsikon” “ridsa”, що означає «скеля»; далі від староіталійського “risicare”, – «відважитись», показує, що ризик спочатку був пов’язаний з задачею прийняття рішень за умов небезпечного мореплавства. Пізніше слово «ризик» в перекладі з італійської мови означатиме «небезпека», «загроза». Французьке “risqué”, яке походить з італійської мови, також означає «загроза», «небезпечність». Таким чином, ризик став характеризувати небезпеки, загрози, які постають при прийнятті рішень.

В сучасній науковій літературі містяться різні підходи до розуміння терміну «ризик». Так, наприклад, можна привести наступні означення ризику:

– це потенційна загроза;

– це можливість того, що відбудеться небажана подія;

– це можливість відхилення отриманого результату від очікуваного;

– це подія з від’ємними результатами, наслідками, втратами;

– це дії зі сподіванням на везіння, вдачу;

– це ймовірність зазнати збитки, недоотримати прибутки;

– це діяльність, яка пов’язана з подоланням невизначеності в ситуаціях вибору (прийняття рішень).

Однак загальним в усіх цих уявленнях є те, що ризик розуміється як імовірність недосягнення заздалегідь поставленої мети.

Характерними *ознаками* ризику є наступні:

– ризик є притаманним будь-якому рішенню, результати якого будуть відомі тільки в майбутньому;

– повне усування ризику неможливо, оскільки неможливо усунути всі причини, фактори ризику, невизначеність, які притаманні будь-якому рішенню. Описати майбутнє точно та достовірно неможливо, його можна лише прогнозувати з тією чи іншою ефективністю;

– навіть неприйняття рішення вже містить в собі ризик невикористаних можливостей, оскільки навіть при наявності лише одного очевидного рішення, насправді, існує друге, альтернативне - не приймати це рішення. Це друге рішення і має свій ризик: ризик невикористаних можливостей;

– оцінка ризику є, як мінімум, двокритеріальною задачею: необхідно оцінити ступінь можливості (ймовірність) відхилення результату рішення від запланованого, а також величину цього відхилення.

Виходячи з вище сказаного, можемо дати наступне означення.

**Означення 1.20.** ***Ризик*** (risk) – це невизначеність в процесі прийняття та реалізації рішення, а також в процесі досягнення мети, яка може призвести до відхилення отриманого результату, від очікуваного.

Ця невизначеність і визначає загрозу отримання не того результату, на який був розрахунок. Але, якби б ризик був пов’язаний тільки з від’ємними результатами, тоді не можливо було б пояснити його прийняття підприємцями.

Що визначає вибір інвестора, який зіштовхується з ризиком? *Людина згодна ризикувати тільки в обмін на відповідну винагороду (певний зиск, прибуток).* Ця теза являє собою один з базових принципів фінансової теорії.

Ризик та прибуток мають розглядатися як взаємопов’язані категорії: чим більший можливий результат може дати рішення, тим більший ризик воно приховує. Наслідком же реалізації ризику може бути як недоотримання прибутку, так і отримання великих прибутків. *Тому найбільш визначні результати отримують при реалізації рішень, які апріорі мають великий ризик.*

Ризик повсюди – це настільки об’єктивно, наскільки об’єктивна наявність у навколишньому середовищі невизначеності.

***Об’єктом ризику*** є економічна система, ефективність і умови функціонування якої наперед точно не відомі.

Під ***суб’єктом ризику*** розуміється особа (індивід або колектив), що зацікавлена в результатах управління об’єктом ризику і має компетенцію прийняття рішення відносно об’єкту ризику; *особа, яка приймає рішення* (ОПР).

***Джерело ризику*** – це чинники (явища, процеси), що викликають невизначеність результатів.

Основні причини ризику показані на *рис. 1.3*.

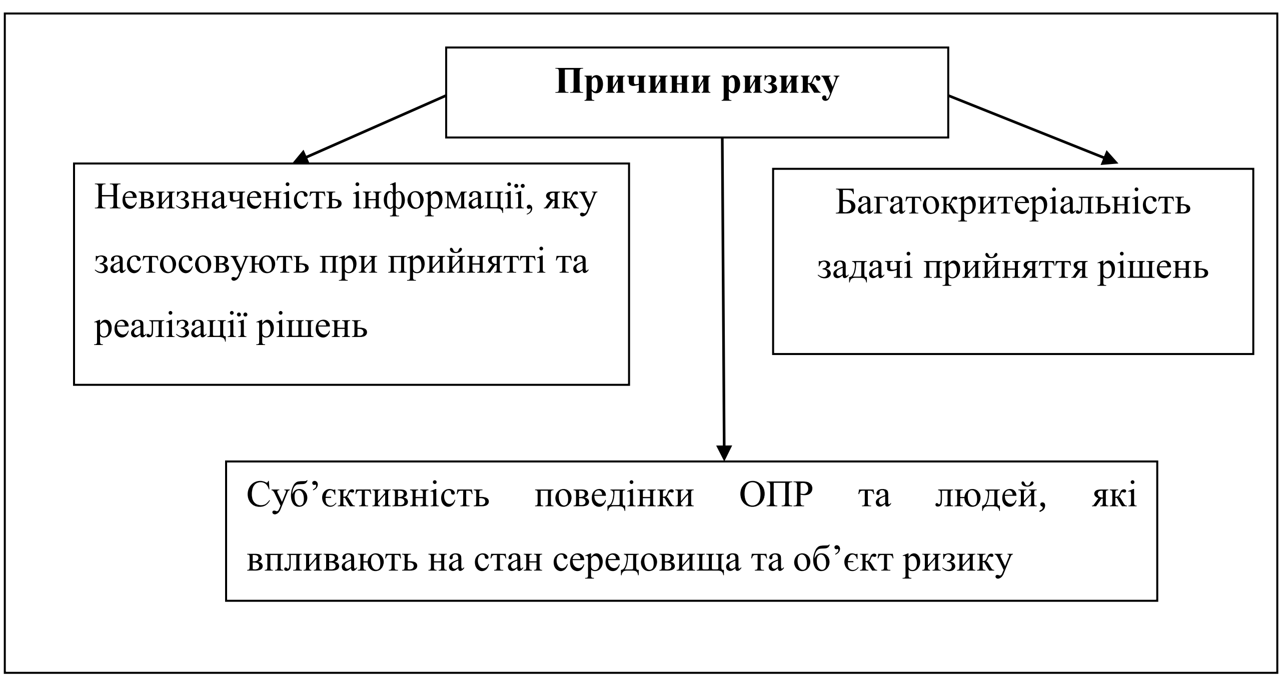


***Рис. 1.3.*** Причини ризику

Кажуть: «Знав би, де упаду, – соломку підстелив би», тому невизначеність інформації, яку застосовують при прийнятті та реалізації рішення, і є головною причиною ризику.

Невизначеність інформації може бути різною (види невизначеності приведені на *рис 1.4*.

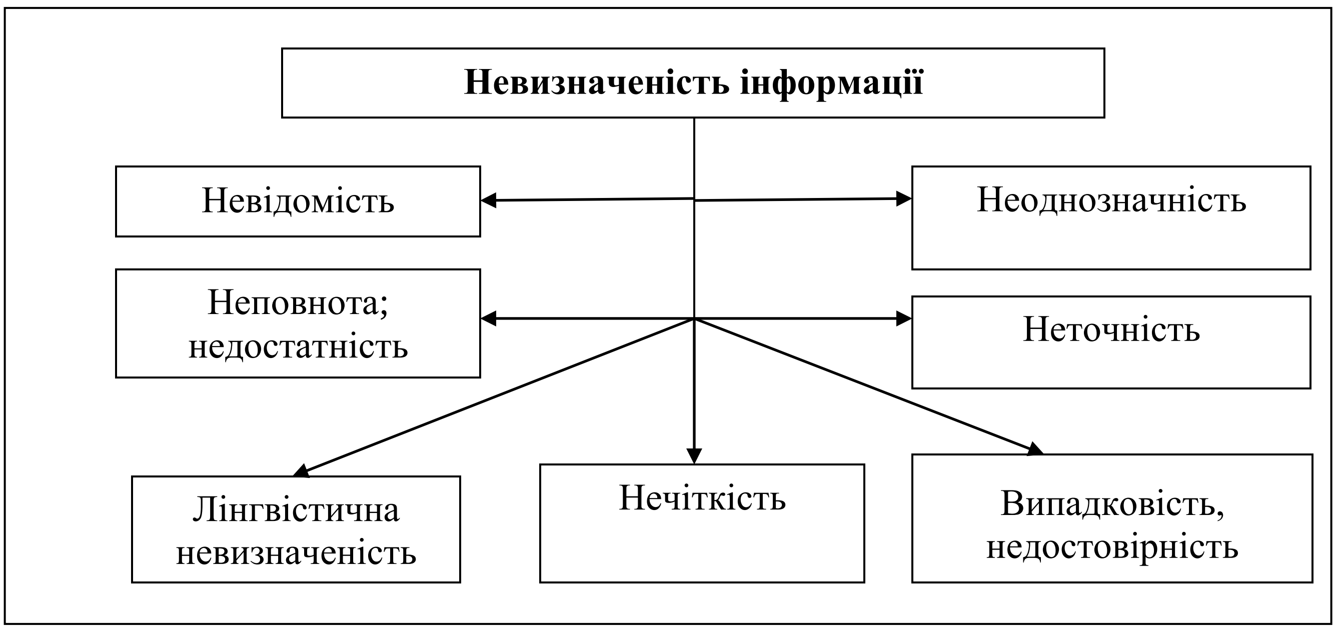



***Рис. 1.4.*** Види невизначеності інформації

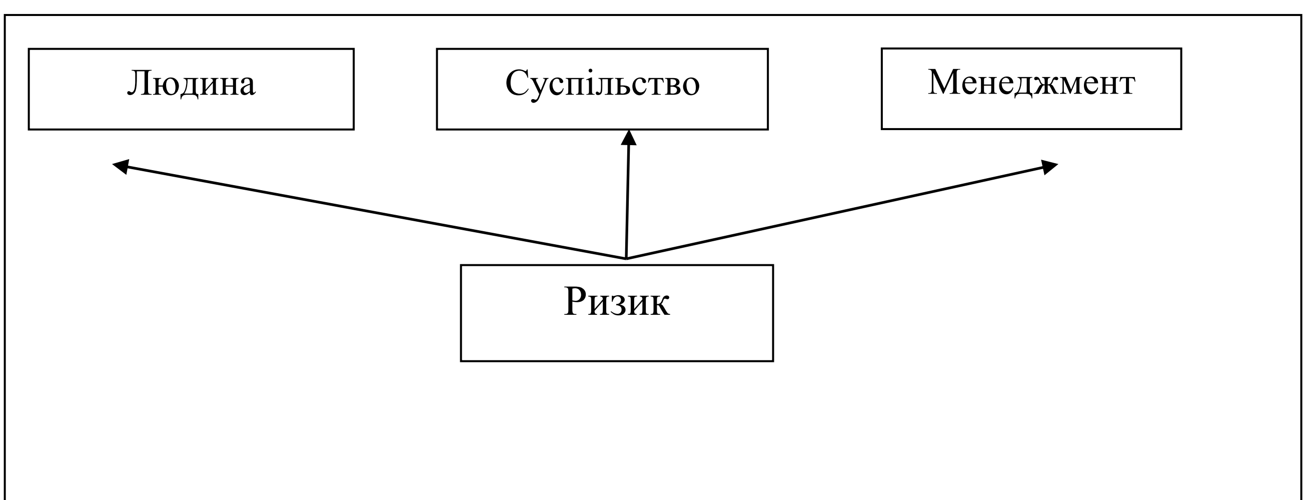
Неоднозначність може бути обумовлена самою природою функціонування об’єкту ризику: стохастичністю поведінки середовища та суб’єкту ризику; неточністю вимірювань, нечіткістю оцінок експертів, що не дозволяє точно та достовірно оцінити наслідки (результати) рішень, які стануть відомими тільки в майбутньому. Повторимо, що майбутнє нікому не відомо.

Але коли неоднозначність відноситься до змісту інформації, тоді невизначеність включає ще і ступінь достовірності інформації, яка оцінюється або ймовірністю відповідної події (стохастичні моделі), або функцією належності (нечіткі моделі). Наприклад, вираз: «можливо, що у наступному місяці прибуток суттєво зменшиться» є одночасно і невизначеним («можливо») і неоднозначним («суттєво»).

При цьому фізична невизначеність, яка пов'язана з вимірами та кількісними оцінками, може бути ускладнена лінгвістичною невизначеністю (невизначеністю, яка пов'язана з мовою спілкування). Лінгвістична невизначеність може бути пов'язана з невизначеністю значень слів (омонімією) або невизначеністю змісту фраз. Приклад омонімії: слово «коса» може вживатися для позначення географічного поняття, сільськогосподарського обладнання або дівочої зачіски. Неоднозначність змісту фрази може бути синтаксичною (наприклад, «карати не можна помилувати») або семантичною.

Крім того, ризик зумовлюється суб'єктивною поведінкою людини. Дж.-М. Кейнс включив в причини ризику психологічні аспекти. Він показав, що ОПР може отримувати задоволення від самого процесу ризику. Є особи, які схильні до ризику, а є такі, які не схильні. Тому сучасна теорія ризику тісно пов'язана з психологією, а сам ризик має об'єктивно–суб'єктивну природу.

Але завжди ризик виникає тоді, коли результат деякої дії неможливо заздалегідь передбачити в силу зазначених вище причин. Джерела ризику показані на *рис. 1.5*.



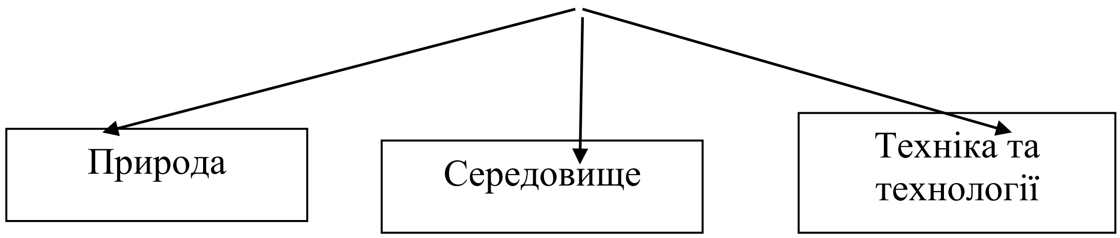



***Рис. 1.5.*** Джерела ризику

Чинник ризику особливо відчувається на ринках капіталу. При відсутності ризику, ринок капіталів, та й в цілому фінансові ринки, звелися б до ринку якогось однотипного боргового зобов'язання з єдиною відсотковою ставкою.

На практиці інвестори визначають реальну відсоткову ставку (відсоткову ставку дисконтування) $i_p$ шляхом додавання до безризикової відсоткової ставки $i_0$ премії за ризик $i_r$:

$$i_p = i_0 + i_r. \tag{1.21}$$

Коли відома ймовірність $p$ неповернення позичальником суми позики та відсотків за неї, тоді реальну відсоткову ставку $i_r$ іноді розраховують за формулою:

$$i_p = \frac{1+i_0}{1-p} - 1. \tag{1.22}$$

Різниця $i_p - i_0$ є премією кредитору за ризик. З формули (1.22) випливає, що відсоткова ставка може знижуватися для фінансово надійних клієнтів, і, навпаки, збільшуватися для ненадійних клієнтів.

**Приклад**. **1.9.** Ймовірність неповернення позичальником суми позики $p = 0{,}1$, а безризикова відсоткова ставка $i_0 = 0{,}2$. Якою повинна бути реальна відсоткова ставка, яка ураховує ризик неповернення боргу, та чому дорівнює премія за ризик?

***Розв'язання.*** Відповідно до (1.22), маємо: $i_p = \dfrac{1+i_0}{1-p} - 1 = \dfrac{1+0,2}{1-0,1} - 1 =$ $= 0,33$. Премія за ризик $i_p - i_0 = 33 - 20 = 13\%$.

## 1.5. Функції ризику

Невдача – це можливість почати все спочатку,
але більш інтелігентно.
*Генрі Форд*

Ризик виконує декілька основних функцій: інноваційну, захисну, регулятивну та аналітичну (*рис. 1.6*).

***Інноваційна функція ризику*** полягає в необхідності пошуку нетрадиційних рішень, впроваджування в економіку інновацій, нових технологій. Зрозуміло, що інноваційні рішення мають більший ризик, оскільки пов'язані з недостатньою інформацією відносно майбутнього результату, комерційних перспектив. Але без цього ризику не було б ні технічного, ні економічного, ні соціального прогресу. Люди завжди будуть ризикувати, для того щоб отримати додаткові блага. І чим більші ті блага, тим на більший ризик ідуть підприємці.

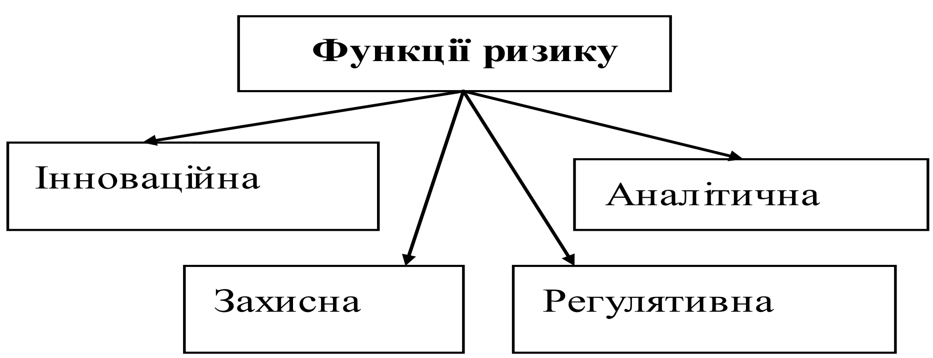


***Рис. 1.6.*** *Функції ризику*

Інноваційним рішенням притаманний більший ризик, але вони можуть дати більші блага (результат, прибуток), тому ризик і виконує важливу функцію стимулювання прогресивних змін.

***Захисна функція ризику*** полягає у відмові від прийняття дуже ризикових рішень, а також в необхідності шукати захисту від реалізації ризику, його негативних наслідків, проведення превентивних заходів (наприклад, створення резервів для компенсації шкоди, збитків, які можуть бути отримані внаслідок реалізації ризику).

З однієї сторони, ОПР повинна бути готова до можливих невдач, а з іншої, – ініціативній, діловій людині необхідні правові, соціальні та економічні гарантії, які виключають втрати у випадку реалізації ризику. Захисна функція ризику призвела, наприклад, до появи страхування.

***Регулятивна функція ризику*** проявляється у двох формах: *конструктивній* та *деструктивній*, які визначають негативну та позитивну сторони ризику. Конструктивна форма регулятивної функції ризику спрямована на подолання консерватизму, догматизму, косності, стереотипів, які виступають гальмом розвитку, та повинна стимулювати ризиковану, інноваційну діяльність. Але прийняття дуже великого ризику може призвести до авантюризму та необґрунтованим рішенням і, як наслідок, до великих втрат. В цьому проявляється деструктивна форма регулятивної функції ризику. Як бачимо, деструктивність регулятивної форми ризику гальмує прогрес.

***Аналітична функція ризику*** як складної економічної категорії полягає в необхідності виявлення всіх видів ризиків, їх аналізу та кількісній оцінці, управління ними, створення та розвиток теорії ризику, пошуку та аналізу альтернативних варіантів рішень проблеми, прийняття оптимальних та раціональних рішень за умов ризику.

Представники класичної школи політичної економії А.Сміт та Дж.Мілль в структурі підприємницького прибутку виділяли статтю «Плата за ризик». Вони вважали, що підприємець закладає в очікуваний прибуток відповідну частину, яка повинна компенсувати втрати в наслідок реалізації ризику.

## 1.6. Класифікація ризиків

Знаєш ризики – краще спиш.

*З досвіду підприємця*

Складність класифікації ризиків обумовлена їх різноманітністю (від можливих пожарів та інфляції до змін в законодавчій базі), появою з розвитком світу нових ризиків (ризик похідних цінних паперів, ризик збою комп’ютерної системи) та виникненням тісного взаємозв’язку, заміщенням, входженням одних ризиків в інші.

В залежності від мети та задач, які стоять перед ризик-менеджментом, застосовують різні критерії класифікації та відповідні види ризиків. Коли відома класифікація ризиків, тоді простіше вирішувати задачу визначення всіх ризиків, з якими підприємець може зіткнутися при реалізації бізнес–проекту. Урахування всіх можливих ризиків дозволяє більш детально бачити всі нюанси відповідного рішення, приймати краще рішення та більш ефективно його реалізовувати.

За різними критеріями, факторами ризики можна класифікувати наступним чином.

**Група 1.** Критерії, які визначають сферу (область) прояву ризику; вид, елементи, операції діяльності.

***1. В залежності від області прояву:***

- політичний,
- економічний,
- соціальний,
- екологічний,
- адміністративно-законодавчий,
- демографічний,
- юридичний,
- правовий,
- податковий,
- галузевий,
- виробничий,
- комерційний,
- фінансовій,
- підприємницький та інші.

***2. За видом діяльності та рівнем їх агрегування (об'єднання):***

- виробничий,
- комерційний,
- фінансовий,
- підприємницький,
- банківський,
- кредитний,
- інноваційний,
- ризик менеджменту,
- маркетинговий,
- ризик зовнішньоекономічної діяльності,
- логістичний,

- транспортний,
- інформаційно-технологічний,
- страховий та інші.

***3. В залежності від елементів економічної діяльності:***

- ризик цінних паперів,
- портфельний,
- валютний,
- відсотковий та інші.

***4. За видом операцій:***

- ризик кредитної операції,
- ризик бартерної операції,
- ризик лізингової операції,
- ризик клірингової операції,
- ризик орендної операції,
- ризик страхової операції,
- ризик самофінансування,
- ризик зовнішнього фінансування,
- ризик факторингової операції,
- ризик венчурної операції та інші.

***5. В залежності від виду внутрішньої діяльності організації:***

- ризик управління персоналом,
- ризик управління матеріальними ресурсами,
- ризик управління фінансовими ресурсами,
- маркетинговий ризик,
- транспортний ризик,

- операційний ризик (ризик, який пов’язаний з процесами збору, обробки, зберігання та передачі інформації, помилками людей та комп’ютерних систем),
- аудиторський ризик та інші.

***6. За об’єктами ризику :***

- ризики окремих інвестиційних проектів,
- ризики окремих видів інвестиційної діяльності,
- ризики інвестиційної діяльності підприємства в цілому (корпоративний ризик).

**Група 2.** Критерії, які характеризують ризик за його різними кількісними оцінками.

***1. За ступенем його аналізу:***

- обґрунтований,
- частково обґрунтований,
- необґрунтований,
- авантюрний (азартний),

***або***

- оптимальний,
- неоптимальний.

***2. За величиною:***

- мінімальний,
- середній,
- високий,
- максимальний ,
- ***або***
- незначний,

- мінімальний
- допустимий,
- високий,
- недопустимий,
- критичний,
- катастрофічний.

***3. За масштабами:***

- локальний, на рівні підприємства (ризик на макрорівні або мікроризик),
- галузевий (ризик на мезорівні або мезоризик),
- міжгалузевий (мезоризик),
- регіональний (мезоризик),
- державний (ризик на макрорівні або макроризик),
- глобальний, який зачіпає світову економіку або економіку декількох країн (ризик на мегарівні або мегаризик).

***4. В залежності від результатів ризикової події, яка очікується:***

- чисті ризики, які можуть призвести тільки до втрат або нульового результату,
- спекулятивні ризики, які можуть призвести як до втрат, так і до додаткових прибутків,
- ризик невикористаної можливості.

***5. В залежності від впливу одного ризику на інший:***

- взаємно підсилюючі ризики,
- взаємно послаблюючі ризики,
- ризики, результати дії яких додаються.

**Група 3.** Критерії, які характеризують ризик за його різними *якісними* оцінками.

***1. За видом інформації, яка використовується під час прийняття рішення:***

- ризик за умов повної невизначеності інформації, яка використовується,
- ризик за умов часткової невизначеності інформації, яка використовується,
- ризик за умов стохастичної невизначеності інформації, яка використовується,
- ризик за умов повної невизначеності інформації, яка використовується,
- ризик за умов конфлікту.

***2. В залежності від дій або бездіяльності ОПР:***

- динамічний,
- статичний.

***3. За кількістю осіб, які приймають рішення:***

- індивідуальний,
- колективний (груповий).

***4. В залежності від сфери появи та дії ризику:***

- зовнішні, які не пов'язані з діяльністю підприємства (наприклад, політичні ризики, природні),
- внутрішні, які обумовлені діяльністю підприємства (наприклад, кредитний, операційний ризики)

***або***

- неринковий ризик,
- ринковий ризик.

***5. За ступенем системності дії ризику на підприємство:***

- системний ризик,
- несистемний ризик.

***6. За кількістю операцій, які пов'язані з ризиком:***

- ризик окремої операції (лізинговий, кредитний, бартерний та інші),
- ризик окремих видів діяльності,
- ризик діяльності підприємства в цілому.

***7. За можливістю прогнозування:***

- ризик, який можна прогнозувати,
- ризик, який не можливо прогнозувати.

***8. За можливістю (за практикою) страхування:***

- страхові,
- не страхові.

***9. За причиною появи:***

- об'єктивний, який пов'язаний з тим, що, результат рішення буде відомим тільки в майбутньому,
- суб'єктивний, який пов'язаний з суб'єктивною поведінкою, людини, ОПР,

***або***

- ризик, який пов'язаний з невизначеністю інформації,
- ризик, який пов'язаний з неповнотою інформації, яка необхідна для прийняття та реалізації рішення,
- ризик, який пов'язаний з багатокритеріальністю задачі прийняття рішень,
- ризик, який пов'язаний з суб'єктивною поведінкою людини, ОПР,

***або***

- стохастичний ризик,
- не стохастичній ризик.

***10. За кількістю фінансових інструментів*:**

- ризик окремого фінансового інструменту,
- портфельний ризик.

***11. За методами зниження:***

- диверсифікований (він же неринковий або несистематичний),
- недиверсифікований (він же ринковий або систематичний),

***або***

- який може бути хеджованим,
- який не може бути хеджованим,

***або***

- лімітований,
- не лімітований,

***або***

- який може бути резервованим,
- який не може бути резервованим,

***або***

- страховий,
- нестраховий.

***12. В залежності від зміни купівельної здатності грошей:***

- інфляційні ризики,
- дефляційні ризики.

***13. В залежності від можливості поділити ризик на більш прості ризики:***

- складний, який підрозділяється на підвиди (наприклад, банківській ризик),
- простий ризик, який не підрозділяється на підвиди (наприклад, інфляційний ризик),

***або***

- екзогенний (простий, незалежний ризик, від якого залежить ендогенний ризик),

- ендогенний (складний, залежний, результуючий ризик, який визначається сукупністю інших ризиків).

***14. В залежності від типу очікуваного збитку:***

- ризик прямого збитку,
- ризик посереднього (непрямого) збитку.

***15. З позиції впливу ризиків на стан економіки країни в цілому:***

- інноваційні ризики, які пов'язані зі створенням нових товарів (послуг), що в разі успіху приносять дуже великі прибутки, але можуть і не знайти очікуваного попиту на ринку ,
- ризики перерозподілу,
- ризики чистих втрат, реалізація яких наносить збиток суспільству, економіці, середовищу.

***16. В залежності від країни – джерела ризику:***

- зовнішньо-країнний,
- внутрішньо-країнний.

***17. За можливістю керування ризиком:***

- керований ризик,
- керований безпосередньо (не підприємством, а, наприклад, державою),
- некерований ризик (наприклад, ризики стихійних лих, аварії (форс-мажорні ризики), які можна передати страховику).

**Група 4.** Критерії, які характеризують ризик за часовими характеристиками.

***1. За тривалістю дії:***

- систематичний,

- не систематичний,

***або***

- постійний, який пов’язаний з дією постійних факторів,
- часові, які проявляються лише на окремих етапах інвестиційної діяльності.

***2. В залежності від можливого часу реалізації ризику:***

- стратегічні ризики,
- оперативні,
- ризики кожної доби (операційні ризики).

***3. В залежності від часу появи:***

- ретроспективні (пов’язані з рішеннями в минулому, але можуть реалізуватися внаслідок зміни конкретних факторів),
- поточні,
- перспективні.

**4. За часом дії ризики підрозділяються на:**

- короткострокові, які можуть реалізуватися протягом короткого відомого відрізку часу (наприклад, ризик короткострокового кредитування),
- довгострокові, які можуть реалізуватися протягом великого відрізку часу, які важко достовірно визначити (наприклад, інфляційний ризик),

***або***

- дискретні,
- неперервні.

***5. В залежності від реалізації:***

- ризики, які реалізувалися,
- ризики, які всупереч очікуванню не реалізувалися.

***6. В залежності від часу аналізу ризику:***

- початковий ризик,
- ризик з урахуванням можливих дій щодо його зниження,
- ризик рішення, яке прийнято.

***7. В залежності від етапу виробничого процесу:***

- ризики на етапі розробки,
- ризики на етапі виробництва,
- ризики на етапі продажу товарів (послуг),
- ризики на етапі росту виробництва,
- ризики на етапі згортання діяльності підприємства.

***8. В залежності від новизни ризику:***

- типовий (ризик, який повторюється),
- новий типовий ризик (новий для даного підприємства, але типовий для інших),
- унікальний ризик.

**Група 5.** Критерії, які характеризують причини (фактори) ризику:

***1. В залежності від фінансового показника підприємства:***

- ризик рентабельності,
- ризик прибутку,
- ризик втрат,
- ризик ліквідності,
- ризик фінансової стійкості та інші.

***2. За купівельною здатністю:***

- інфляційний,
- дефляційний,
- валютний,
- ризик ліквідності.

***3. В залежності від партнерської сторони:***

- ризик замовника,
- ризик виконавця,
- ризик партнерів,
- ризик контрагентів.

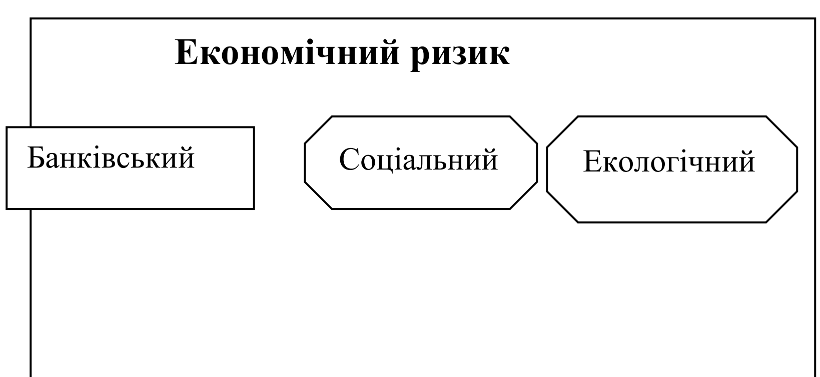
***4. За родом небезпечності:***

- техногенні, які обумовлені діяльністю людини,
- природні, які не залежать від діяльності людини,
- змішані, які мають природній характер, але ініційовані господарчою діяльністю людини.

***5. В залежності від обсягу інформації про ризик :***

- відомі ризики – природа їх факторів відома, є можливість отримати їх кількісні характеристики (дії з управління цими ризиками відноситься до задач прийняття рішень за умов визначеності),
- передбачені ризики – природа їх факторів відома, але важко отримати їх кількісні характеристики в силу різних обставин (дії з управління цими ризиками відноситься до задач прийняття рішень за умов часткової невизначеності),
- непередбачені ризики – інформація про фактори ризиків відсутня або незначна (наприклад, ризик зміни позицій акціонерів).

Можлива класифікація і за іншими критеріями. Очевидно, що окремі види ризиків взаємопов’язані, можуть перетинатися, складатися з інших, узагальнювати та входити в інші *(рис. 1.7 - 1.9*).



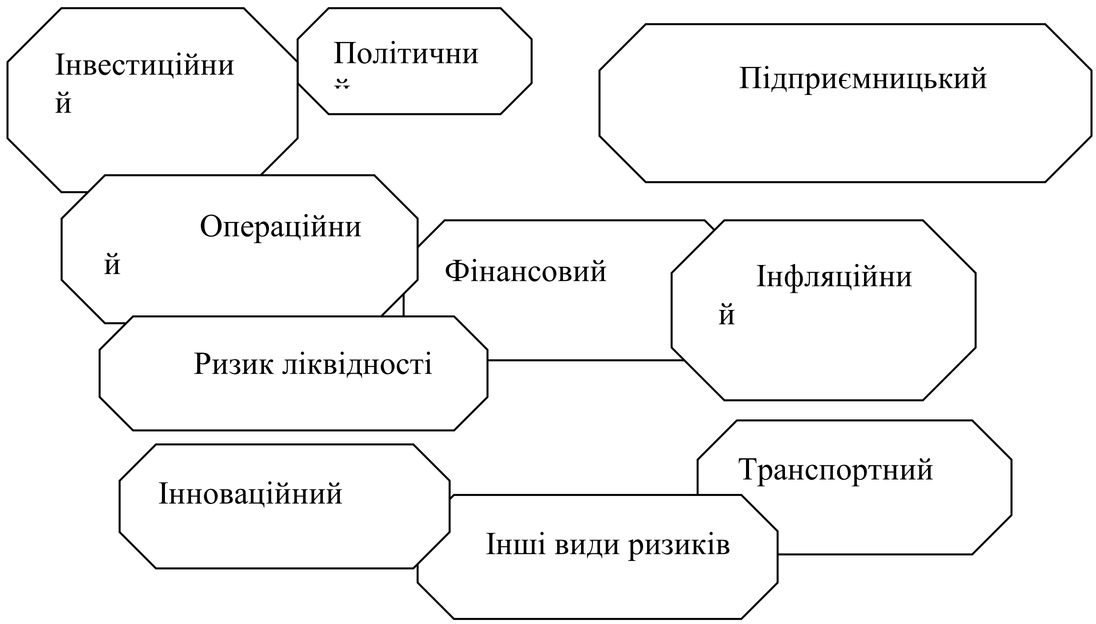



***Рис. 1.7.*** Види економічного ризику

Наприклад, ризик реального інвестування охоплює ризик несвоєчасної підготовки інвестиційного проекту, ризик несвоєчасного закінчення будівництва, ризик несвоєчасного фінансування проекту та інші.

Кредитний ризик може входити і у банківській ризик, і в інвестиційний ризик, і в інші види ризиків.

Фінансові ризики та ризики менеджменту перетинаються.

Для управління ризиками потрібно, в першу чергу, навчитися їх визначати. При цьому необхідно визначати як джерело ризику, так і його природу, походження (фактори ризику). Хоча всі ризики і не можливо урахувати, але реальним є виявлення головних за їх впливом на результати діяльності підприємства.

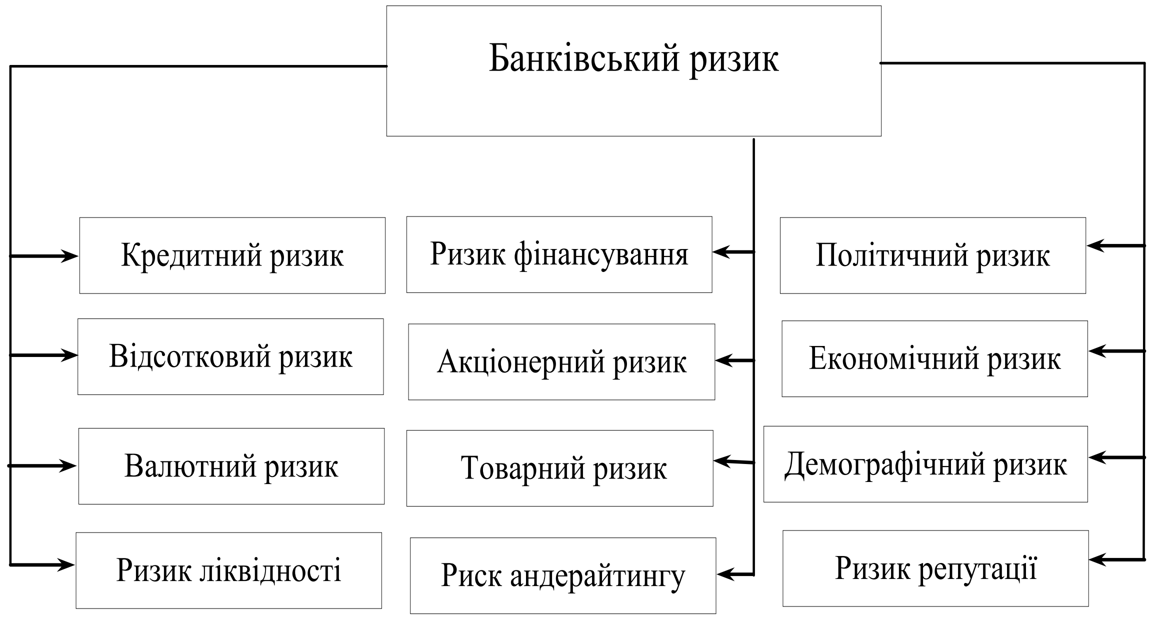
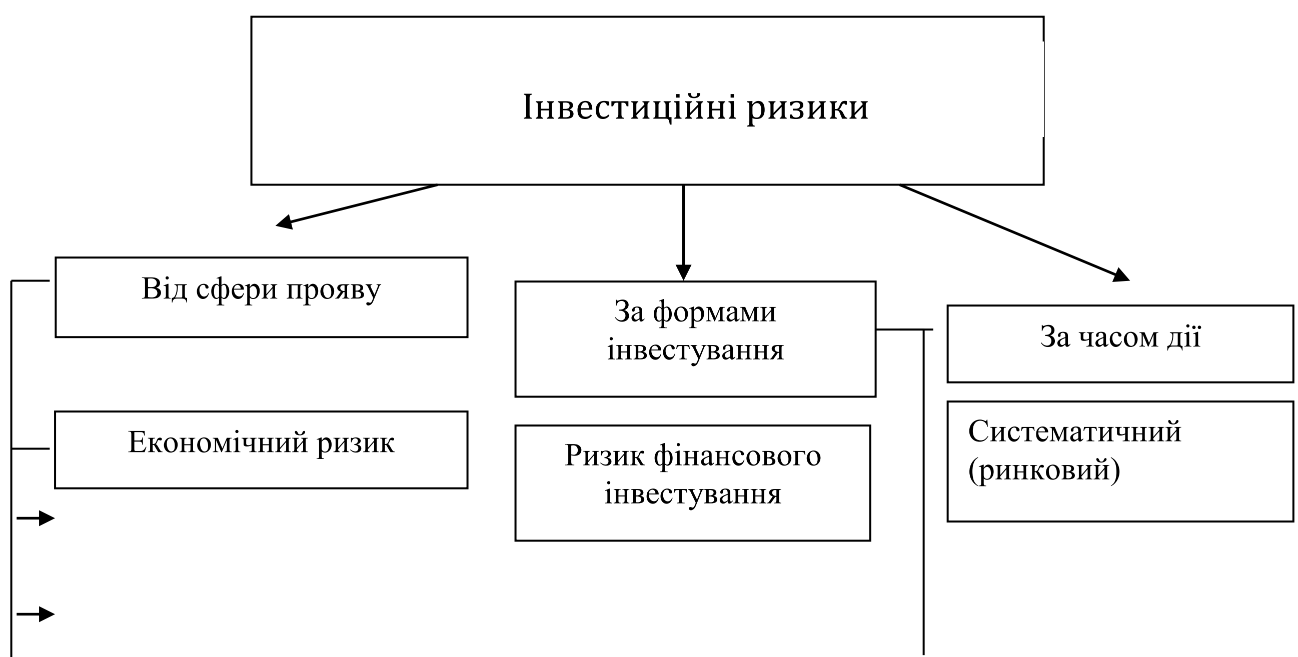



***Рис. 1.8.*** Види банківського ризику

У кожного підприємства повинен бути профільній портфель (набір) ризиків, у якому ці ризики проранжовані за їх величиною. Після включення якогось ризику в профільний портфель, потрібно визначити події, які і складають даний ризик.

Наприклад, операційний ризик можуть складати такі події, як помилки у програмному забезпеченні комп'ютерів або зараження їх вірусом, нечесність співробітника або його помилки в роботі, хвороба або звільнення ключового спеціаліста та інші.



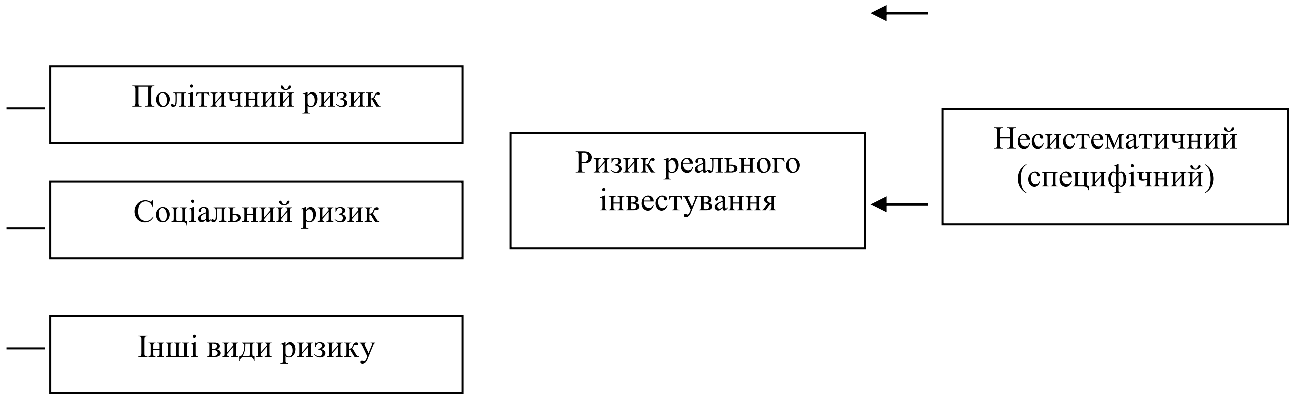



***Рис. 1.9.*** Взаємозв'язки інвестиційного ризику

## 1.7. Взаємозв'язок між економічними категоріями вартість, час, ризик та інформація

Спочатку було слово…
*Біблія. Від Іоанна*

Знання – сила.
Час – гроші.
Хто не ризикує, той ризикує всім.
Свої борги плати пізніше, а чужі збирай раніше.
*Народна мудрість*

Головними економічними категоріями економіки є ***інформація*** **(**information**)**, ***вартість*** **(**cost**)**, ***час*** **(**time**)** та ***ризик*** **(**risk**)** (*рис. 1.10*).

Хоча категорія «інформація» є центральною і відноситься до найважливішого ресурсу розвитку будь-якої системи, дати її точне визначення, а тим більше кількісну оцінку, неможливо. Ентропійний підхід Хартлі і Шеннона, який використовується в техніці, в даній ситуації застосувати неможливо. Тому далі будемо застосовувати якісне поняття інформації, яке повинно оцінювати як саме повідомлення, так і поведінку особи під час отримання цього повідомлення.

Також немає однозначної кількісної характеристики і для категорії «ризик».

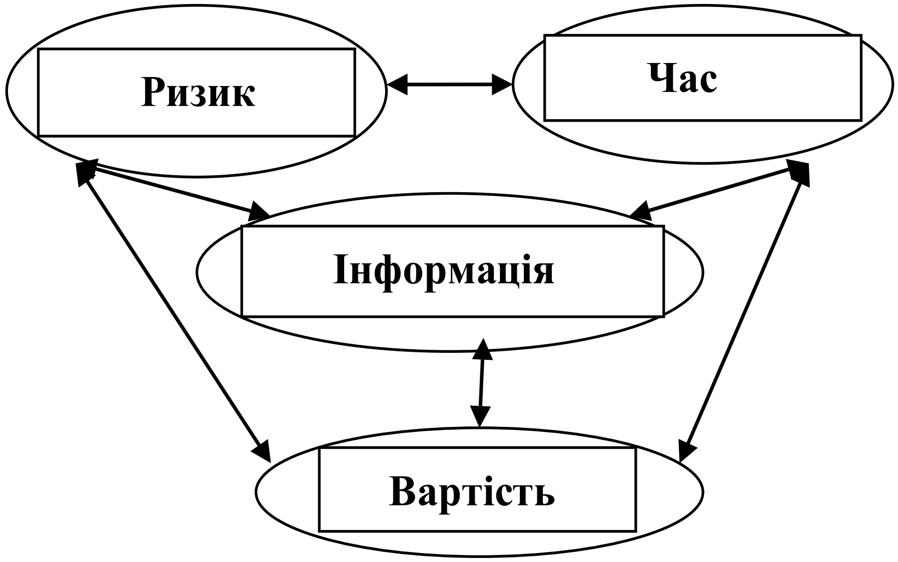



***Рис. 1.10.*** Взаємозв'язок між інформацією, вартістю, часом та ризиком

Розглянемо взаємозв'язки між цими основними економічними категоріями. В теорії прийняття рішень відома аксіома, яка показує взаємозв'язок між часом та вартістю: *з двох рішень, які дають однаковий прибуток, вибирають те, що забезпечує його найбільш швидке отримання*.

Ця аксіома ґрунтується на тому, що вартість грошей змінюється в часі за рахунок існування на фінансовому ринку відповідної норми доходності інвестицій (відсоткової ставки).

Взаємозв'язок між часом та вартістю визначає і принцип своєчасності прийняття рішень: *своєчасне рішення приносить максимальний результат, а відставання або випередження може суттєво погіршити результат.* Цей взаємозв'язок особливо проявляється в кризу.

Друга аксіома визначає взаємозв'язок між вартістю та ризиком: *чим більший прибуток може дати фінансова операція, тим більший її ризик.*

Відповідно до цієї аксіоми інвестори визначають ставку дисконтування шляхом додавання до безризикованої відсоткової ставки $i_0$ премії за ризик $i_r$:

$$i = i_0 + i_r, \qquad (1.21)$$

$$i_r = i_{інф.} + i_{інф.r} + i_{інв.r},$$

де $i_{інф.}$ – інфляційна премія; $i_{інф.r}$ – премія за інфляційний ризик; $i_{інв.r}$ – премія за ризик інвестиційного проекту.

Взаємозв'язок між вартістю та ризиком визначає *принцип усвідомленої необхідності у прийнятті ризику*.

Яку величину ризику вважати мінімальною, малою, середньою, високою, або критичною, залежить не тільки від можливих втрат *P*, які відбуваються при реалізації ризику, але і від особистих ресурсів ОПР (його особистого капіталу *K*).

Тому кількісна міра ризику *R* є суб'єктивною величиною, яка може визначатися наступним чином:

$$R = \frac{P}{K}. \qquad (1.24)$$

Експертна детермінована шкала чотирьох зон ризику приведена у *таблиці 1.1*.

*Таблиця 1.1.*

ШКАЛА ЗОН РИЗИКУ

| **Лінгвістична оцінка ризику (градації ризику)** | **Значення коефіцієнту ризику *R*** |
|---|---|
| Мінімальний ризик | 0 – 0,1 |
| Допустимий ризик | 0,1 – 0,3 |
| Високий ризик | 0,3 – 0,6 |
| Недопустимий ризик | 0,6 – 1 |

**Приклад. 1.10.** Оцінити ризик підприємця, який збирається інвестувати 100 000 грн, коли можливі втрати при реалізації проекту можуть скласти 20 000 грн.

***Розв’язання.*** Відповідно до (1.24) отримуємо коефіцієнт ризику $R = 0{,}2$, що відповідає зоні «допустимий ризик».

Якщо величина ризику $R$ визначена і не перевищує допустимий рівень $R_{доп.}$, рішення приймається. Для особи, яка приймає рішення (ОПР) і має великий капітал, як слідує з (1.22), ризик для конкретної фінансової операції може бути мінімальним, а для ОПР з суттєво меншим власним капіталом відповідний ризик може бути високим або критичним. Тому рішення, які приносять дуже високі прибутки, приймаються ОПР з великими капіталами і це призводить до ще більшого їх зростання. Це і є головною причиною концентрації капіталу в ринковій економіці.

Іншими словами, можливості для збільшення капіталу завжди більші у тих, у кого він більший, і тому більш багаті становляться при рівних умовах ще багатішими.

У світі відбувається неперервний процес капіталізації та концентрації капіталу. Кількісною характеристикою концентрації капіталу є відсоток капіталу від загального капіталу (бюджету країни; ВВП), який належить найбільш багатим (наприклад, першій сотні багатіїв). Ця концентрація відбувається і у глобальному масштабі: все більшим стає прірва між різними групами країн. Сам процес глобалізації економік прискорює цей процес.

Третя аксіома визначає взаємозв’язок між часом та ризиком: *більш тривалій фінансовій операції при рівних умовах відповідає більш високий ризик*. Ця аксіома ґрунтується на тому, що чим більший інвестиційний горизонт, тим більша невизначеність результатів інвестицій, а отже, відповідно, і ризик. Але той, у кого великий капітал, може реалізувати інвестиційні проекти швидше, з меншим терміном окупності і, відповідно, з меншим ризиком і більшим прибутком.

Взаємозв'язок між інформацією та ризиком витікає з того, що невизначеність інформації і є головною причиною ризику: «знав би, де упаду, – соломку підстелив би».

Взаємозв'язок між інформацією та вартістю також очевидний: застосування інформації про можливі дії конкурентів, про стан ринків, можливі ризики тощо дозволяє приймати більш ефективні рішення та отримувати більшу доходність активів. З іншого боку, отримання інформації потребує грошових та інших ресурсів (за інформацію доводиться платити). Таким чином, інформація стає товаром. Тому поширюються такі явища, як промисловий шпіонаж і, відповідно, зростає роль інформаційної безпеки, на яку також потрібно витрачати гроші.

Взаємозв'язок між інформацією та часом пояснюється хоча б тим, що, з одного боку, для отримання більшої кількості інформації, необхідної для прийняття рішень, потрібні більші витрати часу. З іншого – маючи необхідну інформацію, особа, яка приймає рішення (ОПР), швидше приймає та реалізує відповідне рішення. У фізиці взаємозв'язок між інформацією та часом випливає з принципу невизначеності Гейзенберга.

Таким чином, відповідно до аксіом, які наведені вище, для будь-яких економічних рішень взаємозв'язок між ризиком ($R$), вартістю ($C$), часом ($T$) та необхідною інформацією ($I$) можна виразити наступною якісною формулою:

$$\text{\textit{Ризик}}\ (R) = \text{\textit{Вартість}}\ (C) + \text{\textit{Час}}\ (T) - \text{\textit{Інформація}}\ (I) \qquad (1.25)$$

При цьому ризик $R$ є величиною невизначеності, яка пов'язана з усіма складовими формули (1.25).

Отримати відповідну кількісну econометричну формулу, яка пов'язує $I$, $R$, $T$ та $C$, неможливо за наступних причин: для різних типів проектів коефіцієнти регресійної моделі повинні бути різними; через відсутність необхідних однорідних та репрезентативних статистичних даних; через мультиколінеарність (міцну кореляцію) між окремими екзогенними змінними рівняння (1.25); сама природа процесів, які визначають ці змінні, не є стохастичною. При мультиколінеарності коефіцієнти регресійного рівняння не є стабільними і, відповідно, сама регресійна модель буде мало придатною для використання.

Якісна формула (1.25) визначає всі аксіоми та принципи прийняття рішень, які наведені вище. З цієї формули визначимо центральний принцип прийняття економічних рішень, який, як і всі центральні принципи, повинен бути принципом оптимальності: при прийнятті економічних рішень вибирається те, яке при допустимому ризику і за мінімально можливий час забезпечує максимум результату (вартості $C$) при необхідній для прийняття рішення інформації $I$, яку можна отримати тими чи іншими способами:

$$\max C = I + R - T. \tag{1.26}$$

При задовільній вартості $C$, яку можливо отримати за час $T$, маючи необхідну інформацію $I$, приймається рішення, що мінімізує ризик:

$$\min R = C + T - I. \tag{1.27}$$

З принципу оптимальності випливає, що підприємець завжди хоче збільшити свій капітал, а це призводить до взаємодії капіталів і в подальшому - до його концентрації.

Концентрація капіталів відбувається на різних рівнях: на рівні банківського капіталу; на рівні капіталу реальних секторів економіки; на рівні заробітних плат (зарплата топ-менеджерів, елітних юристів, докторів, спортсменів, кінозірок збільшується зростаючими темпами в порівнянні з середніми зарплатами); на рівні пенсійного забезпечення (пенсії «державних» осіб і середня пенсія в Україні вже відрізняються в десятки разів); на державному рівні (зростає розрив між багатими та бідними державами та зменшується кількість багатих держав). Сам процес глобалізації економік прискорює цей процес.

Нещодавно вчені Швейцарії, проаналізувавши світові фінансові потоки близько 37 млн компаній, виявили, що 1318 транснаціональних компаній (0,0035% від усіх, які аналізувалися) контролюють 60% усього світового доходу, а 147 компаній – 40% доходу. Крім того, 1% людей контролює більше 50% всього капіталу.

Американський ринок акцій за капіталізацією перевищує ринки Великобританії, Німеччини та Японії разом узяті.

Загальний капітал не змінюється. І якщо в одному місці капітал зменшується, то в іншому він зростає. Борги деяких держав складають сотні млрд доларів (самий великий за абсолютною величиною боржник – це США, у якого цей борг складає 16 трильйонів доларів). Виникає запитання, хто ж тоді ці багаті кредитори, які сконцентрували такі капітали?

Злиття та поглинання банків, створення банківських картелів, консорціумів, холдинг-компаній відбувається в усьому світі. Більші капітали притягують менші все з більшою силою: гроші роблять гроші. Цей процес є прискореним. До складу сучасних холдингів входять вже різні не банківські компанії (інвестиційні, страхові та інші). В США більш ніж 90% активів банківської сфери знаходяться під контролем холдингових компаній [5].

Концентрація капіталу - це об’єктивний та життєво необхідний для економічної системи процес. Коли величина капіталу невелика, але і не дуже мала, економіка розвівається позитивно. Але коли обсяг капіталу переходить критичну величину $\rho_{\text{крит}}$, то це призводить до кризи і навіть до революцій, зміни системи, соціально-політичних катастроф, світового колапсу. Це відбувається в силу дії ***системного закону*: *кожна система має границі свого росту, при переході через які вона становиться некерованою і повинна або змінитися, або зламатися.*** Фізичною аналогією цього процесу є атомний вибух, який виникає, коли ядерна маса досягає критичної величини, або термоядерний вибух, який відбувається при досягненні критичної температури ядерної маси.

У розвинутих країнах концентрація капіталу довгий час супроводжувалася кредитною «накачкою» попиту, коли більшість людей жила в кредит. Зараз йде процес «руйнування» середнього класу, який в цих країнах складає не менше половини населення і який стане руйнуючою силою існуючої економічної системи.

Основною причиною фінансових криз, які призводять до економічних криз, є великий ступінь концентрації капіталу, що в часи кризи тільки збільшується. Таким чином фінансова безпека на державних та глобальних рівнях безпосередньо залежить від рівня концентрації капіталу.

Тривалість (період) $T$ економічного циклу (інтервалу часу між економічними кризами) не є постійною як у циклах виробництва і цін С.-С. Кузнеця ($T = 22$ роки), або довгих хвилях Н.Д. Кондратьєва тривалістю 50-60 років. Сам Н.Д. Кондратьєв говорив, що: «Кожний новий цикл протікає у нових конкретно-історичних умовах, на новому рівні розвитку виробничих сил і тому зовсім не є простим повторенням попереднього циклу». Так як кожному стану середовища відповідає свій критичний коефіцієнт концентрації капіталу, при якому починається криза, то тривалість $T$ економічних циклів не є постійною [5].

При цьому зростання $\rho_{\text{крит.}}$, призводить до зменшення інтервалу економічного циклу (зворотня залежність), а потужність кризи прямо пропорційна четвертому ступеню коефіцієнта концентрації капіталу $\rho_{\text{крит.}}$ [5]. Зміною економічного середовища – зменшенням швидкості концентрації капіталу, можна збільшити період економічного циклу. Ідеальним було б не допущення концентрації капіталу до критичних значень, при яких і починаються кризи.

Цікавим фактом протікання сучасних криз є те, що в період криз ступінь концентрації капіталу не зменшується, а, навпаки, збільшується, а це призведе до того, що нова кризова хвиля прийде ще швидше, а її потужність буде ще більшою.

Відмітимо також, що діє і аналогічний закон взаємодії влад – перетягування владних повноважень. Будь-яка влада хоче збільшити власні повноваження (концентрує владу), збільшує адміністративний ресурс, збільшує кількість адептів і т.д. Більш того, ці два процеси концентрації капіталу і концентрації влади сприяють і процесу концентрації засобів масової інформації.

Все це за деякий відрізок часу може призвести до диктатури влади. Концентрація капіталу конвертується в концентрацію влади і навпаки. Ці процеси взаємопов'язані. При цьому у недемократичних державах концентрація капіталу пов'язана з тіньовим капіталом, величина якого може бути більше 50%, а в «демократичних» державах такою величиною вже становиться тіньова влада.

Як і при процесі концентрації капіталу, процес концентрації влади спочатку дає позитивні результати, але при переході певної межі починається негативний процес, який призводить до революцій. Знову діє системний закон оптимальності розмірів системи. Не дивлячись на світовий багаторічний дослід, диктатори концентрують владу, розраховуючи утримати її до кінця свого життя. Це вдається одиницям.

Загальні способи послаблення процесу централізації влади, обмеження величини цієї концентрації аналогічні процесу декапіталізації: обмеження термінів влади, прийняття та реалізація системи демократичних законів. Як аксіому потрібно прийняти твердження, що демократичною є тільки та держава, голова якої не може бути обрана більш ніж на два терміни та не є власником великого капіталу (олігархом). У майбутньому цю норму потрібно перенести і для інших посадових осіб: міністрів, депутатів і керівників судів.

Більш того, ці два процеси концентрації капіталу і концентрації влади сприяють і процесу концентрації засобів масової інформації. Тому потрібно одночасно вживати заходів з обмеження величини всіх видів концентрації: капіталу, влади, різних монополій, у тому числі на засоби масової інформації.

Зміна моральних принципів, духовного світу людини також змінює швидкість процесу концентрації капіталу. Слова «пристрасть», «жадібність», які раніше несли в собі негативний зміст, поступово еволюціонували в терміни «інтерес» та «користь» і відповідають прагненню «робити гроші будь-якою ціною». Вони стали еквівалентом узагальнюючого інтересу, що є протиприродною формою поведінки людини, яка керується жадобою багатства і влади, егоїзмом [5].

Таким чином, суттєво змінити швидкість протікання процесу концентрації капіталу вже неможливо тільки зміною економічного середовища без зміни самої людини.

Хоча людина завжди згодна ризикувати в обмін на відповідну винагороду, що є одним із принципів фінансової теорії, але не для всіх винагорода обов'язково повинна бути грошовою, матеріальною. Іноді людина може свідомо приймати ірраціональне рішення, яке погіршує її економічний стан, але при цьому задовольняє потреби самореалізації (наприклад, людина відмовляється від роботи з високою зарплатою і вибирає з меншою зарплатою, але більш творчу) .

Пояснення криз тільки одним об'єктивним явищем (концентрацією капіталу в великому обсязі) не суперечить системному аналізу і відповідає принципу «бритви Оками»: пояснення будь якого явища тим ближче до істинного, чим на меншій кількості гіпотез воно ґрунтується і чим більш широке коло явищ ґрунтується на цих гіпотезах.

Таким чином, взаємодія між капіталами є об’єктивним процесом, який призводить до його концентрації. Перевищення ступеня концентрації критичного значення є головною об’єктивною причиною фінансових і, як наслідок, економічних криз.

Суттєво змінити швидкість протікання процесу концентрації капіталу вже неможливо тільки зміною економічного середовища без зміни самої людини.

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ З ТЕМИ 1

**1.** Що таке відсотки?

**2.** Що таке відсоткова ставка? В чому полягає різниця відсоткових ставок нарощення $i$ та облікових ставок $d$ ?

**3.** Що таке дисконт?

**4.** Чому формула для дисконту співпадає з формулою для відсотків?

**5.** Які існують види дисконтування?

**6.** Які відсотки називаються простими?

**7.** Які відсотки називаються складними?

**8.** Які відсотки називаються антисипативними?

**9.** Які відсотки називаються декурсивними?

**10.** Яка відсоткова ставка застосовується при розрахуванні антисипативних відсотків?

**11.** Яка відсоткова ставка застосовується при розрахуванні рекурсивних відсотків?

**12.** Яка відсоткова ставка застосовується при математичному дисконтуванні?

**13.** Яка відсоткова ставка застосовується при комерційному (банківському) обліку?

**14.** Як порівняти різні суми грошей, які взяті в різні часи?

**15.** За якою формулою розраховується індекс цін?

**16.** За якою формулою розраховується темп інфляції?

**17.** За якою формулою розраховується індекс купівельної спроможності?

**18.** Як розраховується індекс цін за весь період, коли відомі індекси цін за окремі періоди, з яких складається великий період?

**19.** Як розраховується темп інфляції цін за весь період, коли відомі темпи інфляції за окремі періоди, з яких складається великий період?

**20.** Коли фактична інфляція менше тієї, яка очікувалася, хто виграє: кредитори чи боржники?

**21.** Назвати чотири основні економічні категорії, які характеризують фінансові операції.

**22.** Що таке ризик?

**23.** Який зв'язок між вартістю та часом?

**24.** Який зв'язок між вартістю та ризиком?

**25.** Який зв'язок між ризиком та часом?

**26.** Який зв'язок між інформацією та ризиком?

**27.** Який зв'язок між інформацію та часом?

**28.** Який зв'язок між інформацію та вартістю?

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ З ТЕМИ 1

**1.** Обчислити суму, яку клієнт має повернути банку через рік, якщо він отримав кредит 20 000 грн під відсоткову ставку нарощення 0,2 річних. Чому дорівнює величина дисконту клієнта та відсотки банка?

**2.** Обчислити суму, яку клієнт має повернути банку через рік, якщо він отримав кредит 100 000 грн під облікову ставку 0,15 річних. Чому дорівнюють відсотки банка та величина дисконту клієнта?

**3.** Обчислити суму кредиту, яку клієнт взяв у банку на рік, якщо через рік він повернув банку 40 000 грн. Кредит брався під відсоткову ставку нарощення 0,1 річних. Чому дорівнюють відсотки банка?

**4.** Обчислити суму кредиту, яку клієнт взяв у банку, якщо через рік він повернув банку 100 000 грн. Кредит брався під облікову ставку 0,2 річних. Чому дорівнює величина дисконту клієнта?

**5.** Знайти річну відсоткову ставку нарощення для наступної фінансової операції: клієнт взяв у банку кредит 100 000 грн і через рік повернув банку 120 000 грн. Чому дорівнюють відсотки банка?

**6.** Знайти річну облікову ставку для наступної фінансової операції: клієнт взяв у банку кредит 100 000 грн, а через рік повернув банку 120 000 грн. Чому дорівнюють відсотки банка та дисконт клієнта?

**7.** Державна облігація облікована за рік до погашення. Яка сума погашення по облігації, якщо дисконт за цей рік складає 1000 грн, а облікова ставка дорівнює 20%?

**8.** Вексель, який має номінальну вартість $S$ = 20 тис. грн, облікований у банку за рік до його погашення по обліковій ставці $d$ = 0,3 річних. Знайти, яку суму $P$ отримує власник векселя? Чому дорівнює його дисконт $D$?

**9.** Темпи інфляції за кожний квартал року склали: $h_1$ = 5%; $h_2$ = 8%; $h_3$ = 2%; $h_4$ = 5%. Знайти темп інфляції за рік.

**10.** Індекси цін за кожний квартал року склали: $i_1$ = 1,5; $i_2$ = 1,1; $i_3$= 1,05; $i_4$ = 1,4. Знайти темп інфляції за рік.

**11.** Номінальна відсоткова ставка $i$ = 12%. Темп інфляції за рік склав $H$ = 5%; Знайти реальну відсоткову ставку $i_p$.

**12.** Ймовірність неповернення позичальником суми позики $p = 0,05$, а безризикова відсоткова ставка $i_0 = 0,25$. Якою повинна бути реальна відсоткова ставка, яка враховує ризик неповернення боргу, та чому дорівнює премія за ризик?

**13.** Оцінити ризик підприємця (знайти коефіцієнт ризику), який збирається інвестувати 150 000 грн, якщо втрати при реалізації проекту можуть скласти 30 000 грн. Якій зоні відповідає цей ризик?

**14.** За перше півріччя очікується темп інфляції $h_1 =$ 5%, а за наступне – $h_2 =$ 10%. Якою повинна бути мінімальна річна відсоткова ставка $i$ на депозити, щоб клієнт отримав реальну доходність $i_p =$ 20% ?

# Тема 2. ПРОСТІ ВІДСОТКИ

## 2.1. Нарощення за простими відсотковими ставками

Однією з основних фінансових операцій є кредитна угода. До кредитних угод належать: відкриття депозитного рахунку в банку, видача банком кредиту, облік векселя, продаж товарів у кредит, купівля облігації та ін. Умови кредитної угоди визначаються у фінансовому контракті (договорі), який є її юридичним забезпеченням.

Проста кредитна угода являє собою разову видачу кредиту (боргу, позики), що погашається одним платежем через точно визначений термін.

Відсоткові гроші можуть сплачуватися кредитору при їх нарахуванні в кожному періоді або приєднуватися до основної суми боргу при закінченні угоди. В останньому випадку говорять про *нарощену суму*, тобто ***нарощена сума*** – це основна сума боргу плюс відсоткові гроші.

Нарощування за простими відсотками, як правило, здійснюється при видачі короткострокових позик (термін позики до одного року) або у випадках, коли відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично виплачуються.

Для встановлення формули, що дозволяє описати просту кредитну угоду за простими відсотками, введемо позначення:

$P$ – сума кредиту (основна сума боргу);

$S$ – нарощена сума, тобто сума боргу наприкінці угоди;

$I$ – плата за кредит, тобто сума відсоткових грошей за період угоди;

$n$ – термін кредитної угоди в роках;

$i$ – проста нормована відсоткова ставка угоди, яку ще називають базовою річною ставкою.

Враховуючи наведені вище позначення, сума боргу на момент закінчення угоди (нарощена сума) обчислюється за формулою

$$S = P + I\,. \tag{2.1}$$

У свою чергу, відсоткові гроші за число періодів нарахування відсотків, що дорівнює $n$ років, при застосуванні простих відсотків, становлять

$$I = Pin\,. \tag{2.2}$$

Враховуючи (2.2), формула (2.1) набирає вигляду

$$S = P(1 + in)\,. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) називається формулою нарощення за простими відсотками, а множник $(1 + in)$ – множником нарощення простих відсотків. Він показує, у скільки разів нарощена сума більша за початкову суму боргу.

***Примітка*:** у фінансовому аналізі відсоткова ставка є відносним показником *доходності* (*прибутковості*) проведеної операції, тому за допомогою відсоткових ставок можна оцінювати ефективність фінансових операцій.

**Приклад 2.1.** Визначити відсоткову суму і нарощену суму боргу, якщо позика дорівнює 800 тис. грн, термін позики - 5 років, відсоткова ставка – 15% річних за простими відсотками.

***Розв'язання*.** Згідно з формулою (2.2) знаходимо розмір відсотків: $I = 800 \cdot 0{,}15 \cdot 5 = 600$ тис. грн. Звідси, використовуючи формулу (2.1), нарощена сума дорівнює: $S$ = 800 тис. + 600 тис. = 1 400 тис. грн.

## 2.2. Методи розрахунку відсотків для короткострокових операцій. Змінні ставки

Якщо час кредиту менший від базового періоду, то кредитору виплачується частина відсотків від тієї суми, яка нараховувалася за базовий період.

На практиці, як правило, базовим періодом відсоткової ставки є рік. В загальному випадку число періодів нарахування відсотків $n$ буде дробовим числом:

$$n = \frac{t}{K}, \qquad (2.4)$$

де $t$ – кількість днів позики; $K$ – часова база нарахувань (кількість днів у році).

Враховуючи (2.4), формула (2.3) набирає вигляду

$$S = P\left(1 + i\frac{t}{K}\right). \qquad (2.5)$$

Залежно від способу вибору $t$ і $K$ існують три методи розрахунків нарощених сум за простою відсотковою ставкою.

**Метод 1.** Якщо $K$ = 365 (або у високосний рік 366) днів і у терміні позики вираховується точна кількість днів, тоді говорять про *точні відсотки* з *точним числом днів* кредиту. Даний метод дає найточніші результати, в комерційних документах він позначається як АСТ/АСТ або 365/365, інколи його ще називають англійським методом нарахування відсотків.

Для визначення точної кількості днів позики підраховують усі дні від дати видачі кредиту до дати його погашення, причому день видачі і день погашення позики вважають за один день. Точну кількість днів $t$ можна визначити за таблицею, яка є в *додатку 3*. Для цього потрібно від номера дня закінчення терміну позики відняти номер дня видачі позики.

**Метод 2.** Якщо $K = 360$ днів, при цьому вважають, що рік становить 12 місяців по 30 днів кожний: $360 = 12 \times 30$, а кількість днів позики $t$ підраховується точно, то говорять про *звичайні відсотки* з *точним числом днів* кредиту. Даний метод на практиці використовують найбільш часто. Порівняно з попереднім методом він дає більшу нарощену суму. Називають цей метод нарахувань французьким, або банківським правилом. В комерційних документах він позначається як АСТ/360 або 365/360.

**Метод 3.** Якщо $K = 360$ днів, а кількість днів позики $t$ підраховується наближено, то говорять про *звичайні відсотки* з *наближеним числом днів* кредиту. Цей метод позначають 360/360, називають німецьким і використовують тоді, коли не вимагається великої точності, наприклад у проміжних розрахунках (при частковому погашенні позики).

Для визначення наближеного числа днів кредиту підраховують кількість повних місяців у терміні кредиту (при цьому вважають, що кожен місяць становить 30 днів), а потім до отриманого результату додають число днів неповного місяця.

**Приклад 2.2.** Банк видав 25 лютого позику 30 000 грн. Термін повернення - 12 червня. Відсоткова ставка – 30% річних. Рік високосний. Підрахувати нарощену суму (суму боргу) трьома методами.

***Розв'язання*.** За *додатком 3* знаходимо: на період 12.06 від початку року маємо 164 дні; на період 25.02 – 56 днів. Звідси точна кількість днів угоди $t = 164 - 56 = 108$ днів. Наближена кількість днів угоди обчислюється наступним чином: $t = 6$ днів (лютий) + $30 \times 3$ (березень, квітень, травень) + 12 днів (червень) = 107 днів.

Звідси маємо:

1) $K = 366$ днів, $t = 108$ днів; $S = 30\,000\left(1 + 0{,}3 \cdot \frac{108}{366}\right)$ = 32 655, 74 грн;

2) $K$ = 360 днів, $t$ = 108 днів; $S = 30\,000\left(1+0,3\cdot\frac{108}{360}\right)$ = 32 700 грн;

3) $K$ = 360 днів, $t$ = 107 днів; $S = 30\,000\left(1+0,3\cdot\frac{107}{360}\right)$ = 32 675 грн.

Отже, отримали різні фінансові результати угоди залежно від вибору часової бази року і методу розрахунку $t$.

Відмітимо, що застосування точних відсотків з наближеним числом днів кредиту не має сенсу.

**Приклад 2.3.** Яка річна відсоткова ставка вкладу 510 тис. грн, якщо він зріс з 05.02.2016 по 07.06.2016 (АСТ/АСТ) на таку ж величину, як і капітал 600 тис. грн, вкладений на 3 місяці (360/360) під 17% річних?

***Розв'язання.*** Для першого вкладу маємо: $P_1$ = 510 000 грн, точне число днів: $t_1$ = 122 днів (визначаємо за *додатком 3*), часова база нарахувань $K$ = 366 днів, термін угоди $n_1 = \frac{122}{366} = \frac{1}{3}$; річна відсоткова ставка $i_1$ – невідома.

Отже, величину, на яку зросте початковий капітал $P_1$, визначає величина відсоткових грошей $I_1$, що для першого вкладу (згідно з формулою (2.2)) становить

$$I_1 = P_1 \cdot i_1 \cdot n_1 = 510\ 000 \cdot \frac{1}{3} \cdot i_1 = 170\ 000\ i_1 \text{ грн.}$$

Для другого вкладу маємо: $P_2$ = 600 000 грн, наближене число днів: $t_2 = 3\times 30 = 90$ днів, часова база нарахувань $K$ = 360 днів, термін угоди: $n_2 = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$; річна відсоткова ставка $i_2$ = 0,17. Прибуток для другого вкладу

$$I_2 = P_2 \cdot i_2 \cdot n_2 = 600\ 000 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,17 = 25\ 500 \text{ грн.}$$

За умовою задачі $I_1 = I_2$ тому, прирівнявши вирази для прибутків, отримаємо рівняння

$$170\ 000\ i_1 = 25\ 500 \text{ грн.}$$

Звідси знаходимо, що $i_1$ = 0,15 (15%).

У попередніх задачах при знаходженні тих чи інших параметрів кредитних угод використовувалися постійні відсоткові ставки, але в кредитних угодах інколи передбачають відсоткові ставки, які змінюються з часом. Якщо це прості ставки, то нарощена сума на кінець терміну кредитної угоди визначається за формулою

$$S = P(1 + i_1 n_1 + i_2 n_2 + \ldots + i_m n_m), \qquad (2.6)$$

де $P$ – основна сума боргу;

$i_1, i_2, ..., i_m$ – ставки простих відсотків за відповідні періоди;

$n_1, n_2, ..., n_m$ – тривалість відповідних періодів з відповідно постійними ставками $i_1, i_2, ..., i_m$, ($n = n_1 + n_2 + ... + n_m$).

**Приклад 2.4.** Банк пропонує такі умови по термінових депозитах: перший квартал – 40% річних, кожний наступний квартал ставка зростає на 5%. Відсотки прості. Знайти нарощену за рік суму, якщо початковий вклад - 1 000 гривень.

***Розв'язання.*** Враховуючи, що $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \frac{4}{12} = 0,25$, і, використовуючи формулу (2.6), знаходимо:

$$S = 1\ 000 \cdot (1 + 0,4 \cdot 0,25 + 0,45 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,25 + 0,55 \cdot 0,25) = 1\ 475 \text{ грн.}$$

## 2.3. Нарахування відсотків при зміні депозиту в часі. Споживчий кредит

Якщо сума, на яку нараховуються відсотки, змінюється в часі (наприклад, змінюється розмір вкладу на депозитному рахунку при періодичному його поповненні або знятті грошей), то відсоткові гроші нараховуються за формулою

$$I = \sum_j R_j \, n_j \, i, \tag{2.7}$$

де $R_j$ – залишок грошей на рахунку в момент часу $j$ після чергової зміни рахунку;

$n_j$ – термін зберігання грошей (в роках) до нової зміни рахунку;

$i$ – базова (річна) відсоткова ставка, яка вимірюється у коефіцієнтному вигляді.

Припустимо, що інтервали між моментами нарахування вимірюються в днях, а відсоткову ставку виразимо у відсотках, а не в коефіцієнтному вигляді. Враховуючи (2.7), отримаємо

$$I = \frac{\sum_j R_j \, t_j}{100} \div \frac{K}{i} \tag{2.8}$$

де $t_j$ – проміжок часу між нарахуваннями (вимірюється в днях);

$K$ – часова база нарахувань (кількість днів у році);

$i$ – базова відсоткова ставка, яка вимірюється у відсотках (%).

Величину $\dfrac{\sum_j R_j \, t_j}{100}$ називають відсотковим числом, а дільник $\dfrac{K}{i}$ – відсотковим (або постійним) дільником.

**Приклад 2.5.** Переміщення грошей на рахунку характеризується такими даними: 05.02.2017 р. надійшло 12 млн грн, 10.07.2017 р. знято 4 млн грн, 20.10.2017 р. надійшло 8 млн грн. Знайти суму на рахунку наприкінці року. Відсоткова ставка – 18% річних.

***Розв'язання.*** Для того щоб з'ясувати, яка сума буде на рахунку наприкінці року, необхідно знайти залишок $R_j$ на рахунку на 31.12.2017 р. і суму відсоткових грошей $I$ за весь термін угоди (від 05.02 до 31.12. 2017 р.). Оскільки сума, на яку нараховуються відсотки, змінюється в часі, для розрахунку $I$ скористаємося (2.8).

Враховуючи, що рік невисокосний і $K = 365$, відсотковий дільник становить: $365 \div 18 = 20{,}27778$. Розрахунок суми відсоткових чисел наведено в *таблиці 2.1*:

*Таблиця 2.1*

| **Дата** | **Переміщення грошей** | **Залишок, $R_j$** | **Термін, $t_j$** | **Відсоткове число** |
|---|---|---|---|---|
| 05.02.2017 | 12 | 12 | 155 | 18,6 |
| 10.07.2017 | −4 | 8 | 102 | 8,16 |
| 20.10.2017 | 8 | 16 | 72 | 11,52 |
| 31.12.2017 | – | 16 | – | – |

Відсоткове число за весь термін угоди дорівнює $18{,}6 + 8{,}16 + 11{,}52 = 38{,}28$. Звідси сума відсоткових грошей за період з 05.02.2017 р. по 31.12.2017 р. дорівнює $I = \frac{38{,}28}{20{,}27778} = 1{,}888$ млн грн. Отже, сума на рахунку на кінець року становить

$$S = 16 \text{ млн грн} + 1{,}888 \text{ млн грн} = 17{,}888 \text{ млн грн.}$$

***Споживчий кредит*** – один з найбільш поширених способів кредитування населення. Банки і підприємства надають споживчий кредит для стимулювання попиту на товари, які населення не могло б купити тільки на зарплату.

Відсотки у споживчому кредиті нараховуються на всю суму кредиту і приєднуються до основної суми в момент відкриття кредиту. Погашення боргу відбувається частинами: як правило, рівними сумами протягом усього терміну кредиту. Величина разового платежу визначається за формулою

$$R = \frac{S}{nm}, \qquad (2.9)$$

де $m$ – кількість платежів за рік;

$n$ – термін кредиту (вимірюється в роках).

Для обчислення нарощеної суми $S$ у споживчому кредиті використовують формулу $S = P(1 + in)$.

У зв'язку з тим, що відсотки нараховуються на початкову суму боргу, а фактична величина боргу зменшується з часом, дійсна вартість кредиту значно перевищує договірну відсоткову ставку.

**Приклад 2.6.** Кредит на купівлю товару на суму 10 тис. грн відкрито на 3 роки. Відсоткова ставка – 15% річних. Виплати наприкінці кожного місяця. Яку суму грошей потрібно віддати наприкінці терміну і які будуть щомісячні виплати?

***Розв'язання.*** Згідно з (2.3) знаходимо нарощену суму $S$

$$S = 10\,000\ (1 + 3 \cdot 0{,}15) = 14\,500 \text{ грн.}$$

Величину разового платежу $R$ обчислюємо за формулою (2.9). Враховуючи, що $n = 3$, а $m = 12$, отримаємо

$$R = \frac{14\,500}{3 \cdot 12} = 402{,}77 \text{ грн.}$$

## 2.4. Дисконтування за простими відсотковими ставками

У фінансовій практиці дуже часто трапляються задачі, які є оберненими до задач на знаходження нарощених відсоткових сум, а саме: за заданою сумою $S$, яку потрібно буде виплатити через деякий час $n$, необхідно визначити суму отриманого кредиту $P$ (основну суму боргу).

Така ситуація може виникнути при розробці умов договору або коли відсотки із суми $S$ утримуються наперед, тобто безпосередньо при видачі кредиту. У цьому випадку говорять, що сума $S$ ***дисконтується,*** або ***обліковується***, сам процес нарахування відсотків і їх утримання називається ***обліком***, а утримані відсотки – ***дисконтом,*** або ***знижкою***.

**Означення 2.1.** ***Дисконтування*** – це визначення вартості грошової суми на певний момент часу за умови, що в майбутньому вона дорівнюватиме $S$.

Інакше кажучи, дисконтування – це зведення $S$ до теперішнього часу. Величину $P$, обчислену з допомогою дисконтування, називають *сучасною*, або *поточною, вартістю* майбутнього платежу $S$.

Різницю $S - P = D$ називають ***дисконтом*** величини $S$. Оскільки гроші втрачають свою вартість з часом, $D > 0$. Крім того, оскільки час у фінансових угодах враховується з допомогою відсоткових ставок, дисконт дорівнює відсотковим грошам, нарахованим на суму $P$:

$$D = I = S - P. \qquad (2.10)$$

Залежно від виду відсоткової ставки застосовують два види дисконтування: *математичне дисконтування* і *банківський облік*.

**Означення 2.2.** ***Математичне дисконтування*** – це відшукання теперішньої суми боргу $P$ за відомою кінцевою сумою $S$. При математичному дисконтуванні використовується ставка *нарощування.*

***Задача формулюється так*:** яку початкову суму позики потрібно видати в борг, щоб наприкінці терміну угоди отримати суму $S$, за умови, що на борг нараховуються відсотки за ставкою $i$?

Розв'язавши рівність (2.3) відносно $P$, отримаємо

$$P = \frac{S}{1 + in}. \qquad (2.11)$$

Якщо термін позики менше року, то, як і у випадку задач на знаходження нарощених сум, $n = \frac{t}{K}$.

Множник $\frac{1}{1 + in}$ формули (2.11) називається ***дисконтним множником*** (discount factor) простих відсотків при математичному дисконтуванні, а величина дисконту, як безпосередньо випливає з формули (2.3), обчислюється наступним чином:

$$D = Pin. \qquad (2.12)$$

**Приклад 2.7.** Через 180 днів після підписання договору боржник виплатить 310 тис. грн. Кредит видано під 16% річних. Яка початкова сума боргу за умови, що часова база 365 днів?

***Розв'язання*.** Використовуючи (2.11), враховуючи, що $n = \frac{180}{365}$, отримаємо таку початкову суму боргу:

$$P = \frac{310\,000}{1 + \frac{180}{365} \cdot 0{,}16} = 287\,329{,}69 \text{ грн.}$$

**Приклад 2.8.** Банк у першому кварталі випустив депозитний сертифікат з терміном погашення наприкінці першого кварталу. Сертифікат викуповується за 50 грн. Оголошена дохідність – 30% простих річних. $K$ = 365. Знайти ціну продажу сертифікату і суму дисконту.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $S = 50$ грн; $i$ = 0,3; $K$ = 365; $t$ (кількість днів за січень, лютий, березень) = 31 + 28 + 31 = 90 днів.

За формулами (2.11) і (2.12) знаходимо відповідно:

$$P = \frac{50}{1+\frac{90}{365}\cdot 0,3} = 46,56 \text{ грн;}$$

$$D = 50 - 46,56 = 3,44 \text{ грн.}$$

**Означення 2.3.** ***Банківський облік*** (або облік векселів) – це відшукання теперішньої суми боргу $P$ за відомою величиною $S$ у майбутньому, терміном позики $n$ і обліковою ставкою $d$.

Суть операції банківського обліку полягає в наступному. Банк або інший фінансовий заклад до настання часу платежу за векселем купує цей вексель у власника за ціною, яка менша від суми, вказаної на векселі, тобто купує його з дисконтом. Отримавши при настанні терміну векселя гроші, банк реалізує відсотковий прибуток у вигляді дисконту. У свою чергу, власник векселя завдяки його обліку має можливість отримати гроші хоч і не в повному обсязі, проте раніше зазначеного терміну.

При банківському обліку відсоткові гроші за користування позикою у вигляді дисконту нараховуються на суму $S$, яку треба сплатити в майбутньому. При цьому застосовується облікова ставка $d$.

Враховуючи вищесказане, розмір дисконту при простих відсотках, дорівнює:

$$D = S n d, \tag{2.13}$$

де $d$ – річна облікова ставка; $n$ вимірюється в роках.

Таким чином,

$$P = S - S n d = S(1 - n d), \tag{2.14}$$

де $n$ – час від моменту обліку до дати погашення векселя.

Якщо час від моменту обліку векселя до дати погашення векселя вимірюється у днях, то $n = \frac{t}{K}$, причому часова база для дисконтування ***завжди*** $K = 360$.

Множник $(1 - nd)$ називається ***дисконтним множником за простою обліковою ставкою.***

**Приклад 2.9.** Кредит 10 000 гривень виданий на рік під облікову ставку $d$ = 15% . Знайти суму отриманих грошей і дисконт, узятий банком.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $S$ = 10 000 грн, $d$ = 15%, $n$ = 1 рік. Для того щоб знайти суму $P$, а також величину дисконту $D$, використаємо відповідно формули (2.14) і (2.10):

$P$ = 10 000(1 – 0,15) = 8 500 грн;

$D$ = 10 000 – 8 500 = 1 500 грн.

**Приклад 2.10.** Власник векселя номінальною вартістю 8 000 гривень терміном на півтора роки і відсотковою ставкою 9% дисконтує його у банку з відсотковою ставкою 8% за три місяці до терміну погашення. Який прибуток отримає:

а) власник векселя;

б) банк?

***Розв'язання.*** *Номінальна вартість векселя* – це сума, яка підлягає сплаті за векселем без урахування обумовлених у тексті векселя відсотків. Тому спочатку знайдемо завершену вартість $S$ векселя. Для цього скористаємося формулою (2.3) нарощення за простою відсотковою ставкою $i$, де $P$ = 8 000 грн, $i$ = 9% = 0,09, $n$ = 1,5:

$S$ = 8 000·(1 + 0,09·1,5) = 9 080 грн.

Потім знаходимо суму, яку отримає власник векселя після обліку його у банку за 3 місяці до терміну погашення. У цьому випадку скористаємося формулою дисконтування (2.14), де $S$ = 9 080 грн, $n = \frac{3}{12}$ = 0,25, $d$ = 8% = 0,08:

$$P = 9\,080 \cdot (1 - 0{,}25 \cdot 0{,}08) = 8\,898{,}4 \text{ грн.}$$

Отже, *прибуток власника* векселя становить:

8 898,4 – 8 000 = 898,4 грн.

*Прибуток банку*, в свою чергу, становить:

9 080 – 8 898,4 = 181,6 грн.

За простою обліковою ставкою можна вести не тільки дисконтування, а й нарощення. З формули (2.14) знаходимо:

$$S = \frac{P}{1 - nd}. \qquad (2.15)$$

Вираз $\frac{1}{1-nd}$ називають ***множником нарощення за простою обліковою ставкою*** $d$.

Зауважимо, що нарощення за обліковою ставкою $d$ йде швидше, ніж нарощення за простою відсотковою ставкою $i$.

**Приклад 2.11.** Кредит 20 000 гривень видано на рік під просту облікову ставку 20%. Знайти суму, яку потрібно сплатити боржнику.

***Розв'язання.*** Як бачимо, в даній задачі йдеться про нарощення за простою обліковою ставкою, тому скористаємося формулою (2.15), де $P$ = 20 000 грн, $d$ = 0,2, $n$ = 1:

$$S = \frac{20\,000}{1 - 1 \cdot 0,2} = 25\,000 \text{ грн.}$$

### 2.5. Визначення інших параметрів фінансових угод з простими відсотковими ставками

У попередніх розділах, знаючи відсоткові ставки й терміни угод, ми знаходили формули для обчислення нарощених і дисконтованих сум. Але інколи потрібно розв'язувати задачі знаходження *i*, *n*, *d* за відомими даними.

Безпосередньо з формул (2.3), (2.5) та (2.14), виражаючи *n* через інші параметри фінансових угод, знаходимо формули для обчислення *терміну угоди* при відповідних ставках нарощення та обліку:

– якщо термін угоди *n* вимірюється в роках, то:

$$n = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i}, \qquad n = \frac{1 - \frac{P}{S}}{d}; \qquad (2.16)$$

– якщо термін угоди *n* вимірюється у днях, то:

$$t = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i} \cdot K, \ (K = 360, 365, 366);$$

$$t = \frac{1 - \frac{P}{S}}{d} \cdot K, \ (K = 360) \qquad (2.17)$$

Аналогічно з (2.3), (2.5) та (2.14) знаходимо відповідні ставки:

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{n}; \qquad d = \frac{1 - \frac{P}{S}}{n} \qquad (2.18)$$

або

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{t} \cdot K, \quad (K = 360;\ 365;\ 366);$$

$$d = \frac{1 - \frac{P}{S}}{t} \cdot K, \quad (K = 360). \qquad (2.19)$$

Формули (2.18) і (2.19) використовують при обчисленні *доходності (прибутковості) фінансових операцій*.

Зауважимо, що у фінансовому аналізі прибутковість операцій завжди вимірюється у річній відсотковій ставці (простій або складній). Якщо доходність знайдена в обліковій ставці, то результат перераховують у річну відсоткову ставку нарощення .

**Приклад 2.12.** Початкова сума боргу 10 000 грн. Через 90 днів передбачається погасити 10 500 грн. Визначити дохідність операції для кредитора у простій відсотковій і простій обліковій ставках. Рік невисокосний.

***Розв'язання.*** Оскільки термін кредитної угоди обраховується в днях ($t$ = 90 днів), то для знаходження ставки нарощення $i$ та облікової ставки $d$ використовуємо формули (2.19), згідно з якими:

$$i = \frac{10\,500 - 10\,000}{90 \cdot 10\,000} \cdot 365 = 0{,}20278;$$

$$d = \frac{10\,500 - 10\,000}{90 \cdot 10\,500} \cdot 360 = 0{,}1905.$$

Отримані в даній задачі результати є підтвердженням вищезгаданого твердження, що нарощення за обліковою ставкою йде швидше, ніж за ставкою нарощення.

**Приклад 2.13.** Якою має бути тривалість позики у днях, щоб борг 1 000 грн зріс до 1 100 грн при застосуванні простих відсотків з річною відсотковою ставкою нарощування 35%? Рік невисокосний.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $P$ = 1 000 грн, $S$ = 1 100 грн, $K$ =365, $i$ = 35% = 0,35. Отже, використовуючи першу з формул (2.17), знаходимо:

$$t = \frac{\frac{1100}{1\,000} - 1}{0,35} \cdot 365 = 104,3 \approx 104 \text{ дні.}$$

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ З ТЕМИ 2

**1.** Які види відсоткових ставок ви знаєте і чим вони відрізняються одна від одної?

**2.** Як обчислюється нарощена сума, коли відсотки нараховуються за простою відсотковою ставкою нарощення?

**3.** За якими формулами відбувається нарощення вкладу, якщо відсоткові ставки змінюються з часом та змінюється з часом сума депозиту?

**4.** У чому суть методів АСТ/АСТ, АСТ/360, 360/360?

**5.** Як відбувається погашення боргу при використанні споживчого кредиту?

**6.** Що називається дисконтуванням? Які існують види дисконтування?

**7.** У чому суть операції банківського обліку? Що називається дисконтом і як визначається дисконт за весь період кредитної угоди?

**8.** Записати і пояснити формули, за якими обчислюється прибутковість фінансових операцій.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ З ТЕМИ 2

**1.** Банк видав позику розміром 100 тис. грн 30.01.2016 р. до 05.10.2016 р. включно під 5% річних. Рік високосний. Знайти з точністю до тисяч гривень розмір погашувального платежу, обчислюючи точну кількість днів позики.

**2.** Борг 10 тис. грн зріс до 12 тис. грн. На суму боргу нараховувалися прості відсотки – 40%. Рік невисокосний. Знайти тривалість позики у днях.

**3.** Вексель, виданий на 15 000 грн зі сплатою 17.11.2017 р. Власник векселя облікував його у банку 23.09.2007 р. по обліковій ставці 15%. Знайти отриману суму.

**4.** Видана позика 25 тис. грн. У перше півріччя простий відсоток складає 30%. У другому – 33%. Термін позики – один рік. Знайти розмір боргу на кінець угоди.

**5.** 10 тис. грн видаються на 96 днів під просту облікову ставку 20%. Знайти суму, яку треба сплатити боржнику.

**6.** Позика надана на 100 днів під 45% річних простих. У кінці терміну боржник сплатить 15 тис. грн. Рік високосний. Який кредит отримав боржник?

**7.** За умов задачі **6** знайти суму дисконту.

**8.** Вексель вартістю 100 000 грн облікований у банку за 100 днів до терміну погашення по обліковій ставці 20%. Знайти суму, отриману власником векселя, а також дисконт, отриманий банком.

**9.** За умов задачі **8** знайти дисконт, отриманий банком.

**10.** Відсоткова ставка дорівнює 25%. Термін позики 4 роки. Початкова сума 1000 грн. Знайти нарощену суму.

**11.** Початкова сума боргу 10 тис. грн. За 120 днів передбачається погашення у розмірі 15 тис. грн. Визначити дохідність операції для кредитора у вигляді простої відсоткової ставки.

**12.** За даними задачі **11** визначити дохідність операції у вигляді простої облікової ставки.

**13.** Кредит 25 000 грн видано на рік під облікову ставку 19%. Знайти суму отриманих грошей, а також дисконт.

**14.** Маємо зобов'язання сплатити $S_1 = 4\,000$ грн через 9 місяців і $S_2 = 3\,500$ грн через 5 місяців. Знайти теперішні значення цих сум $P_1$, $P_2$ при ставці нарощення 25% простих річних.

**15.** Визначити дохідність купівлі фінансового інструменту вартістю 20 тис. грн, якщо після двох років по ньому отримуємо 22 тис. грн.

# Тема 3. СКЛАДНІ ВІДСОТКИ

## 3.1. Нарахування складних річних відсотків. Порівняння зросту за складними і простими відсотками

У середньо- і довгострокових фінансових операціях, якщо відсотки не виплачуються відразу після їх нарахування, а приєднуються до основної суми боргу, застосовують ***складні*** відсотки.

Очевидно, що база для нарахування складних відсотків, на відміну від простих, не залишається сталою – вона збільшується з кожним кроком у часі.

Процес приєднання відсотків до суми, яка є базою для їх нарахування, називається ***капіталізацією відсотків***, а часові періоди (кроки), через які це відбувається, називаються ***компаундами***.

У практичних питаннях застосовують *дискретні* складні відсотки, у теоретичних питаннях фінансового аналізу мають місце і *неперервні* відсотки.

Нехай $P$ – початкова сума боргу (позики, кредиту); $S$ – нарощена сума на кінець терміну позики; $n$ – термін позики (вимірюється е роках); $i$ – річна ставка нарощування складних відсотків (визначається у вигляді десяткового дробу). Тоді на кінець першого року відсоткові гроші дорівнюватимуть величини $P \cdot i$, а нарощена сума становитиме

$P + P \cdot i = P(1+i)$ (перший компаунд).

У кінці другого року нарощена сума досягне величини

$P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$ (другий компаунд).

У кінці $n$-го року ($n$-й компаунд) нарощена сума

$$S = P(1+i)^n. \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) є формулою нарощення за складними відсотками. Вираз $(1+i)^n$ називається *множником нарощення за складними відсотками*. Для цілих $n$ ($1 \le n \le 100$) і певних значень $i$ величину цього множника можна знайти в таблиці (Д о д а т о к 4), а можна обчислити безпосередньо.

Відсоткові гроші за період $n$ років визначають за формулою

$$I = S - P = P\left[(1+i)^n - 1\right]. \qquad (3.2)$$

Якщо складні відсотки нараховуються щомісяця (12 разів на рік, при цьому відсоткова ставка буде в 12 разів менша за річну), то говорять, що має місце щомісячний компаунд, а кожен місяць називають *конверсійним періодом*. Якщо складні відсотки нараховують кожні 3 місяці (4 рази на рік, при цьому відсоткова ставка буде в 4 рази менша за річну), то має місце щоквартальний компаунд.

Прибуток за складними відсотками може нараховуватися кожні півроку, щотижня, щоденно та неперервно. Причому, чим частіше відбуваються нарахування, тим більший буде результуючий множник нарощування.

**Приклад 3.1.** Відсоткова ставка по позиці дорівнює 30% складних річних. В яку суму обернеться борг 10 000 грн через 3 роки?

***Розв'язання.*** За умовою задачі $i$ = 0,3; $n$ = 3; $P$ = 10 000. За (3.1) знаходимо:

$$S = 10\,000 \cdot (1+0,3)^3 = 10\,000 \cdot 2,197 = 21\,970 \text{ грн.}$$

Якщо використовувати *змінні з часом ставки*, то нарощення відбувається за формулою

$$S = P(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_m)^{n_m}, \qquad (3.3)$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_m$ – послідовні значення ставок; $n_1, n_2, \ldots, n_m$ – періоди, протягом яких діють відповідні ставки.

**Приклад 3.2.** Складний відсоток по позиці дорівнює 26% плюс маржа 4% в перші два роки і 5% - на третій рік. Знайти множник нарощення за три роки.

***Розв'язання.*** Множник нарощення для складних відсотків за умови, що відсоткова ставка змінюється протягом угоди, визначається за (3.3).

За умовою задачі: $i_1$ = 26% + 4% = 30% (0,3); $n_1$ = 2; $i_2$ = 26% + 5% = 31% (0,31); $n_2$ = 1. Звідси $(1+0,3)^2 \cdot (1+0,31) = 2,2139$.

Множник нарощення – це *показник темпів зростання* нарощеної суми. Тому, щоб порівняти швидкість нарощення за простою і складною відсотковими ставками, насамперед потрібно порівняти множники нарощення.

Нехай відсоткова ставка $i$ однакова і в першому випадку (при нарощенні за простими відсотками), і в другому (при нарощенні за складними відсотками). Тоді в першому випадку множник нарощення дорівнюватиме $1+in$, а в другому – $(1+i)^n$.

Якщо $n$ = 1 рік, то $1+in = (1+i)^n$.

Якщо $n$ > 1 року, то $1+in < (1+i)^n$.

Якщо $n$ < 1 року, то $1+in > (1+i)^n$.

Звідси можемо зробити висновок, що в межах року швидше зростають прості відсотки, за межами року – складні відсотки.

Зобразимо графічно швидкість зростання нарощеної суми, якщо нарахування відбувається за простими і складними відсотками (*рис 3.1*):

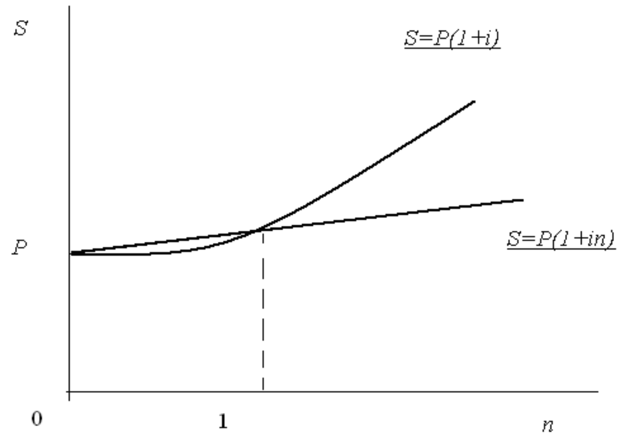



***Рис. 3.1.*** Темп зростання нарощення за простими і складними відсотками

З графіка (*рис. 3.1*) чітко видно, що при $n > 1$ зі збільшенням $n$ суттєво зростає і різниця між темпами нарощення за простими і складними відсотками.

Часто термін кредитної угоди є дробовим числом по відношенню до року ($n$ = 1,5 року; $n$ = 1 рік і 3 місяці тощо). Ряд комерційних банків для деяких операцій відсотки нараховують тільки на ціле число років, ігноруючи дробову частину. Але в більшості випадків враховується повний термін кредитної угоди.

Формула (3.1) використовується для знаходження нарощеної суми при нарахуванні складних відсотків і у випадку, коли термін угоди дорівнює цілому числу років, і у випадку, коли $n$ є дробовим. Даний метод нарахувань, із застосуванням (3.1), називається ***загальним***.

Окрім загального існує ще один метод нарахувань складних відсотків при дробовому $n$, який називається ***комбінованим*** методом.

Відповідно до цього методу на цілу кількість років нараховують складні відсотки, а на дробову частину – прості:

$$S = P(1+i)^a \cdot (1+bi), \qquad (3.4)$$

де $n = a + b$; $a$ – ціла частина $n$, $b$ – дробова частина $n$.

Зауважимо, що комбінований метод нарахування відсотків дає більшу нарощену суму, аніж загальний метод.

**Приклад 3.3.** Кредит у розмірі 10 000 грн виданий на два роки і 73 дні під 30%. Метод нарахувань – мішаний. $K$ = 365 днів. Знайти суму боргу на кінець терміну угоди.

***Розв'язання.*** Для того щоб знайти суму боргу на кінець кредитної угоди (нарощену суму $S$), скористаємося (3.4), оскільки саме ця формула характеризує мішаний метод. За умовою задачі: $P$ = 10 000 грн; $i$ = 30% = 0,3; $a$ = 2; $b = \frac{73}{365}$.

Звідси

$$S = 10\,000(1+0,3)^2 \cdot \left(1+\frac{73}{365}\cdot 0,3\right) = 17\,914 \text{ грн.}$$

### 3.2. Нарощення відсотків $m$ разів на рік. Номінальна та ефективна ставки

З метою залучення клієнтів фінансові установи практикують виплату відсотків не один, а декілька разів на рік (щоквартально, щомісяця і т.д.), а деякі закордонні комерційні банки практикують навіть щоденне нарахування відсотків.

При нарахуванні відсотків $m$ разів на рік використовуємо формулу (3.1). Параметр $n$ в даних умовах – це кількість періодів нарахування, а $i$ – відсоткова ставка, віднесена до відповідного періоду. Наприклад, при щомісячному нарахуванні відсотків за складною ставкою $i$ протягом двох років загальне число періодів нарахування $n = 12\cdot 2$ = 24.

Але на практиці вказують не щоквартальну чи щомісячну ставки, а *річну*. Наприклад, знайти нарощену суму при 16% *річних* з щоквартальним компаундом відсотків. Дана річна ставка називається *номінальною* і позначається $j$.

Тобто, ***номінальна ставка*** $j$ – це річна ставка, за якою відсотки нараховуються $m$ разів на рік.

Нарощення за номінальною ставкою $j$ здійснюється за формулою

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}, \tag{3.5}$$

де $n$ – тривалість кредитної угоди в роках;

$m$ – кількість нарахувань за рік.

Зрозуміло, що $n\,m$ – це кількість періодів нарахувань за весь термін кредитної угоди, а вираз $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ називається *річним множником нарощення* за номінальною ставкою $j$.

**Приклад 3.4.** Знайти множник нарощення, якщо відбувається щоквартальне нарахування відсотків за номінальною ставкою 20% річних протягом 5 років.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $j$ = 20% = 0,2; $n$ = 5; $m$ = 4. Використовуючи (3.5), отримаємо:

$$\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{4\cdot 5} = 1,05^{20} = 2,6532964.$$

У зв'язку з використанням номінальної ставки вводять поняття *ефективної ставки*, що відповідає даній номінальній ставці. Позначають ефективну ставку $i$ або $i_e$.

Під ***ефективною ставкою*** $i_e$ розуміють річну ставку складних відсотків, яка дає той же результат, що і $m$ разове нарахування за ставкою $\frac{j}{m}$.

Це означає, що $i_e$ та $j$ є еквівалентними у фінансовому відношенні, тобто, множники нарощення за ефективною і номінальною ставками є рівними:

$$(1+i_e)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}.$$

Звідси отримуємо формули для знаходження ефективної ставки, що відповідає даній номінальній, і навпаки – номінальної ставки за даною ефективною ставкою:

$$i_e = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1; \qquad j = m\left[(1+i_e)^{\frac{1}{m}} - 1\right]. \tag{3.6}$$

Формули (3.6) називаються рівняннями еквівалентності ефективної та номінальної річних ставок. Вони дозволяють змінювати умови кредитних угод заміною ефективної ставки на номінальну і навпаки. Крім того, з (3.6) випливає, що при $m > 1$ $i_e > j$.

**Приклад 3.5.** Банк нараховує відсотки за номінальною ставкою 30% річних. Знайти ефективну річну ставку за умов щомісячної і щоденної капіталізації.

***Розв'язання.*** Використовуючи формулу (3.6), знаходимо ефективну ставку при:

1) щомісячній капіталізації ($m=12$; $j=0,3$)

$$i_e = \left(1+\frac{0,3}{12}\right)^{12} - 1 = 0,3449\ (34,49\%);$$

2) щоденній капіталізації ($m=365$; $j=0,3$)

$$i_e = \left(1 + \frac{0{,}3}{365}\right)^{365} - 1 = 0{,}3497 \ (34{,}97\%).$$

### 3.3. Дисконтування та облік за складними ставками

Під час вивчення простих відсотків ми розглядали математичне дисконтування та банківський облік (облік векселя). Математичне дисконтування полягало у визначенні $P$ за даним значенням $S$ при заданій відсотковій ставці нарощення, банківський облік – у розв'язанні аналогічної задачі при заданій обліковій ставці.

Розглянемо перший метод і дисконтуємо тепер суму $S$ за складною відсотковою ставкою. На основі (3.1) отримаємо:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n}. \tag{3.7}$$

Формула (3.7) є формулою математичного дисконтування за складними відсотками, а множник $v^n = (1+i)^{-n}$ називається *дисконтним, або обліковим, множником складних відсотків*. Він табулюється для цілих $n$ і певних значень $i$, в інших випадках дисконтний множник знаходиться безпосередньо. У Д о д а т к у 5 наведено деякі значення дисконтного множника.

Якщо відсотки нараховуються $m$ разів на рік за номінальною ставкою $j$, то з (3.5) знаходимо

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}} = S v^{mn}, \tag{3.8}$$

де дисконтний множник визначається відповідно: $v^{mn} = \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-nm}$.

Нагадаємо, що величину $P$, отриману дисконтуванням $S$, називають *сучасною (теперішньою) вартістю* величини $S$.

Різницю $S-P$, як і у випадку простих відсотків, називають дисконтом, позначають $D$ і визначають за формулою

$$D=S-P=S(1-v^{n}) \tag{3.9}$$

або

$$D=S-Sv^{mn}=S(1-v^{mn}). \tag{3.10}$$

**Приклад 3.6.** Сума в 5 млн грн буде сплачена через 5 років. Необхідно визначити її сучасну величину за умови, що застосовується ставка складних відсотків, яка дорівнює 12% річних.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $S$ = 5 млн грн; $i$ = 0,12; $n$ = 5, звідси, дисконтний множник

$$v^{5}=(1+0{,}12)^{-5}=1{,}12^{-5} = 0{,}56574.$$

Згідно з (3.7)

$$P=5 \text{ млн грн}\cdot 0{,}56574 = 2\ 837\ 100 \text{ грн.}$$

**Приклад 3.7.** Визначити теперішню величину суми 5 000 грн, яка буде сплачена через 2 роки. Складна ставка відсотків – 40% річних. Дисконтування щоквартальне.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $S$ = 5 000 грн; $i$ = 0,4; $n$ = 2, $m$ = 4, звідси, використовуючи (3.8), знаходимо:

$$P=\frac{5\,000}{\left(1+\frac{0,4}{4}\right)^{4\cdot 2}}=\frac{5\,000}{2{,}1435888} = 2\ 332{,}54 \text{ грн.}$$

Банківський облік за складною обліковою ставкою проводять за формулою

$$P=S(1-d_{c})^{n}, \tag{3.11}$$

де $d_c$ – складна облікова ставка; множник $(1-d_c)^n$ називається *дисконтним*.

При цьому дисконт, який отримує банк (за $n$ років):

$$D = S - S(1-d_c)^n = S\left[1-(1-d_c)^n\right]. \qquad (3.12)$$

Якщо дисконтування відбувається $m$ разів на рік, то (3.11) набирає вигляду:

$$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}, \qquad (3.13)$$

де $f$ – номінальна облікова ставка.

Зауважимо, що дисконтування за номінальною ставкою уповільнює процес зменшення $S$ і відповідно зменшує суму дисконту $D$, яка одержується при купівлі векселя.

Поряд з $f$ застосовується *ефективна облікова ставка* $d_e$.

***Ефективна облікова ставка*** – це така річна ставка, застосування якої еквівалентне застосуванню номінальної ставки $f$. Вона характеризує степінь дисконтування за рік. Визначимо її на основі рівності дисконтних множників.

Отже,

$$(1-d_e)^n = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}.$$

Звідси

$$d_e = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m}; \qquad f = m\left[1-(1-d_e)^{\frac{1}{m}}\right]. \qquad (3.14)$$

З (3.14) випливає, що ефективна облікова ставка $d_e$ завжди при $m>1$ менша за номінальну.

**Приклад 3.8.** Боргове зобов’язання на суму 5 млн грн, термін виплати якого настає через 5 років, продано з дисконтом за складною обліковою ставкою 15% річних. Які розмір отриманої за борг суми і величина дисконту? Знайти розмір даної суми при щоквартальному обліку і ефективну облікову ставку, що відповідає даній номінальній обліковій ставці.

***Розв'язання.*** За умовою задачі маємо $S$ = 5 млн грн; $n$ = 5 років; $d_c$ = 0,15. У першому випадку дисконтування відбулося один раз, тому, використовуючи (3.11), знаходимо величину отриманої за борг суми:

$$P = 5 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,15)^5 = 2,2185 \cdot 10^6 \text{ грн.}$$

Згідно з (3.12) величина дисконту

$$D = 5 \cdot 10^6 - 2,2185 \cdot 10^6 = 2,7815 \cdot 10^6 \text{ грн.}$$

Обчислимо тепер отриману за борг суму $P$, якщо облік відбувається щоквартально, а отже, облікова ставка є номінальною ставкою: $f$ = 15% = 0,15; $m$ = 4; $mn$ = 20.

За формулою (3.13) знаходимо:

$$P = 5 \cdot 10^6 \cdot \left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^{20} = 2,3280 \cdot 10^6 \text{ грн.}$$

Як бачимо, за результатами даної задачі щоквартальний облік є вигіднішим для власника боргового зобов'язання, аніж щорічне дисконтування за складною обліковою ставкою.

Ефективна облікова ставка, що відповідає номінальній ставці $f$ = 0,15, складатиме

$$d_e = 1 - \left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^4 = 0,14177 = 14,177\%.$$

За складною обліковою ставкою можна проводити і нарощення. Потреба у цьому виникає при заповненні векселя при відомій сумі $P$, отриманій власником векселя. Відповідні формули для складної облікової ставки і складної номінальної ставки матимуть такий вигляд:

$$S = \frac{P}{\left(1-d_c\right)^n}\ , \qquad\qquad S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}. \qquad (3.15)$$

## 3.4. Визначення інших параметрів угод зі складними відсотковими ставками

При розробці контрактів необхідно вміти розв’язувати обернені задачі й визначати: термін позики, кількість періодів нарощення, відсоткові ставки, облікові ставки, якщо задані відповідно початкова чи нарощена сума або ставка відсотків і т.д.

Розв’язуючи співвідношення (3.1) і (3.5), (3.11) і (3.13) відносно $n$, знаходимо формули для визначення терміну кредитної угоди:

$$n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i)}; \qquad\qquad n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}; \qquad (3.16)$$

$$n = \frac{\ln\frac{P}{S}}{\ln\left(1-d_c\right)}; \qquad\qquad n = \frac{\ln\frac{P}{S}}{m\ln\left(1-\frac{f}{m}\right)}. \qquad (3.17)$$

**Приклад 3.9.** Визначити кількість років для збільшення капіталу у 8 разів для складної ставки нарощення $i$ = 40%.

***Розв’язання.*** Використовуючи першу з формул (3.16), знайдемо термін кредитної угоди:

$$n = \frac{\ln 8}{\ln\left(1+0,4\right)} = 6,18 \text{ року.}$$

Із співвідношень (3.1) і (3.5), (3.11) і (3.13) отримуємо також рівняння для знаходження відповідних відсоткових ставок (нарощення і дисконтування), які використовуються при підрахунках дохідності проведених операцій:

$$i=\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}}-1; \qquad j=\left[\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}}-1\right]m; \qquad (3.18)$$

$$d_c=1-\left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{n}}; \qquad f=\left[1-\left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{mn}}\right]m. \qquad (3.19)$$

**Приклад 3.10.** Сума сертифікату 1 000 грн. При трирічному терміні зберігання виплачується 1 500 грн, при п'ятирічному – 2 500 грн. Визначити дохідність у вигляді складної річної ставки відсотків для кредитора вкладання коштів у сертифікат.

***Розв'язання.*** Дохідність операцій визначається річною складною відсотковою ставкою, тому, використовуючи першу з формул (3.18), знайдемо $i$ за різних термінів кредитної угоди:

1) $i=\left(\frac{1500}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}-1$ = 0,14471 (14,47%);

2) $i=\left(\frac{2\,500}{1000}\right)^{\frac{1}{5}}-1$ = 0,20112 (20,11%).

**Приклад 3.11.** Вексель виписаний на два роки. При його обліку власник бажає отримати 80% суми векселя. Якою повинна бути складна облікова ставка, щоб задовольнити бажання власника?

***Розв'язання.*** За умовою задачі $\frac{P}{S}=0{,}8;$ $n$ = 2. За формулою (3.19) знаходимо $d_c$:

$$d_c = 1-(0,8)^{\frac{1}{2}} = 0,10557 \ (10,56\%).$$

### 3.5. Неперервні відсотки. Неперервне нарощення і дисконтування

*Неперервне нарахування відсотків* – це нарахування за нескінченно малі проміжки часу. У практичних фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування відсотків застосовується дуже рідко. Воно є досить ефективним при аналізі складних фінансових проблем, наприклад при обґрунтуванні й виборі інвестиційних рішень, у фінансовому проектуванні. З допомогою неперервних відсотків вдається врахувати складні закономірності процесу нарощування.

При неперервному нарощуванні відсотків використовують особливий вид відсоткової ставки – силу росту, яка характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона може бути сталою або може змінюватися з часом.

Як відомо, при дискретному нарахуванні складних відсотків $m$ разів на рік за номінальною ставкою $j$ нарощена сума обраховується за формулою

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}$$

Чим більше $m$, тим менший проміжок між моментами нарахування відсотків, а отже, при $m \to \infty$

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Використовуючи другу визначну границю $\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e\right)$, знаходимо, що $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = e^{jn}$. Отже, $S = Pe^{jn}$.

Для того щоб відрізнити неперервну ставку від дискретної, позначимо силу росту $\delta$. Звідси

$$S = Pe^{\delta n}. \qquad (3.20)$$

Формула (3.20) дозволяє знаходити кінцеву величину капіталу $S$ (нарощену суму) в будь-який період часу при *неперервному* нарахуванні складних відсотків.

Легко знайти зв'язок між еквівалентними неперервною і дискретною складними відсотковими ставками. Для цього потрібно прирівняти відповідні множники нарощення:

$$(1+i)^n = e^{\delta n}.$$

Звідси матимемо формули для знаходження еквівалентної неперервної відсоткової ставки за даною дискретною складною ставкою, і навпаки, – еквівалентної дискретної відсоткової ставки за даною неперервною:

$$\delta = \ln(1+i), \qquad i = e^{\delta} - 1.$$

Порівняємо темпи дискретного і неперервного нарощувань. Для цього вважатимемо, що величина початкового вкладу $P$ = 1 грн; $j = \delta = 5\%$ = 0,05; $n$ = 20 років. Запишемо знайдені значення $S$ за формулами (3.5) і (3.20) відповідно дискретного і неперервного нарощувань відсотків у вигляді таблиці (*табл. 3.1*):

*Таблиця 3.1*

| | **Формула складних відсотків** | | | | | **Формула неперервного нарахування відсотків** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m$ = 1 | $m$ = 2 | $m$ = 4 | $m$ = 12 | $m$ = 365 | |
| **Розмір вкладу,** ***грн од.*** | 2,6335 | 2,6851 | 2,7015 | 2,7126 | 2,7181 | 2,7182 |

Як бачимо, різниця між щорічним нарахуванням ($m$ = 1) і неперервним нарахуванням незначна (близько 2,5%).

За неперервною відсотковою ставкою (силою росту) можна проводити як нарощування, так і дисконтування. Дисконтний множник для математичного дисконтування легко знайти на основі формули (3.20). Для цього необхідно розв'язати рівняння (3.20) відносно $P$:

$$P = S\,e^{-\delta n}. \qquad (3.21)$$

Дисконтний множник, як бачимо, дорівнює $e^{-\delta n}$.

**Приклад 3.12**. На суму 2 млн грн нараховано неперервні відсотки $\delta$ =10%, термін угоди - 5 років. Знайти нарощену суму.

***Розв'язання*.** Дану задачу можна розв'язати двома способами.

*Перший спосіб* полягає у використанні формули нарощення для неперервних відсотків (3.20):

$$S = 2 \cdot 10^6 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 3\,297\,744{,}45 \text{ грн.}$$

*Другий спосіб* полягає у знаходженні дискретної відсоткової ставки складних відсотків, яка еквівалентна неперервній, і обчисленні нарощеної суми за формулою (3.1). Отже, неперервне нарощення за ставкою 10% рівнозначне нарощенню за той же термін дискретних відсотків за річною ставкою $i = e^{0,1} - 1$ = 0,10517. Звідси

$$S = 2 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0{,}10517)^5 = 3\,297\,744{,}45 \text{ грн.}$$

## 3.6. Еквівалентність платежів і відсоткових ставок. Зміна умов контрактів

У фінансових розрахунках для процедур нарощення та дисконтування використовують різні види відсоткових ставок. Якщо ці ставки у конкретних умовах угоди приводять до одного і того ж фінансового результату, то вони називаються ***еквівалентними***.

Для учасників операції не має значення, які ставки будуть використані в угоді, якщо ці ставки еквівалентні. Частково до питання еквівалентності ставок ми звертались у пунктах 3.2 і 3.5, коли визначали відповідно річну ефективну ставку за даною номінальною і неперервну ставку за даною дискретною ставкою складних відсотків. Розглянемо тепер проблему еквівалентності ставок більш повно і систематизовано.

Введемо наступні співвідношення еквівалентності простих, простих і складних, складних ставок. Дані співвідношення доводяться на основі рівності множників *нарощення*, отриманих з використанням відповідних ставок.

**1.** Еквівалентність простої відсоткової ставки нарощення $i$ та простої облікової ставки $d$**.**

Нарощення за простою відсотковою ставкою здійснюється за формулою $S = P(1+in)$, а нарощена сума з використанням облікової ставки простих відсотків обчислюється за формулою $S = \frac{P}{1-dn}$.

Прирівнявши множники нарощення $(1+in) = \frac{1}{1-dn}$, отримаємо відповідні рівності:

$$i = \frac{d}{1-dn}, \qquad d = \frac{i}{1+in}. \qquad (3.22)$$

У формулах (3.22) термін позики $n$ визначається в роках. Якщо позика вимірюється у днях, то в залежності від бази року $K$ маємо такі співвідношення між еквівалентними ставками.

Якщо $K_1 = K_2 = 360$, де $K_1$ – часова база для нарахувань за ставкою нарощення $i$, $K_2$ – часова база для нарахувань за обліковою ставкою $d$, то:

$$i = \frac{360d}{360 - dt}, \qquad d = \frac{360i}{360 + it}. \tag{3.23}$$

Якщо $K_1 = 365(366)$, а $K_2 = 360$, то матимемо:

$$i = \frac{365d}{360 - dt}, \qquad d = \frac{360i}{365 + it}. \tag{3.24}$$

***П р и м і т к а.*** Наступні співвідношення еквівалентності будуть наведені без доведень. Бажаючі перевірити результат можуть знайти відповідні множники нарощення у попередніх темах.

**2.** Еквівалентність простої і складної ставок нарощення.

Щоб розрізняти просту і складну ставки, введемо такі позначення: просту ставку нарощення позначатимемо через $i_n$, а складну – через $i_c$. Тепер отримаємо наступні співвідношення:

$$i_n = \frac{(1+i_c)^n - 1}{n}; \qquad i_c = \sqrt[n]{1 + i_n \cdot n} - 1. \tag{3.25}$$

**3.** Еквівалентність простої $i$ та номінальної $j$ ставок нарощення.

$$i = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{n}; \qquad j = m\left[(1 + i\,n)^{\frac{1}{mn}} - 1\right]. \tag{3.26}$$

**4.** Еквівалентність простої облікової ставки $d$ і складної відсоткової ставки $i$**.**

$$d = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{n}; \qquad i = (1 - d\,n)^{-\frac{1}{n}} - 1. \tag{3.27}$$

У формулах (3.27) $n$ обчислюється в роках, якщо термін кредитної угоди обчислюється у днях, причому часова база для нарахувань за обліковою ставкою $K = 360$ (як було зазначено вище, для обліку завжди використовують $K = 360$), а за складною відсотковою ставкою $i$ – $K = 365$, то рівності (3.27) набудуть вигляду:

$$d = \frac{360}{t}\left[1-(1+i)^{-\frac{t}{365}}\right], \qquad i = \left(1-\frac{t}{360}d\right)^{-\frac{365}{t}} - 1. \qquad (3.28)$$

**5.** Еквівалентність складної відсоткової $i$ та складної облікової $d$ ставок.

$$i = \frac{d}{1-d}; \qquad d = \frac{i}{1+i}. \qquad (3.29)$$

Зауважимо, що еквівалентність відсоткової й облікової складних ставок, на відміну від простих ставок нарощення й обліку, не залежить від терміну кредитної угоди. Дане твердження стає очевидним при порівнянні відповідних рівнянь еквівалентності між відповідними ставками.

**6.** Еквівалентність номінальної ставки $j$ та складної облікової $d$.

$$j = \left[(1-d)^{-\frac{1}{m}} - 1\right]m; \qquad d = 1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m}. \qquad (3.30)$$

**Приклад 3.13.** Позика видана під 30% складних річних. Знайти рівень еквівалентної простої ставки, якщо термін кредитної угоди - 2 роки, а також якщо термін угоди - 6 місяців. Порівняти дані ставки.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $i_c = 0{,}3$; $n_1 = 2$; $n_2 = \frac{1}{2}$. Використовуючи формулу (4.4) знаходимо:

$$i_n = \frac{(1+0{,}3)^2 - 1}{2} = 0{,}345 \ (34{,}5\%);$$

$$i_n = \frac{(1+0,3)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2}} = 0,280\ (28,0\%).$$

Очевидно, що термін кредитної угоди впливає на ефективність використання різних ставок. Результати даної задачі черговий раз ілюструють, що при $n < 1$ року вигідніше використовувати просту ставку нарощення при $n > 1$ – складну.

На практиці нерідко трапляються випадки, коли необхідно замінити дане грошове зобов'язання на інше (наприклад, з більш віддаленим терміном виплати), об'єднати декілька виплат в одну (консолідувати платежі) тощо.

Дані зміни ґрунтуються на принципі фінансової еквівалентності, при цьому еквівалентними вважаються платежі, які стають рівними при зведенні за даною відсотковою ставкою до одного моменту часу. Зведення до одного моменту часу здійснюється нарощенням або дисконтуванням.

У загальному випадку при зміні умов контракту складається *рівняння фінансової еквівалентності*, в якому сума зведених до одного моменту часу платежів, що замінюються, прирівнюється до суми платежів за новим зобов'язанням, що зведені на той же час.

Зазвичай в межах року рівняння еквівалентності складається на основі простих ставок, за межами року – на основі складних.

**Приклад 3.14.** Боржник домовився з банком про консолідацію трьох платежів з термінами 15.05, 15.06, 15.08. Суми платежів відповідно 10 тис., 20 тис., 22,8 тис. грн. Термін консолідації - 01.08. Ставка простих відсотків $i = 36,5\%$. $K$ = 365 днів. Знайти суму консолідованого платежу.

***Розв'язання.*** Складемо рівняння еквівалентності для консолідації трьох платежів. Для цього знайдемо вартість кожної суми на момент часу 01.08.

Суму $S_1 = 10$ тис. грн потрібно наростити, причому $n_1 = \frac{t_1}{K}$, де $t_1$ – кількість днів від 15.05 до 01.08.

За Д о д а т к о м 3 знаходимо: $t_1$ = 213 – 135 = 78.

Звідси $S_1^{'} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{78}{365} \cdot 0{,}365\right)$ = 10 780 грн.

Суму $S_2 = 20$ тис. грн, як і в попередньому випадку, теж потрібно наростити, але за термін $t_2$ = 213 – 166 = 47. Отже,

$$S_2^{'} = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{47}{365} \cdot 0{,}365\right) = 20\,940 \text{ грн.}$$

Оскільки термін виплати останньої суми $S_3$ = 22 800 грн закінчується 15.08, а дата консолідації – 01.08, суму $S_3$ потрібно дисконтувати на дату консолідації. Згідно з Д о д а т к о м 3, $t_3$ = 227 – 213 = 14. Звідси знаходимо, що $n_3 = \frac{14}{365}$ = 0,038, а дисконтована сума

$$S_3^{'} = \frac{22\,800}{1 + 0{,}038 \cdot 0{,}365} = 22\,485 \text{ грн.}$$

Звідси маємо рівняння фінансової еквівалентності, де $S$ – сума консолідованого платежу:

$$S = S_1^{'} + S_2^{'} + S_3^{'} = 10\,780 + 20\,940 + 22\,485 = 54\,205 \text{ грн.}$$

**Приклад 3.15.** Платежі 10 тис., 15 тис., 20 тис. грн повинні бути сплачені через відповідно 25, 45, 70 днів після деякої дати. Їх замінюють одним платежем – 47 тис. грн. Проста ставка $i$ = 36,5%. Рік невисокосний. Знайти дату консолідації.

***Розв’язання.*** Оскільки дата консолідації невідома, зведемо всі суми на початок відліку для цього ми маємо їх дисконтувати. Позначивши через $n$ дату консолідації, врахувавши, що за умовою задачі $K = 365$ днів, отримаємо таке рівняння еквівалентності:

$$\frac{47\,000}{1+n\cdot 0{,}365}=\frac{10\,000}{1+\frac{25}{365}\cdot 0{,}365}+\frac{15\,000}{1+\frac{45}{365}\cdot 0{,}365}+\frac{20\,000}{1+\frac{70}{365}\cdot 0{,}365}.$$

Дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\frac{47\,000}{1+n\cdot 0{,}365}=42{,}8018.$$

Звідси знаходимо дату консолідації: $n=$ 0,2687 року = 98 днів.

У тих випадках, коли консолідована сума дорівнює сумі платежів, тобто $S=\sum_i S_i$, застосовують наближену формулу для знаходження терміну консолідованого платежу:

$$n=\frac{\sum_i S_i n_i}{\sum_i S_i}. \qquad (3.31)$$

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ З ТЕМИ 3

**1.** За яких умов відбувається нарощення за складною відсотковою ставкою?

**2.** Записати і пояснити формулу знаходження нарощеної суми, якщо нарахування складних відсотків відбувається один раз на рік і $m$ разів на рік.

**3.** У чому полягають особливості мішаного методу нарахувань відсотків і коли його застосовують?

**4.** Як знайти нарощену суму, якщо в кредитній угоді використовується складна відсоткова ставка, яка змінюється з часом? Порівняйте з формулою нарощення за простою змінною відсотковою ставкою.

**5.** За яких умов для клієнта банку в депозитній угоді вигідніше застосовувати складну ставку відсотків, а за яких – просту?

**6.** У чому суть операції дисконтування? Які існують види дисконтування за складною ставкою?

**7.** Чим відрізняється математичне дисконтування від банківського обліку?

**8.** У чому різниця між обліковою складною ставкою й ефективною складною ставкою? Порівняти вплив даних ставок на темп дисконтування.

**9.** Вивести формулу для обчислення нарощеної і дисконтованої сум за неперервною відсотковою ставкою. Який зв'язок між силою росту і номінальною ставкою складних відсотків?

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ З ТЕМИ 3

**1.** Кредит розміром 96 тис. грн було видано на 7 років під складні відсотки 14,5% плюс маржа 0,5%. Визначити величину відсоткових грошей за весь час кредиту, якщо має місце:

а) щомісячний компаунд;

б) щорічний компаунд.

**2.** За який термін у роках сума 1 000 грн зросте до 1 200 грн, якщо на неї нараховуються складні річні відсотки 30% щоквартально?

**3.** Знайти просту відсоткову ставку, еквівалентну простій обліковій $d$ = 20%, якщо термін сплати по векселю - 100 днів. База року $K$ = 365 днів.

**4.** Номінальна ставка $j$ = 36%. Нарахування відсотків по півріччях протягом двох років. Знайти еквівалентну $j$ ефективну ставку.

**5.** Знайти суму дисконту при продажу фінансового інструменту на суму 2000 грн з терміном погашення 2 роки. Складна облікова ставка 22% річних. Дисконтування відбувається два рази на рік. Якою буде ефективна облікова ставка при даній номінальній?

**6.** За який термін у роках сума 1 000 грн зросте до 1 200 грн, якщо на неї нараховуються складні річні відсотки 30% один раз на рік?

**7.** Знайти величину ефективної ставки, якщо номінальна ставка дорівнює 25% при щомісячному нарахуванні відсотків.

**8.** Номінальна ставка $j = 36\%$. Нарахування відсотків по півріччях протягом двох років. Знайти множник нарощення.

**9.** При обліку векселя, виписаного на 3 роки, власник бажає отримати 90% його суми. Яка складна облікова ставка його задовольнить?

**10.** Визначити теперішню величину 5 000 грн, які будуть сплачені через 2 роки при використанні ставки 40% складних річних.

**11.** Відсоткова складна ставка дорівнює 35%. Термін позики - 3 роки 100 днів. Знайти нарощену суму, якщо $P = 10\ 000$ грн. Мішаний метод нарахувань. Рік невисокосний.

**12.** Визначити теперішню величину 1 500 грн, які будуть сплачені через 3 роки при ставці дисконтування 25% складних річних.

**13.** Визначити кількість років збільшення капіталу в 5 разів для складної і простої ставок $i = 25\%$.

**14.** Початкова сума боргу -10 тис. грн, термін погашення - 3 роки. Кредитор застосував складну облікову ставку 19%. Знайти нарощену суму.

**15.** За умовою задачі **14** знайти суму дисконту, яка отримується за весь термін кредитної угоди.

**16.** Боргове зобов’язання на суму 5 млн грн, терміном виплати через 5 років продано з дисконтом, який проводився по силі росту 12% і по дискретній складній обліковій ставці такого ж розміру – 12%. Знайти суми, отримані в першому і другому випадках, і порівняти їх.

**17.** Позика видана під 30% складних річних. Знайти еквівалентну просту ставку нарощення, якщо термін кредитної угоди 3 роки.

**18.** Знайти значення відсоткової ставки еквівалентної простій обліковій 25% на рік.

**19.** Операція обліку повинна принести 35% доходу на рік. Термін позики - 60 днів, $K = 365$, прості відсотки. Знайти облікову ставку.

**20.** Яка дохідність векселя у ставці простих відсотків ($K = 365$) обліку векселя за обліковою ставкою 15%? Термін сплати за векселем – 250 днів.

**21.** Якою складною річною ставкою можна замінити в договорі просту ставку 18% ($K = 365$), не змінюючи фінансових наслідків? Термін операції - 580 днів.

**22.** При розробці умов контракту сторони домовилися про те, що дохідність кредиту повинна становити 24% річних. Яким має бути розмір номінальної ставки при нарахуванні відсотків щомісячно, щоквартально?

**23.** Платежі $S_1 = 35\,000$ грн, $S_2 = 45\,000$ грн термінами 08.11.17 і 01.09.17 об'єднані в один терміном сплати 01.10.17 за ставкою $i = 35\%$ простих річних. Знайти суму консолідованого платежу. База року $K = 365$ днів.

**24.** Платежі 35 тис., 15 тис., 50 тис. грн сплачуються відповідно через 25, 30, 75 днів після початку року. Їх замінюють платежем 100 тис. грн. Знайти термін консолідації, якщо $i = 15\%$ .

**25.** Векселі з термінами 05.03.17 – $S_1 = 1200$ грн, 12.05.17 – $S_2 = 25000$ грн замінено одним з продовженням до 01.08.17. Облікова ставка банку - 20%. Визначити суму консолідованого платежу.

# Тема 4. ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ І ФІНАНСОВІ РЕНТИ

## 4.1. Види потоків платежів і їх основні параметри

Фінансові операції часто передбачають розподілені в часі виплати і надходження. Наприклад, погашення довгострокового кредиту, доходи по цінних паперах і т.д. У зв'язку з цим вводять поняття *потоку платежів,* під яким розуміють деяку послідовність виплат і надходжень. Окремий елемент послідовності називають *членом потоку*. Члени потоку можуть бути *додатні* (надходження) і *від'ємні* (виплати). Потоки платежів можуть бути *регулярними* (розміри платежів сталі, а інтервали між платежами однакові) і *нерегулярними*.

***Фінансова рента*** (ануїтет) – це потік платежів, усі члени якого додатні величини, а проміжки між двома послідовними виплатами – однакові. Прикладом фінансових рент є створення грошових фондів, оплата доходу за акціями і облігаціями, сплата споживчого кредиту тощо.

Рента описується такими параметрами:

$R$ – *розмір члена ренти* – величина окремого ***річного*** платежу;

$T$ – *період ренти* – інтервал часу між двома послідовними платежами;

$n$ – *термін ренти* – час від початку першого періоду ренти до кінця останнього;

$i$ – *відсоткова ставка* – ставка, що використовується при нарощенні або дисконтуванні;

$p$ – *кількість платежів на рік*;

$m$ – *кількість нарахувань відсотків на рік*.

За тривалістю періоду ренти класифікують на:

– річні (виплата один раз на рік);

– $p$-термінові (виплата $p$ разів на рік рівними частинами).

Перераховані вище ренти є *дискретними*, але у фінансовій практиці зустрічаються послідовності платежів, які відбуваються так часто, що їх практично можна вважати *неперервними*.

За кількістю нарахувань відсотків протягом року розрізняють ренти

– з щорічним нарахуванням;

– з нарахуванням $m$ разів на рік;
– з неперервним нарахуванням.

Якщо члени ренти однакові, то рента називається *сталою*, якщо різні – *змінною*. Рента зі скінченною кількістю членів називається *скінченною*. Рента з нескінченною кількістю членів – *нескінченною*. Прикладом нескінченної ренти є вічна рента – це виплати за пенсійними та страховими фондами.

Якщо виплати за рентою відбуваються наприкінці періодів, то це – рента *постнумерандо*. Якщо на початку періодів – рента *пренумерандо*. Рента називається *терміновою*, якщо виплати за нею починаються з початком ренти і *відкладеною*, якщо виплати починаються пізніше.

Узагальненими характеристиками ренти є нарощена сума і теперішня величина. *Нарощена сума* $S$ – це сума всіх членів ренти з нарахованими на них відсотками на кінець терміну ренти. *Теперішня величина* $A$ – сума всіх членів ренти, дисконтованих на початок ренти.

Розглянемо річну ***сталу ренту*** (***звичайну ренту***): сума $R$ вноситься наприкінці кожного року в банк під $i$ річних складних відсотків протягом $n$ років. Відсотки нараховуються наприкінці року, тобто маємо річну сталу ренту постнумерандо.

У цьому випадку на кожен (щорічний) внесок нараховуватимуться відсотки: на перший протягом $(n-1)$ років, на другий – $(n-2)$ роки, на третій – $(n-3)$ і т. д., винятком буде тільки останній внесок, на який відсотки не нараховуються. Відповідні нарощені суми на кінець кожного з періодів будуть відповідно дорівнювати:

$$R(1+i)^{n-1},\ R(1+i)^{n-2},\ R(1+i)^{n-3},\ \ldots,\ R(1+i),\ R.$$

Очевидно, що маємо геометричну прогресію, яка складається з $n$ членів, першим з яких є $R$, а знаменником даної геометричної прогресії буде вираз $(1+i)$.

Звідси нарощена сума за весь термін звичайної ренти є сумою відповідної прогресії і визначається наступним чином:

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{n,i}. \tag{4.1}$$

Вираз

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4.2}$$

називають *коефіцієнтом нарощення* ренти, і він табулюється для цілих $n$ і деяких значень $i$. В інших випадках $s_{n,i}$ обчислюється безпосередньо.

Метод обчислення теперішньої вартості *звичайної ренти*, як і інших фінансових рент, аналогічний методу обчислення нарощених сум, а саме, базується на понятті геометричної прогресії, що утворилася внаслідок дисконтування.

Сума відповідної геометричної прогресії і, як наслідок, теперішня вартість звичайної ренти визначається за формулою:

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{n,i}. \tag{4.3}$$

Вираз

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.4}$$

називають *коефіцієнтом зведення* ренти. Він показує, у скільки разів $A$ більша за $R$. За аналогією з коефіцієнтом нарощення, $a_{n,i}$ табулюється для цілих $n$ і деяких значень $i$. В інших випадках обчислюється безпосередньо.

Мають місце наступні властивості коефіцієнта зведення:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} a_{n,i} = \frac{1}{i}; \qquad 2)\ \lim_{i\to\infty} a_{n,i} = 0. \qquad (4.5)$$

**Приклад 4.1.** Створюється фонд. Внески робляться один раз наприкінці року по 100 тис. грн протягом трьох років. На зібрані кошти нараховуються 36% річних у кінці року. Знайти розмір фонду на кінець утворення.

***Розв'язання.*** У задачі запитується про розмір нарощеної суми, тому скористаємося формулою (4.1):

$$S = 100 \cdot \frac{(1+0,36)^3 - 1}{0,36} = 420\ 960 \text{ грн.}$$

***Загальною рентою*** називається рента, в якій член ренти сплачується $p$ разів на рік рівними частинами, а нарахування відсотків відбувається $m$ разів на рік. Нарощена сума $S$ і величина теперішньої вартості загальної ренти $A$ (теперішня величина) знаходяться за формулами:

$$S = R\,\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right]}; \qquad A = R\,\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right]}. \qquad (4.6)$$

***Примітка 1.*** У формулах (4.6) параметр $R$ задає ***річний*** платіж за рентою, тобто, якщо внески робляться $p$ раз на рік рівними частинами і величина даних внесків становить $\tilde{R}$, то величина члена ренти $R$ обчислюється за формулою: $R = p \cdot \tilde{R}$.

***Примітка 2.*** формули (4.6) використовуються при $p \neq m$. Якщо дана умова порушується, тобто маємо випадок $p = m$, то формули (4.6) набувають вигляду:

$$S = R\,\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}; \qquad A = R\,\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}. \tag{4.7}$$

**Приклад 4.2.** Створюється фонд. Внески робляться один раз наприкінці року по 100 тис. грн протягом трьох років. На зібрані кошти нараховуються 36% річних щоквартально. Знайти розмір фонду на кінець утворення. Порівняти з отриманими результатами прикладу 4.1.

***Розв'язання.*** Враховуючи, що в задачі йдеться про загальну ренту, де $m=4$, $p=1$, використаємо відповідну формулу (4.6) для знаходження нарощеної суми $S$:

$$S = 100\cdot\frac{\left(1+\frac{0,36}{4}\right)^{4\cdot 3}-1}{\left(1+\frac{0,36}{4}\right)^{4}-1} = 100\cdot\frac{1,09^{12}-1}{1,09^{4}-1} = 440\ 041 \text{ грн.}$$

Порівнюючи з результатами попереднього прикладу, можемо сказати, що частіше нарахування відсотків збільшує нарощену суму.

Розглянемо приклад ***вічної ренти***. Нагадаємо, що *вічна рента* – це послідовність платежів з необмеженою кількістю членів. Нарощена сума $S$ вічної ренти нескінченна, а теперішня величина $A$ знаходиться за формулою звичайної ренти (4.3) з урахуванням властивостей коефіцієнта зведення (4.5)

$$A_{\infty} = \frac{R}{i}. \tag{4.8}$$

З формули (4.8) випливає, що $R = A_{\infty}\, i$, тобто член вічної ренти дорівнює відсотку за рентою від її теперішньої величини. Формулу (4.8) використовують при капіталізації постійних доходів.

**Приклад 4.3.** Акція приносить сталий прибуток 0,43 грн щорічно. Яка її теперішня вартість, якщо діюча на ринку ставка за кредитами – 30% річних складних?

***Розв'язання.*** За умовою задачі $R$ = 0,43; $i$ = 0,3. Враховуючи, що акція може вважатися прикладом вічної ренти, для знаходження теперішньої величини використаємо формулу (4.8): $A = \frac{0,43}{0,3} = 1,43$ грн.

### 4.2. Визначення параметрів фінансових рент

Часто виникає задача, знаючи $A$ або $S$, знайти один з параметрів ренти при відомих інших. Наведемо приклади.

**1.** Якщо відомі $A$ або $S$, а також ставка $i$ і член ренти $R$, то термін звичайної фінансової ренти знаходиться відповідно за формулами:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)}; \qquad n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{Ai}{R}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{4.9}$$

Причому остання рівність має місце за умови $1 - \frac{Ai}{R} > 0$, а отже, при $Ai < R$.

**2.** Якщо відомі $A$ або $S$, а також $n$ та $i$, то член ренти $R$ знаходиться за формулами:

$$R = \frac{S}{s_{n,i}}, \qquad \text{де} \qquad s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{4.10}$$

$$R = \frac{A}{a_{n,i}}, \qquad \text{де} \qquad a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^n}{i}. \tag{4.11}$$

**3.** Наступні формули дозволяють знаходити $S$ та $s_{n,i}$ за відомими $A$ та $a_{n,i}$, і навпаки:

$$S = A(1+i)^n; \qquad s_{n,i} = a_{n,i}(1+i)^n. \tag{4.12}$$

$$A = S(1+i)^{-n}; \qquad a_{n,i} = s_{n,i}(1+i)^{-n}. \tag{4.13}$$

**Приклад 4.4.** Сума інвестицій 100 тис. грн, віддача 25 тис. грн щорічно. На борг нараховують 20% річних. За який термін окупляться інвестиції?

***Розв'язання.*** Очевидно, якщо теперішня величина надходжень більша за інвестиції, то маємо їх окупність. За умовою задачі $A$ = 100 тис. грн, $R$ = 25 тис. грн, $i$ = 0,2; отже, використовуючи формулу $n = -\frac{\ln\left(1-\frac{Ai}{R}\right)}{\ln(1+i)}$ знаходимо:

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{100\cdot 0,2}{25}\right)}{\ln(1+0,2)} = \frac{-\ln 0,2}{\ln 1,2} = 8,83 \text{ року.}$$

Як бачимо, інвестиції окупляться майже за 9 років. З даної задачі випливає, що доцільність інвестицій залежить від величини члена ренти, якби $R$ = 20 тис. грн, то інвестиції б не окупилися.

### 4.3. Конверсія фінансових рент. Зміна параметрів рент

На практиці часто виникає ситуація, коли на етапі розробки умов контракту або навіть під час його виконання необхідно змінити умови виплати ренти. Іншими словами, йдеться про *конвертування умов*, які передбачаються при виплаті фінансової ренти.

Найпростішими випадками конверсії є ***викуп ренти*** (заміна ренти разовою виплатою), ***розстрочення виплати*** (заміна разового платежу рентою). До складнішого випадку належить ***консолідація рент*** (об'єднання декількох рент з різними характеристиками в одну).

До *загального випадку* конверсії рент належить заміна ренти з одними умовами на ренту з іншими умовами, наприклад, термінової ренти на відкладену, річної – на щоквартальну тощо. Якщо передбачається, що конверсія ренти не приводить до зміни фінансових наслідків для кожної із сторін, що бере участь в угоді, то конверсія повинна ґрунтуватися на принципі фінансової еквівалентності.

Зміна хоча б однієї умови ренти означає по суті заміну однієї ренти іншою. Як уже зазначалося, дана заміна повинна базуватися на принципі фінансової еквівалентності, з цього випливає ***рівність теперішніх величин*** обох рент ($A_1 = A_2$). Що стосується відсоткової ставки, то вона може бути збережена або змінена. Наприклад, кредитор в обмін на збільшення терміну кредиту може вимагати деякого збільшення відсоткової ставки.

Розглянемо кілька випадків заміни параметрів рент.

**1.** ***Заміна термінової ренти на відкладену.***

Нехай маємо термінову ренту постнумерандо з параметрами $R_1$, $n_1$, відсоткова ставка якої $i$. Необхідно відстрочити виплату даної ренти на $t$ років. Іншими словами, термінова рента замінюється на відкладену з параметрами $R_2$, $n_2$, $t$ ($t$ не входить у термін ренти).

Якщо $n_2 = n_1 = n$, то з рівності $A_1 = A_2$ випливає наступна рівність:

$$R_2 = R_1(1+i)^t. \tag{4.14}$$

У загальному випадку, при $n_2 \neq n_1$, маємо таку рівність для визначення члена нової ренти:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}}(1+i)^t. \tag{4.15}$$

**2.** ***Заміна річної ренти на*** $p$***-термінову.***

Нехай річну термінову ренту з параметрами $R_1$, $n_1$ потрібно замінити на $p$-термінову з параметрами $R_2$, $n_2$, $p$. Якщо задано термін зміненої ренти, її періодичність, а також ставка відсотків, то член нової ренти визначається за формулою:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1,i}}{a^{(p)}_{n_2,i}}, \qquad \text{де} \qquad a^{(p)}_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}. \tag{4.16}$$

Причому, якщо $n_2 = n_1 = n$, то

$$R_2 = R_1 \frac{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}{i}. \tag{4.17}$$

**Приклад 4.5.** Нехай термінова рента постнумерандо з умовами $R_1$ = 2 млн грн, і терміном 8 років відкладається на 2 роки без зміни терміну самої ренти. Відсоткова ставка – 20% річних. Знайти величину платежу нової ренти.

***Розв'язання.*** Оскільки термін старої ренти збігається з терміном нової ренти і дорівнює $n$ = 8, скористаємося (4.14):

$R_2 = 2 \cdot 10^6 \cdot (1+0,2)^2$ = $2{,}88 \cdot 10^6$ грн.

Як бачимо, член нової ренти дорівнює нарощеному за час $t$ = 2 роки члену старої ренти і, таким чином, відмова від виплати термінової ренти збільшує щорічні виплати на $0{,}88 \cdot 10^6$ грн.

### 4.4. Планування погашення заборгованості

Умови кредитування містять: термін позики, тривалість пільгового періоду, рівень відсоткової ставки, метод погашення відсотків і основної суми боргу (метод погашення боргу).

За методами погашення боргу всі позики поділяють на такі види:

1) позика без обов'язкового погашення (боржник сплачує лише відсотки, не повертаючи позиченої суми);
2) позика з обов'язковим погашенням в один строк (боржник повертає позичену суму в домовлений строк і сплачує відсотки);

3) позика з обов’язковим погашенням у декілька термінів (боржник повертає зазначену суму частинами і сплачує відсотки).

Для боржника і кредитора на кожен момент виплат боргу важливо знати залишок по сплаті основного боргу і відсотків за ним. Для цього потрібно скласти *план погашення боргу*.

Розглянемо планування погашення заборгованості при погашенні боргу в декілька термінів. Такий метод погашення називають *амортизацією боргу* і часто використовують у практичній фінансовій діяльності, особливо при значних розмірах заборгованості.

Він здійснюється різними способами:

1) рівними сумами основного боргу;

2) рівними терміновими виплатами;

3) змінними терміновими виплатами.

При плануванні погашення заборгованості визначають періодичні виплати, які називають *терміновими виплатами* або *витратами з обслуговування боргу* (скорочено – *витратами за позикою*). Термінові виплати складаються із суми, яка йде на погашення основного боргу, і суми відсоткових платежів.

Введемо наступні позначення: $D$ – сума боргу; $g$ – ставка складних відсотків позики, $n$ – загальний термін позики (у роках); $Y$ – термінова виплата, $R$ – витрати, які йдуть на погашення основної суми боргу, $I$ – сума відсоткових платежів.

Розглянемо випадок, коли погашення боргу відбувається *рівними сумами основного боргу*.

Нехай борг сумою $D$ виплачується протягом $n$ років, тоді щорічна виплата основної суми боргу становитиме $\frac{D}{n}$ Очевидно, що після кожної виплати розмір боргу буде скорочуватися: $D$, $D-\frac{D}{n}$, $D-2\frac{D}{n}$,…, а отже, і зменшуватимуться відсоткові суми, які потрібно буде виплачувати, бо вони нараховуються на залишок боргу. Припустимо, що відсотки нараховуються один раз на рік, наприкінці року за ставкою $g$, тоді отримаємо відповідні суми відсоткових платежів: за перший рік – $I_1 = D\,g$, за другий рік – $I_2 = \left(D-\frac{D}{n}\right)g$ , за третій рік – $I_3 = \left(D-\frac{2D}{n}\right)g$ ,…, за $n$-й рік – $I_n = \left(D-\frac{(n-1)D}{n}\right)g = \frac{D}{n}g$ .

Термінова виплата на кінець першого року становитиме: $Y_1 = D\,g+\frac{D}{n}$ на кінець другого року: $Y_2 = D_1 g+\frac{D}{n}$, де $D_1 = D-\frac{D}{n}$ і т.д., на кінець $t$ року матимемо: $Y_t = D_{t-1}\,g+\frac{D}{n}$. Залишок основної суми боргу можна визначити за формулою: $D_t = D_{t-1}\cdot\frac{n-1}{n}$.

Якщо борг виплачується $p$ раз на рік і з такою ж частотою нараховуються відсотки за ставкою $\frac{g}{p}$, то формули для обчислення термінових виплат та залишку основної суми боргу відповідно набувають вигляду:

$$Y_t = \frac{D_{t-1}\cdot g}{p}+\frac{D}{pn}, \quad t=1,...,pn; \qquad D_t = D_{t-1}\cdot\frac{pn-1}{pn}.$$

**Приклад 6.6.** Борг 200 тис. грн потрібно виплатити протягом 4 років. Виплати відбуваються один раз на рік, постнумерандо, відсотки за кредит нараховуються за ставкою 10% річних. Скласти план погашення заборгованості, якщо виплати відбуваються рівними частинами основної суми боргу.

***Розв’язання.*** За умовою задачі $D$ = 200 000 грн, $n$ = 4 роки, $g$ = 10% = 0,1. Враховуючи, що погашення заборгованості відбувається рівними частинами основної суми боргу, маємо:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \frac{200\,000}{4} = 50\,000 \text{ грн.}$$

Відповідно: $D_1 = D$ = 200 000 грн, $D_2$ = 200 000 – 50 000 = 150 000 грн, $D_3$ = 150 000 – 50 000 = 100 000 грн, $D_4$ = 100 000 – 50 000 = 50 000 грн. Суми відсоткових грошей, які нараховуватимуться після кожного періоду, обчислюються за формулою: $I_i = D_i \cdot g$. Звідси $I_1 =$200 000$\cdot$ 0,1 = 20 000 грн, $I_2 =$ 150 000$\cdot$ 0,1 = 15 000 грн, $I_3 =$100 000$\cdot$ 0,1 = 10 000 грн, $I_4 =$50 000$\cdot$ 0,1 = 10 000 грн.

Згідно означення, термінові виплати визначаються як сума відсоткових грошей та платежів з основної суми боргу за відповідний період, тобто $Y_i = I_i + R_i$. Отже, очевидно, що $Y_1 =$70 000 грн, $Y_2 =$65 000 грн, $Y_3 =$60 000 грн, $Y_4 =$55 000 грн.

Використовуючи отримані вище результати, запишемо план погашення заборгованості у вигляді наступної таблиці (*табл. 4.1*).

*Таблиця 4.1*

| **Рік** | **Залишок боргу на початок року, $D_i$** | **Термінові виплати, $Y_i$** | **Виплата відсотків, $I_i$** | **Погашення основної суми боргу, $R_i$** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 200 000 | 70 000 | 20 000 | 50 000 |
| 2 | 150 000 | 65 000 | 15 000 | 50 000 |
| 3 | 100 000 | 60 000 | 10 000 | 50 000 |
| 4 | 50 000 | 55 000 | 5 000 | 50 000 |
| | | | | 200 000 |

***Примітка.*** Аналізуючи наведений вище метод, можемо сказати на його користь, що він є зручним при проведенні математичних розрахунків, а з недоліків можна відзначити те, що основне фінансове навантаження припадає на першу половину кредитної угоди, а це не завжди є зручною умовою для боржника.

При погашенні боргу *рівними терміновими виплатами* сплачується стала термінова виплата $Y$. Частина йде у погашення боргу, частина – у погашення відсотків:

$$Y = D_i\, g + R_i\,, \qquad (4.18)$$

де $D_i$ – залишок боргу на початок періоду $i$;

$R_i$ – виплата основного боргу в періоді $i$.

На початок першого періоду ($i$ = 1) $D_1 = D$. Прирівнюючи суму боргу до теперішньої величини виплат по ньому і використовуючи формулу для знаходження теперішньої величини звичайної ренти (6.3), можемо записати:

$$D = Y\, a_{n,g}\,.$$

Звідси отримуємо:

$$Y = \frac{D}{a_{n,g}}\,, \qquad \text{де} \qquad a_{n,g} = \frac{1-(1+g)^{-n}}{g}\,. \qquad (4.19)$$

З формули (4.17) з урахуванням (4.18) послідовно знаходимо $R_i$ ($i = \overline{1,n}$):

$$R_1 = Y - Dg = Y - Y \cdot a_{n,g}\, g = Y v^n, \qquad \text{де} \qquad v = \frac{1}{1+g};$$

$$R_2 = Y v^{n-1};$$

$$R_3 = Y v^{n-2}; \qquad (4.20)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n = Y v\,.$$

**Приклад 4.7.** Надано позику в розмірі 200 тис. грн на 4 роки під 10% річних. Погашення відбувається рівними терміновими виплатами. Скласти план погашення боргу.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $D$ = 200 000 грн, $n$ = 4 роки, $g$ = 0,1. Згідно з (6.19) знайдемо величину термінової виплати $Y$:

$$Y = \frac{200\,000}{a_{4,10}} = \frac{200\,000}{\frac{1-(1+0,1)^{-4}}{0,1}} = \frac{200000}{3,1698654} = 63\ 094,16 \text{ грн.}$$

Використовуючи формули (4.20), знайдемо суми, які йдуть на виплати основної суми боргу наприкінці кожного року:

$$R_1 = \frac{63\ 094,16}{1,1^4} = 43094,16 \text{ грн; } R_2 = \frac{63\ 094,16}{1,1^3} = 47\,403,58 \text{ грн;}$$

$$R_3 = \frac{63\ 094,16}{1,1^2} = 52143,93 \text{ грн; } R_4 = \frac{63\ 094,16}{1,1} = 57\,358,33 \text{ грн.}$$

Використовуючи отримані вище результати, запишемо план погашення заборгованості у вигляді таблиці (*табл. 4.2*).

*Таблиця 4.2*

| **Рік** | **Залишок боргу на початок року,** $D_i$ | **Термінові виплати,** $Y$ | **Виплата відсотків,** $I_i$ | **Погашення основної суми боргу,** $R_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 200 000 | 63 094,16 | 20 000 | 43 094,16 |
| 2 | 156 905,84 | 63 094,16 | 15 690,58 | 47 403,58 |
| 3 | 109 502,26 | 63 094,16 | 10 950,23 | 52 143,93 |
| 4 | 57 358,33 | 63 094,16 | 5 735,83 | 57 358,33 |
| | | | | 200 000 |

Очевидно, що виплата заборгованості пов'язана з надходженням грошових коштів з певних джерел і може залежати від ряду обставин. В зв'язку з цим не завжди є зручною умова $Y = const$, особливо коли надходження коштів зменшується. В цьому випадку розглядають погашення боргу за рахунок *змінних термінових виплат*, які зменшуються в часі, причому зменшення є постійною величиною, яка називається *заданим річним темпом росту платежів* і позначається $q$. Очевидно, що у разі зменшення термінових виплат $q < 1$.

Якщо витрати з боргу за перший рік позики становлять $Y$, то наприкінці другого року ми маємо сплатити $Y \cdot q$, наприкінці третього – $Y \cdot q^2$ і т.д., наприкінці *n*-го року – $Y \cdot q^{n-1}$, тобто ряд термінових виплат становить геометричну прогресію зі знаменником $q$. Прирівнюючи теперішню вартість даної ренти до суми початкового боргу, отримаємо формулу для знаходження термінової виплати $Y$:

$$Y = D\,\frac{q-(1+g)}{\left(\dfrac{q}{1+g}\right)^{n}-1}. \qquad (4.21)$$

**Приклад 4.8.** Надано позику в розмірі 200 тис. грн на 4 роки під 10% річних. Погашення відбувається змінними терміновими виплатами, причому кожна виплата на 20% менша за попередню.

Складати план погашення боргу. Порівняти отримані результати з результатами задач 4.6 та 4.7. Зробити висновки.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $D$ = 200 000 грн, $n$ = 4 роки, $g$ = 10% = 0,1. Якщо витрати з боргу за перший рік позики становлять $Y_1 = Y$, то наприкінці другого року ми маємо сплатити згідно умови задачі $Y_2 = Y - 0,2Y = 0,8\,Y$, наприкінці третього – $Y_3 = Y_2 - 0,2Y_2 = 0,8Y_2 = 0,8^2\,Y$ і т.д.

З наведеного вище очевидно, що $q = 0{,}8$, а отже, використовуючи формулу (4.21), ми можемо знайти величину термінової виплати $Y$:

$$Y_1 = Y = 200\,000 \cdot \frac{0{,}8-(1+0{,}1)}{\left(\frac{0{,}8}{1+0{,}1}\right)^4 - 1} \approx 200\ 000 \cdot \frac{-0{,}3}{-0{,}72023769} \approx 83\ 305{,}832 \text{ грн.}$$

$Y_2 = 0{,}8Y = 66\ 664{,}666$ грн;

$Y_3 = 0{,}8Y_2 = 0{,}8^2 Y = 53\ 315{,}732$ грн;

$Y_4 = 0{,}8Y_3 = 0{,}8^3 Y = 42\ 652{,}586$ грн.

Враховуючи, що $g = 0{,}1$ знаходимо величину відсоткових грошей, яка нараховується на залишок основної суми боргу у відповідному періоді:
$I_1 = 200\ 000$ грн; $I_2 = 13\ 669{,}417$ грн; $I_3 = 8\ 369{,}892$ грн; $I_4 = 3\ 875{,}308$ грн.

Використовуючи отримані вище результати, запишемо план погашення заборгованості у вигляді таблиці (*табл. 4.3*).

*Таблиця 4.3*

| **Рік** | **Залишок боргу на початок року,** $D_i$ | **Термінові виплати,** $Y$ | **Виплата відсотків,** $I_i$ | **Погашення основної суми боргу,** $R_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 200 000 | 83 305,832 | 20 000 | 63 305,832 |
| 2 | 136 694,168 | 66 664,666 | 13 669,417 | 52 995,249 |
| 3 | 83 698,919 | 53 315,732 | 8 369,892 | 44 945,840 |
| 4 | 38 753,079 | 42 652,586 | 3 875,308 | 38 777,278 |
| | | | | ≈ 200 000 |

Порівнюючи методи погашення заборгованості, які розглянуті в прикладах 4.6 – 4.8, можемо сказати, що найбільш економічно вигідним є третій метод, при якому погашення боргу відбувається змінними терміновими виплатами. Адже згідно даного методу боржник виплачує найменшу суму відсоткових грошей. Але як і в першому методі основне фінансове навантаження припадає на першу половину кредитної угоди.

Якщо відомі суми певних надходжень, а також терміни даних надходжень, то зручно складати план погашення заборгованості за такою схемою, в якій *термінові виплати співпадають з величиною прогнозованих сум*, які надходять у визначений момент часу.

Очевидно, що в даному випадку ми маємо справу зі способом погашення за рахунок *змінних* термінових виплат. Тільки, на відміну від попереднього випадку, зміна термінової виплати (річний темп росту платежів) не є сталою величиною. Крім того, розмір останньої термінової виплати не задається, а визначається як сума залишку боргу на початок останнього періоду та відсоткових грошей.

**Приклад 4.9.** Надано позику в розмірі 200 тис. грн під 10% річних. Погасити заборгованість було вирішено за спеціальним графіком за 4 роки. Суми витрат з обслуговування боргу по рокам становили відповідно: 50 тис. грн, 60 тис. грн та 70 тис. грн. Скласти план погашення боргу. Результати записати у вигляді таблиці.

***Розв'язання.*** За умовою задачі $D = D_1 = 200\,000$ грн, $g = 10\% = 0{,}1$, $n = 4$ роки, $Y_1 = 50\,000$ грн, $Y_2 = 60\,000$ грн, $Y_3 = 70\,000$ грн. Відповідно: $I_1 = D_1 \cdot g = 20\,000$ грн, звідси $D_2 = D_1 - (Y_1 - I_1) = 170\,000$ грн.

За аналогією знаходимо: $I_2 = 17\,000$ грн, $D_3 = 127\,000$ грн, $I_3 = 12\,700$ грн, $D_4 = 69\,700$ грн, $I_4 = 6\,970$ грн. Враховуючи, що останнє погашення основної суми боргу співпадає з останнім залишком боргу, тобто $D_4 = R_4$, використовуючи формулу $Y_i = I_i + R_i$ знаходимо $Y_4 =$ 76 670 грн.

Звідси маємо таблицю (*табл. 4.4*).

*Таблиця 4.4*

| **Рік** | **Залишок боргу на початок року,** $D_i$ | **Термінові виплати,** $Y_i$ | **Виплата відсотків,** $I_i$ | **Погашення основної суми боргу,** $R_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 200 000 | 50 000 | 20 000 | 30 000 |
| 2 | 170 000 | 60 000 | 17 000 | 43 000 |
| 3 | 127 000 | 70 000 | 12 700 | 57 300 |
| 4 | 69 700 | 76 670 | 6 970 | 69 700 |
| | | | | 200 000 |

Розглянемо випадок *іпотечної позики*, як однієї з найбільш поширених видів позик. Дані позики набули широкого розповсюдження в країнах з розвинутою ринковою економікою як одне з важливих джерел довгострокового фінансування. Цей вид позики передбачає отримання власником нерухомості кредиту під заставу майна. У разі неповернення позики в обумовлений термін майно стає власністю кредитора. Розмір позики не перевищує 70%—75% вартості майна, що заставляється.

Традиційна іпотека погашається рівними щомісячними термінововими виплатами. Для розрахунку величини щомісячної виплати використовують формулу

$$Y = \frac{D\frac{g}{m}\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn}}{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn} - 1}, \qquad (4.22)$$

де $n$ – термін боргу (вимірюється у роках), $m$ – кількість періодів нарахування відсотків у році і кількість виплат у році.

Розрахунок суми основного боргу, що залишився в $i$-му періоді, проводиться за формулою:

$$S_i = D\frac{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn} - \left(1+\frac{g}{m}\right)^{i-1}}{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn} - 1}. \qquad (4.23)$$

Окрім традиційної іпотеки, використовують позики зі змінною відсотковою ставкою і позики зі сталим збільшенням витрат за обслуговування боргу.

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ З ТЕМИ 4

**1.** У чому сутність фінансової ренти?

**2.** Якими параметрами характеризується фінансова рента?

**3.** Які види фінансових рент ви знаєте? Коротко охарактеризуйте кожну з них.

**4.** Назвіть узагальнені характеристики фінансових рент і вкажіть способи їх визначення.

**5.** Вкажіть сутність величин, що входять до формул для визначення:

– нарощеної величини постійної фінансової ренти з виплатами наприкінці кожного року;

– сучасної величини річної звичайної ренти.

**6.** Дайте означення члена ренти і вкажіть способи його знаходження:

– при заданому значенні нарощеної суми;

– при заданому значенні сучасної величини.

**7.** Назвіть відомі вам види конверсій фінансових рент. Як знайти величину члена нової ренти при заміні однієї ренти на іншу? Розглянути випадки $n_2 = n_1 = n$ та $n_2 \neq n_1$.

**8.** Які існують способи погашення боргу і в чому їх відмінність?

**9.** Що таке план погашення боргу і як він складається при погашенні боргу рівними терміновими виплатами?

**10.** Розкрийте суть іпотечної позики. Яким чином відбувається погашення традиційної іпотечної позики?

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ З ТЕМИ 4

**1.** Працівник перераховує у банк 100 грн щомісячно. На цю суму щомісячно нараховується 12% річних. Яка сума накопичиться на рахунку працівника за 4 роки?

**2.** Ціна автомобіля 50 тис. грн. Річна ставка банку 20%. Нарахування щорічне. Яку суму треба вносити щорічно, щоб через 12 років зібрати гроші для придбання автомобіля?

**3.** Інвестиції передбачають щорічне виділення коштів по 100 тис. грн протягом чотирьох років. Діюча ринкова ставка довгострокових кредитів дорівнює 48% складних відсотків річних. Знайти теперішню вартість потоку платежів.

**4.** У банк щороку вноситься 1 500 грн. Річна відсоткова ставка 4%. Визначити суму вкладів через 20 років, якщо нарахування відсотків відбувається один раз на рік.

**5.** Яка сума забезпечить періодичні виплати у розмірі 15 000 грн протягом восьми років, якщо на ці вклади нараховуватимуться відсотки за ставкою 12% і виплати проводитимуться наприкінці року?

**6.** Ціна автомобіля 50 тис. грн. Річна ставка банку 20%. Нарахування відсотків щомісячне. Яку суму треба вносити щомісячно, щоб через 12 років зібрати гроші для придбання автомобіля?

**7.** Продається фінансове зобов'язання сплачувати щорічно наприкінці року протягом п'яти років по 2 500 грн. Яка теперішня вартість цього зобов'язання, якщо діюча ринкова ставка за довгостроковими кредитами — 30% річних?

**8.** Інвестор пропонує підприємцю інвестиції 10 000 грн, під 35% річних при терміні окупності 5 років. Яким повинен бути сталий щорічний дохід, щоб виконати вимоги інвестора?

**9.** Дається позика 120 000 грн на 5 років під 20% річних. Погашення рівними терміновими виплатами наприкінці року. Скласти план погашення.

**10.** За 7 років треба створити фонд 100 тис. грн Для цього щорічно виділяють 10 тис. грн. Якою повинна бути ставка, щоб фонд утворився?

**11.** За який термін окупляться інвестиції 10 000 грн, якщо планується щорічна віддача по 3 500 грн, а діюча ринкова ставка за кредитами — 30%?

**12.** Акція приносить дохід 30 грн щорічно. Яка її вартість, якщо ринкова ставка за кредитами – 20%?

**13.** Борг у розмірі 10 000 грн потрібно повернути протягом 5 років. Відсотки за кредит нараховуються за ставкою 15% річних. Виплати та нарахування відсотків відбуваються постнумерандо.

Скласти план погашення заборгованості, якщо виплати відбуваються рівними частинами основного боргу.

**14.** В умовах попередньої задачі скласти план погашення заборгованості, якщо виплати відбуваються рівними терміновими виплатами. Які переваги і недоліки даного методу у порівнянні з попереднім?

**15.** В умовах задачі **13** скласти план погашення заборгованості, якщо виплати відбуваються змінними терміновими виплатами, причому кожна наступна виплата менша за попередню на 20%. Які переваги і недоліки даного методу у порівнянні з методами, розглянутими у задачах **13** та **14**?

**16.** Борг в розмірі 100 000 грн вирішено погасити за спеціальним графіком за 4 роки – витрати за боргом відповідно становлять за роками: 40 000 грн, 20 000 грн, 30 000 грн. Решта виплачується наприкінці четвертого року.

Складти план погашення заборгованості, якщо відсоткова ставка за кредитом становить 10% річних.

# Тема 5. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

## 5.1. Конверсія валюти

Якщо власник має гроші у гривнях або у вільно конвертованій (convertible) валюті (вільно конвертована валюта (ВКВ) – це валюта, яка можне бути вільно обмінена/конвертована на іншу), то він може їх наростити, поклавши на депозит, вибравши наступний спосіб:

- безпосередньо покласти гроші на депозит (гривня нарощується у гривнях або ВКВ нарощується у ВКВ);
- спочатку обміняти гроші на іншу валюту (гривня конвертується у ВКВ або ВКВ конвертується у гривнях), тоді покласти на депозит, а наприкінці терміну депозитної угоди отриману нарощену валюту обміняти на початкову валюту (ВКВ конвертується у гривнях або гривня конвертується у ВКВ).

Таким чином, маємо чотири варіанти нарощення грошей. Два варіанти без конвертації валюти:

- гривня нарощується у гривнях;

- ВКВ нарощується ВКВ.

Та два варіанти з подвійною конвертацією валюти (цей процес і називається ***конверсією*** (conversion) валюти):

- гривня конвертується у ВКВ, яка нарощується у ВКВ, а потім конвертується у гривнях;
- ВКВ конвертується у гривнях, яка нарощується у гривнях, а потім конвертується у ВКВ.

Оскільки при нарощенні грошей з подвійною конвертацією валюти за час фінансової операції може відбуватися зміна курсу конвертації, то постає питання: який варіант забезпечує більший приріст грошей?

Розглянемо спочатку такий варіант: ***гривня конвертується у ВКВ, яка нарощується у ВКВ, а потім конвертується у гривню.***

Коли нарощення відбувається *за простими відсотками*, нарощена сума $S_K$ у гривнях буде дорівнювати:

$$S_K = \frac{P}{K_0}(1+i_B n)K_t, \tag{5.1}$$

де $P$ – сума депозиту у гривнях;

$K_0$ – курс обміну ВКВ у гривнях на початок фінансової операції;

$i_B$ – ставка простих відсотків для конкретного виду ВКВ;

$n$ – строк депозиту;

$K_t$ – курс обміну ВКВ у гривні наприкінці фінансової операції.

Без конверсії (гривня нарощується у гривнях) нарощена сума буде дорівнювати:

$$S = P(1+in). \tag{5.2}$$

Кращим є той варіант, який забезпечує більший приріст грошей: $S_K < S$ чи $S_K > S$. Обидва варіанти будуть еквівалентні ($S_K = S$), якщо курс $K_t$ обміну

ВКВ у гривні наприкінці фінансової операції дорівнює граничному значенню $\bar{K}_t$. Прирівнявши (5.1) та (5.2), отримуємо $\bar{K}_t$:

$$\bar{K}_t = \frac{K_0(1+in)}{1+i_B n}. \qquad (5.3)$$

При цьому, якщо курс обміну $K_t < \bar{K}_t$, то подвійна конвертація валюти, як видно з формули (5.1), дає гірший результат у порівнянні з випадком, коли конверсія валют не робиться.

**Приклад 5.1.** Планується розмістити на депозит терміном 6 місяців 10 000 грн. На початку здійснення депозитної операції долар продавали за курсом $K_0$ = 25 грн / \$. Річна відсоткова ставка депозиту складає 20% за гривневим депозитом та 10% за доларовим депозитом.

Який варіант нарощення грошей є кращим, якщо застосовуються прості відсотки, а курс купівлі долара зросте за 6 місяців на 5 грн і стане $K_t$ =30 грн / \$?

***Розв'язання.*** Коли нарощення відбувається з конверсією валюти, тоді нарощена сума $S_K$ у гривнях дорівнюватиме:

$$S_K = \frac{P}{K_0}(1+i_B n)K_t = \frac{10\,000}{25}\cdot(1+0{,}1\cdot\frac{1}{2})\cdot 30 = 12\,600 \text{ грн.}$$

Без конверсії нарощена сума дорівнюватиме:

$$S = P(1+in) = 10\,000\cdot(1+0{,}2\cdot\frac{1}{2}) = 11\,000 \text{ грн.}$$

Оскільки $S_K > S$, то нарощення з конверсією валюти є більш вигідним.

Розглянемо інший варіант: ***ВКВ конвертується у гривню, яка нарощується у гривнях, а потім конвертується у ВКВ.***

Коли нарощення відбувається *за простими відсотками*, нарощена сума $S_K$ у ВКВ дорівнюватиме:

$$S_K = PK_0(1+in)\frac{1}{K_t}. \qquad (5.4)$$

Без конверсії (ВКВ нарощується у ВКВ) нарощена сума у ВКВ дорівнюватиме:

$$S = P(1+i_B n). \qquad (5.5)$$

Обидва варіанти будуть еквівалентні ($S_K = S$), якщо курс $K_t$ обміну ВКВ у гривні наприкінці фінансової операції дорівнює граничному значенню $\bar{K}_t$. Прирівнявши (5.4) та (5.5), отримуємо $\bar{K}_t$:

$$\bar{K}_t = \frac{K_0(1+in)}{1+i_B n}. \qquad (5.6)$$

Як бачимо, формули (5.3) та (5.6) співпадають. При цьому, коли курс обміну $K_t < \bar{K}_t$, то, як випливає з формули (5.3), подвійна конвертація валюти дає кращий результат, в порівнянні з випадком, коли конверсія валют не робиться.

**Приклад 5.2.** Планується розмістити депозит 1 000 $ терміном на один рік. На початок депозитної операції долар продавали за курсом $K_0$ = 20 грн / $. Річна відсоткова ставка депозиту складає 0,3 за гривневим депозитом та 0,15 за доларовим депозитом.

Який варіант нарощення грошей є кращим, якщо застосовуються прості відсотки, а курс купівлі долара через рік прогнозується до рівня $K_t$ = 26 грн / $? При яких значеннях $K_t$ конверсія валюти дає кращий результат, у порівнянні з випадком, коли конвертація валют не робиться?

***Розв'язання.*** Коли нарощення відбувається з конверсією валюти, тоді нарощена сума $S_K$ у доларах дорівнюватиме:

$$S_K = PK_0(1+in)\frac{1}{K_t} = 1000 \cdot 20 \cdot (1+0{,}3) \cdot \frac{1}{26} = 1000\,\$.$$

Без конвертації нарощена сума дорівнюватиме:

$$S = P(1+i_B n) = 1000\cdot(1+0{,}15) = 1\,500\,\$.$$

Оскільки $S_K < S$, то нарощення з конверсією валюти є менш вигідним. За формулою (5.6) знаходимо граничне значення курсу продажу долара $\bar{K}_t$

$$\bar{K}_t = \frac{K_0(1+i\,n)}{1+i_B n} = \frac{20\cdot(1+0{,}3)}{1+0{,}15} = 22{,}61.$$

Коли курс обміну $K_t < \bar{K}_t$ = 22,61, тоді подвійна конвертація валюти для прикладу, який розглядається, дає кращий результат, у порівнянні з випадком, коли конверсія валют не робиться.

Розглянемо випадок, коли ***гривня конвертується у ВКВ, яка нарощується у ВКВ, а потім конвертується у гривню***, але нарощення відбувається *за складними відсотками*. У цьому випадку нарощена сума $S_K$ у ВКВ дорівнюватиме:

$$S_K = \frac{P}{K_0}(1+i_B)^n K_t. \qquad (5.7)$$

Без конверсії (гривня нарощується у гривнях) нарощена сума буде дорівнювати:

$$S = P(1+i)^n. \qquad (5.8)$$

При цьому, коли курс обміну $K_t < \bar{K}_t$, подвійна конвертація валюти дає гірший результат, у порівнянні з випадком, коли конверсія валют не робиться. Це видно з формули (5.6). Прирівнявши (5.7) та (5.8), отримуємо граничне значення $\bar{K}_t$ курсу $K_t$ обміну ВКВ у гривні:

$$\bar{K}_t = \frac{K_0(1+i)^n}{(1+i_B)^n}. \qquad (5.9)$$

**Приклад 5.3.** Планується розмістити на 2 роки депозит 5 000 грн. На початок депозитної операції долар продавали за курсом $K_0$ = 20 грн / $. Річна відсоткова ставка складала 0,2 за гривневим депозитом та 0,1 за доларовим депозитом.

Який спосіб нарощення грошей є кращим, якщо застосовуються складні відсотки, а курс купівлі долара через два роки прогнозується до рівня $K_t = 30$ грн / $? При яких значеннях $K_t$ подвійна конвертація валюти дає кращий результат, у порівнянні з випадком, коли конверсія валют не робиться?

***Розв'язання.*** Коли нарощення відбувається з конверсією валюти, тоді нарощена сума $S_K$ у гривнях дорівнюватиме:

$$S_K = \frac{P}{K_0}(1+i_B)^n K_t = \frac{5000}{20}\cdot(1+0{,}1)^2\cdot 30 = 9075 \text{ грн.}$$

Без конверсії нарощена сума дорівнюватиме:

$$S = P(1+in) = 5000\cdot(1+0{,}2)^2 = 7\,200 \text{ грн.}$$

Оскільки $S_K > S$, то нарощення з конверсією валюти є більш вигідним. За формулою (5.9) знаходимо граничне значення курсу продажу долара $\bar{K}_t$

$$\bar{K}_t = \frac{K_0(1+i)^n}{(1+i_B)^n} = \frac{20\cdot(1+0{,}2)^2}{(1+0{,}1)^2} = 23{,}8.$$

Коли курс обміну $K_t < \bar{K}_t = 23{,}8$, конверсія валюти для прикладу, який розглядається, дає гірший результат, у порівнянні з випадком, коли конверсія валют не робиться. Це видно з формули (5.7): чим більше $K_t$, тим більша нарощена сума $S_K$.

Коли ВКВ конвертується у гривні, яка нарощується у гривнях, а потім конвертується у ВКВ, а нарощення відбувається за складними відсотками, нарощена сума $S_K$ у ВКВ буде дорівнювати:

$$S_K = PK_0(1+i)^n\cdot\frac{1}{K_t}. \qquad (5.10)$$

Без конверсії (ВКВ нарощується у ВКВ) нарощена сума у ВКВ дорівнюватиме:

$$S = P(1+i_B)^n. \qquad (5.11)$$

Обидва способи будуть еквівалентні ($S_K = S$), якщо курс $K_t$ обміну ВКВ у гривні наприкінці фінансової операції дорівнює граничному значенню $\bar{K}_t$. Прирівнявши (5.10) та (5.11), отримуємо:

$$\bar{K}_t = \frac{K_0(1+i)^n}{(1+i_B)^n} \qquad (5.12)$$

Формули (5.9) та (5.12) співпадають. Але при цьому, якщо курс обміну $K_t < \bar{K}_t$, то, як видно з формули (5.10), подвійна конвертація валюти дає кращий результат, у порівнянні з випадком, коли конверсія валют не робиться.

Доходність операції для власника ВКВ у вигляді річної ставки складних відсотків $i_e$, коли робиться конверсія валют, обчислюватися з рівняння еквівалентності (equation of value) результатів:

$$PK_0(1+i)^n \cdot \frac{1}{K_t} = P(1+i_e)^n. \qquad (5.13)$$

Еквівалентними, як це було зазначено раніше, вважаються результати фінансових операцій, які після приведення до одного моменту часу, виявляються рівними.

З рівняння (5.13) отримуємо:

$$i_e = \sqrt[n]{\frac{K_0}{K_t}} \cdot (1+i_B) - 1. \qquad (5.14)$$

З формули (5.14) виходить, що ефективність операції з конверсією ВКВ для власника ВКВ зростає, коли ВКВ стає дешевшою (величина $K_t$ зменшується).

Доходність операції для власника гривні у вигляді річної ставки складних відсотків $i_e$, коли робиться конверсія валют, буде знаходитися з рівняння:

$$\frac{P}{K_0} \cdot (1+i_B)^n K_t = P(1+i_e)^n. \qquad (5.15)$$

З рівняння (5.13) отримуємо:

$$i_e = \sqrt[n]{\frac{K_t}{K_0}} \cdot (1 + i_B) - 1. \tag{5.16}$$

З формули (5.16) виходить, що ефективність операції з конверсією ВКВ для власника гривні покращується, коли курс ВКВ зростає (величина $K_t$ збільшується).

**Приклад 5.4.** Власник грошей (грн) планує покласти їх на депозит на 3 роки. На початок депозитної операції долар продавали за курсом $K_0$ = 20 грн / $. Річна відсоткова ставка складає 0,2 за гривневим депозитом та 0,1 за доларовим депозитом.

Якою буде ефективність депозитної угоди, якщо застосовуються прості відсотки, а курс купівлі долара через три роки прогнозується до рівня $K_t$ = 30 грн / $?

***Розв'язання.*** Доходність операції для власника грошей (грн) у вигляді річної ставки простих відсотків $i_e$, коли робиться конверсія валют і нарощення відбувається за простими відсотками, буде знаходитися з рівняння:

$$\frac{P}{K_0} \cdot (1 + i_B)^n K_t = P(1 + i_e)^n.$$

З цього рівняння отримуємо:

$$i_e = \left( \frac{K_t}{K_0} \cdot (1 + i_B n) - 1 \right) \cdot \frac{1}{n}.$$

Підставляючи дані задачі, маємо:

$$i_e = \left( \frac{K_t}{K_0} \cdot (1 + i_B n) - 1 \right) \cdot \frac{1}{n} = \left( \frac{30}{20} \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 3) - 1 \right) \cdot \frac{1}{3} = 0{,}47.$$

Таким чином, депозит з конверсією валюти дає більшу ефективність, ніж депозит у гривнях, річна доходність якого дорівнює 0,2.

## 5.2. Консолідація та конверсія заборгованості

Зміна фінансової ситуації іноді спонукає одну сторону фінансової операції звернутися до іншої сторони з проханням змінити умови угоди, яка була укладена раніше.

***Консолідація*** (consolidation) заборгованості – це об'єднання окремих платежів $S_1,\ S_2,\ldots,S_m$ з термінами виплат $n_1, n_2,\ldots,\ n_m$ одним платежем у розмірі $S_0$ і одним терміном погашення заборгованості $n_0$.

Відповідно до принципу фінансової еквівалентності результати консолідації заборгованості, після зведення їх до одного моменту часу за відсотковою ставкою, що задовольняє обидві сторони, повинні давати однакові результати.

Таким чином, одна фінансова угода замінюється на основі принципу фінансової еквівалентності іншою, яка є беззбитковою для обох сторін. При цьому можливі дві постановки задачі:

1) задається термін погашення заборгованості $n_0$, а з рівняння еквівалентності (equation of value) знаходиться консолідований платіж $S_0$;

2) задається консолідований платіж $S_0$, а з рівняння еквівалентності знаходиться термін погашення заборгованості $n_0$.

Розглянемо першу задачу: знайдемо консолідований платіж $S_0$, при відомому терміні погашення заборгованості $n_0$. У загальному випадку деякі платежі $S_1,\ S_2,\ldots,S_j$ можуть мати терміни погашення менші, аніж термін погашення заборгованості $n_0$ $(n_j < n_0)$, а деякі $S_{j+1},\ S_{j+1},\ \ldots,\ S_m$ – більші за термін погашення заборгованості $n_0$ $(n_{j+1} > n_0)$.

Знайдемо суму всіх платежів у момент часу $n_0$. Для цього перші $j$ платежів потрібно наростити, а платежі з терміном $n_{j+1} > n_0$ потрібно дисконтувати. Відповідно до принципу фінансової еквівалентності ця сума і повинна дорівнювати консолідованому платежу $S_0$.

Тоді при застосуванні простих відсотків і відсоткової ставки $i$, що задовольняє обидві сторони, консолідований платіж $S_0$ буде дорівнювати:

$$S_0 = \sum_{k=1}^{j} S_k \left(1 + i(n_0 - n_k)\right) + \sum_{k=j+1}^{m} S_k \left(1 + i(n_k - n_0)\right)^{-1}. \qquad (5.17)$$

В окремому випадку, коли $n_0 > n_m$, немає платежів, які потрібно дисконтувати. Тоді консолідованій платіж $S_0$ дорівнює:

$$S_0 = \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1 + i(n_0 - n_k)\right) \qquad (5.18)$$

Якщо $n_0 < n_m$, відсутні платежі, які потрібно нарощувати. Тоді консолідованій платіж дорівнює:

$$S_0 = \sum_{k=j+1}^{m} S_k \left(1 + i(n_k - n_0)\right)^{-1}. \qquad (5.19)$$

**Приклад 5.5.** Підприємець отримав кредит, який він повинен погасити трьома платежами: перший – 40 тис. грн – погасити через 110 діб; другий – 20 тис. грн – погасити через 140 діб; третій – 30 тис. грн – погасити через 380 діб.

Зміна фінансової ситуації спонукала підприємця звернутися до кредитора з проханням консолідації платежів одним платежем з терміном погашення заборгованості $n_0$ = 200 діб.

Потрібно знайти розмір консолідованого платежу $S_0$. Нова угода, що задовольнила обидві сторони, була затверджена для простих відсотків і відсоткової ставки $i$ = 0,4. За умовою задачі застосовуються звичайні відсотки ($T$ = 360 днів).

***Розв'язання.*** Консолідований платіж $S_0$ знаходиться відповідно до (5.17):

$$S_0 = \sum_{k=1}^{j} S_k\left(1+i(n_0-n_k)\right) + \sum_{k=j+1}^{m} S_k\left(1+i(n_k-n_0)\right)^{-1} =$$

$$= 40\cdot\left(1+0,4\cdot\frac{90}{360}\right)+20\cdot\left(1+0,4\cdot\frac{60}{360}\right) + \frac{30}{1+0,4\cdot\frac{180}{360}} = 90,34 \text{ тис. грн.}$$

Консолідація платежів може проводитись на основі облікової відсоткової ставки, а також за складними відсотками. При цьому, у формулах (5.17), (5.18), (5.19) зміняться тільки множники нарощення та дисконтні множники.

**Приклад 5.6.** Підприємець отримав кредит, який він повинен віддати трьома платежами: перший – 40 тис. грн – погасити через 1 рік; другий – 60 тис. грн – погасити через 2 роки; третій – 100 тис. грн – погасити через 4 роки.

Зміна фінансової ситуації спонукала підприємця звернутися до кредитора з проханням консолідації платежів одним платежем з терміном погашення заборгованості $n_0$ = 3 роки.

Потрібно знайти розмір консолідованого платежу $S_0$. Нова угода, що задовольнила обидві сторони, була затверджена для складних відсотків і облікової ставки $d$ = 0.2.

***Розв'язання.*** Консолідований платіж $S_0$ знаходиться для складних відсотків і облікової ставки $d$ відповідно принципу фінансової еквівалентності з рівняння (5.17), де множники нарощення та дисконтні множники беруться для складних відсотків і облікової ставки $d$:

$$S_0 = \sum_{k=1}^{j} S_k(1-d)^{-(n_0-n_k)} + \sum_{k=j+1}^{m} S_k(1-d)^{(n_k-n_0)} =$$

$$= 40\cdot(1-0,2)^{-2}+60\cdot(1-0,2)^{-1}+100\cdot(1-0,2)^{1} = 217,5 \text{ тис. грн.}$$

При застосуванні складних відсотків і відсоткової ставки $i$, консолідований платіж $S_0$ буде дорівнювати:

$$S_0 = \sum_{k=1}^{j} S_k (1+i)^{n_0 - n_k} + \sum_{k=j+1}^{m} S_k (1+i)^{-(n_k - n_0)}.$$

Розглянемо другу задачу консолідації платежів: знайдемо термін погашення заборгованості $n_0$ при відомому консолідованому платежу $S_0$.

Відповідно принципу фінансової еквівалентності, для розв’язування цієї задачі потрібно знайти сучасну ($t = t_c$) суму всіх дисконтованих платежів і прирівняти її до дисконтованого платежу $S_0$.

Для простих відсотків і відсоткової ставки нарощення маємо наступне рівняння еквівалентності:

$$\sum_{k=1}^{m} S_k (1+i\,n_k)^{-1} = S_0 (1+i\,n_0)^{-1}. \qquad (5.20)$$

З рівняння (5.20) і знаходимо термін погашення заборгованості $n_0$.

$$n_0 = \frac{1}{i} \cdot \left( \frac{S_0}{\sum_{k=1}^{m} S_k (1+i\,n_k)^{-1}} - 1 \right). \qquad (5.21)$$

Очевидно, що рішення існує тільки при умові, що $S_0 > \sum_{k=1}^{m} S_k (1+i\,n_k)^{-1}$. Тільки в цьому випадку $n_0$ буде невід’ємним.

**Приклад 5.7.** Підприємець отримав кредит, який він повинен виплатити двома платежами: перший – 50 тис. грн – погасити через 1 рік; другий – 100 тис. грн – погасити через 2 роки.

Зміна фінансової ситуації спонукала підприємця звернутися до кредитора з проханням консолідації платежів одним платежем у розмірі $S_0$ = 200 тис. грн.

Потрібно знайти термін погашення заборгованості $n_0$. Нова угода, що задовольнила обидві сторони, була затверджена для простих відсотків при ставці нарощення $i$ = 0,6.

**Розв’язання.** Застосовуючи (5.21), знаходимо:

$$n_0 = \frac{1}{i}\cdot\left(\frac{S_0}{\sum\limits_{k=1}^{m} S_k(1+i\,n_k)^{-1}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{0,6}\cdot\left(\frac{200}{50\cdot(1+0,6)^{-1}+100\cdot(1+0,6)^{-2}} - 1\right) = 3,06 \text{ року.}$$

При застосуванні складних відсотків і відсоткової ставки нарощення $i$ рівняння еквівалентності буде наступним:

$$\sum_{k=1}^{m} S_k(1+i)^{-n_k} = S_0(1+i)^{-n_0}. \tag{5.22}$$

Позначимо ліву частину рівняння (5.22) через $Q$:

$$Q = \sum_{k=1}^{m} S_k(1+i)^{-n_k}. \tag{5.23}$$

Після цього знаходимо:

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{5.24}$$

З (5.24) видно, що рішення існує ($n_0$ буде невід’ємним) тільки при умові, що $S_0 > Q$.

**Приклад 5.8.** Для умов прикладу **5.7** знайти термін погашення заборгованості $n_0$. Нова угода, що задовольнила обидві сторони, була затверджена для складних відсотків і при ставці нарощення $i$ = 0,6.

**Розв’язання.** Застосовуючи (5.23), спочатку знаходимо величину дисконтованих платежів $Q$ :

$$Q = \sum_{k=1}^{m} S_k(1+i)^{-n_k} = 50\cdot(1+0,6)^{-1}+100\cdot(1+0,6)^{-2} = 31,25+39,06 =$$

= 70,31 тис. грн.

Після цього, застосовуючи (5.24), знаходимо термін погашення заборгованості $n_0$ для складних відсотків:

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\ \frac{200}{70,31}}{\ln(1+0,6)} = \frac{\ln 2,84}{\ln 1,6} = \frac{1,0438}{0,47} = 2,22 \text{ року.}$$

Якщо кредитор погодився на консолідацію платежів одним платежем у розмірі $S_0 = \sum_{k=1}^{m} S_k$, то застосовують наближену формулу для знаходження терміну погашення заборгованості (консолідованого платежу) $n_0$:

$$n_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} S_k n_k}{S_0}. \tag{5.25}$$

Застосовуючи формулу (5.25) для попереднього прикладу, отримуємо:

$$n_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} S_k n_k}{S_0} = \frac{50 \cdot 1 + 100 \cdot 2}{50 + 100} = 1,67 \text{ років.}$$

Формула (5.25) зручна тим, що не потребує задання величини відсоткової ставки, яка повинна визначатися за домовленістю сторін.

При консолідації векселів, частіше застосовується облікова відсоткова ставка. Знайдемо термін погашення заборгованості $n_0$ при відомому платежу $S_0$, коли застосовуються прості відсотки та облікова відсоткова ставка.

Для цього випадку маємо наступне рівняння еквівалентності:

$$\sum_{k=1}^{m} S_k (1 - d\, n_k) = S_0 (1 - d\, n_0). \tag{5.26}$$

З рівняння (5.26) знаходимо термін погашення заборгованості $n_0$.

$$n_0 = \frac{1}{d} \cdot \left( 1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} S_k (1 - d\, n_k)}{S_0} \right). \tag{5.27}$$

Рішення існує тільки при умові, що $S_0 > \sum_{k=1}^{m} S_k (1 - d\, n_k)$. Тільки в цьому випадку $n_0$ буде невід’ємним.

**Приклад 5.9.** Боржник звернувся до кредитора (власника двох векселів) з проханням про консолідацію двох векселів в один вексель на суму 100 тис. грн.

Перший вексель було видано на суму 30 тис. грн з терміном погашення 1 рік, а другий – на суму 40 тис. грн – з терміном погашення два роки. Власник векселів погодився за умови застосування облікової ставки простих відсотків *d* = 20%. Знайдемо термін погашення заборгованості $n_0$.

**Розв’язання.** Застосовуючи (5.27), знаходимо:

$$n_0 = \frac{1}{d} \cdot \left( 1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} S_k (1 - d\, n_k)}{S_0} \right) =$$

$$= \frac{1}{0{,}2} \cdot \left( 1 - \frac{30 \cdot (1 - 0{,}2 \cdot 1) + 40 \cdot (1 - 0{,}2 \cdot 2)}{100} \right) = 2{,}6 \text{ років.}$$

У загальному випадку може бути здійснено не об’єднання окремих платежів (консолідація платежів) $S_1, S_2, \dots, S_m$ з термінами виплат $n_1, n_2, \dots, n_m$ в один платіж $S_0$ і одним терміном погашення заборгованості $n_0$, а заміна старих платежів новими $S_1', S_2', \dots, S_l'$ з новими термінами виплат $n_1', n_2', \dots, n_l'$.

Зміна умов погашення кредиту називається ***конверсією*** (заміною) займу (платежів). Конверсія платежів повинна виконуватися на основі принципу фінансової еквівалентності. Еквівалентними будуть вважатися такі платежі, які після їх приведення (дисконтування) до однієї дати, яку називають базисною датою, з відсотковою ставкою, що задовольняє обидві сторони, будуть рівними.

Базисної датою можуть бути взяті різні дати: початкова дата (дата, коли був виданий кредит); дата в середині терміну погашення кредиту та ін. Але вибір базисної дати не змінює еквівалентності платежів.

Виходячи з цього принципу фінансової еквівалентності, рівняння еквівалентності для конверсії платежів, коли застосовуються прості відсотки, а за момент приведення платежів взята початкова дата, буде наступним:

$$\sum_{k=1}^{m} S_k (1+in_k)^{-1} = \sum_{k=j+1}^{l} S_k^{\prime}(1+in_k^{\prime})^{-1}. \qquad (5.28)$$

Коли застосовуються складні відсотки, а за момент приведення платежів взята початкова дата, рівняння еквівалентності для конверсії платежів має наступний вигляд:

$$\sum_{k=1}^{m} S_k (1+i)^{-n_k} = \sum_{k=1}^{l} S_k^{\prime}(1+i)^{-n_k^{\prime}} . \qquad (5.29)$$

**Приклад 5.10.** Два платежі – 100 тис. грн та 80 тис. грн – повинні бути сплачені через рік і два роки відповідно. Сторони погодилися на наступну конверсію платежів: погашати заборгованість через кожні півроку однаковими платежами. Конверсія платежів здійснюється за ставкою простих відсотків, яка дорівнює 40%. Знайдемо суму, яку повинен виплачувати боржник кожні півроку.

**Розв’язання.** З рівняння еквівалентності для конверсії платежів (5.28) знаходимо суму $S$, яку повинен виплачувати боржник кожні півроку:

$$100\cdot(1+0,4)^{-1} + 80\cdot(1+0,4\cdot 2)^{-1} = S\cdot(1+0,4\cdot 0,5)^{-1} +$$

$$+ S\cdot(1+0,4)^{-1} + S\cdot(1+0,4\cdot 1,5)^{-1} + S\cdot(1+0,4\cdot 2)^{-1}.$$

З цього рівняння і знаходимо $S$ = 42,44 тис. грн.

**Приклад 5.11.** Фірма має три кредитних зобов’язання – 100 тис. грн, 140 тис. грн та 200 тис. грн, які повинні бути сплачені через рік, два роки і три роки відповідно.

Сторони погодилися на наступну конверсію платежів: перший платіж у розмірі 200 тис. грн боржник виплачує через два роки, а другий (останній) – через три роки. Конверсія платежів здійснюється за ставкою складних відсотків, яка дорівнює 20%. Знайти суму другого платежу.

**Розв’язання.** З рівняння еквівалентності для конверсії платежів (5.29) знаходимо суму $S$ другого платежу.

$$100\cdot(1+0,2)^{-1}+140\cdot(1+0,2)^{-2}+200\cdot(1+0,2)^{-3} =$$

$$= 200\cdot(1+0,2)^{-2}+S\cdot(1+0,2)^{-3}.$$

З цього рівняння знаходимо $S$ = 263,35 тис. грн.

### 5.3. Методи погашення заборгованості

Як правило, борг віддається кредитору частинами. Існують різні методи погашення заборгованості. Учасники кредитної угоди обговорюють їх при укладанні договору (контракту). Спираючись на умови договору, складається план погашення заборгованості, головними елементами якого є визначення розмірів виплат та їх строків. При цьому, необхідною умовою погашення заборгованості є збалансованість: остання виплата боргу повинна дорівнювати залишку заборгованості. Збалансованість кредитної операції зручно пояснити на контурі погашення заборгованості, що представлений на *рис. 5.1*.

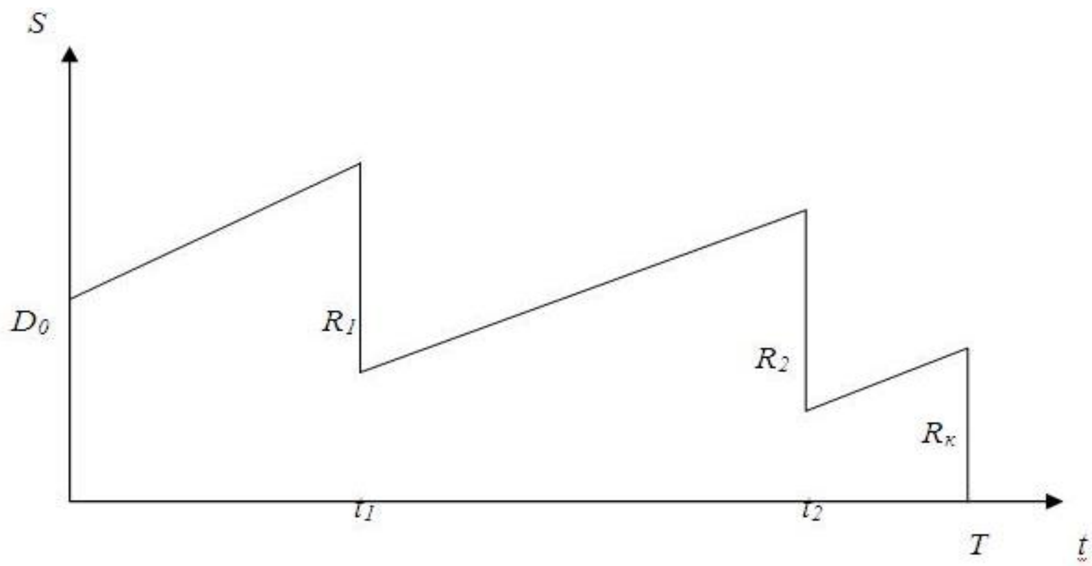



*Рис. 5.1.* Контур погашення заборгованості

На цьому рисунку показано, що кредит у розмірі $D_0$, який видано на термін *T*, погашається двома частинними платежами $R_1$ та $R_2$ в терміни $t_1$ та $t_2$ відповідно, а наприкінці строку погашається залишок заборгованості в розмірі $R_3$. На кожному інтервалі між виплатами заборгованість зростає в силу нарощення відсотків на залишений борг $K_i$.

Графік виплат заборгованості, який показано на *рис. 5.1*, називають ***контуром кредитної операції***. Кредитна операція є збалансованою, коли наприкінці її терміну *T* заборгованість $K_T$ дорівнює нулю.

Різні методи погашення заборгованості відрізняються базою, на яку нараховуються відсотки, та способом визначення залишку заборгованості.

Коли термін кредитної операції більше року, частіше застосовують актуарний метод (actuarial method). При актуарному методі відсотки нараховуються на фактичні суми боргу, а частинний платіж $R_i$ іде, в першу чергу, на погашення відсотків. При цьому, як правило, застосовують звичайні відсотки з наближеною кількістю днів. Різниця $D_i - R_i$ іде на погашення основної суми боргу. Коли величина частинного платежу $R_i$ менше нарахованих відсотків $I_i$, заборгованість не зменшується: відповідний платіж додається до наступного платежу.

Покажемо застосування актуарного методу на наступному прикладі.

**Приклад 5.12.** Фірма має зобов’язання погасити борг 100 тис. грн за 4 роки за актуарним методом при відсотковій ставці 0,2% (відсотки прості). Кредитор згоден отримувати платежі частинами: 40 тис. грн через рік; 20 тис. грн через 2 роки; 10 тис. грн через 3 роки і останній платіж через 4 роки. Знайдемо розмір останнього платежу.

**Розв’язання.** Застосовуємо актуарний метод. За рік борг 100 тис. грн наросте до суми 120 тис. грн. Відсотки складають $I_1 = D_1 - D_0 = 120000 - 100000 = 20$ тис. грн.

Після виплати першого платежу $R_1$ = 40 тис. грн, який більший за відсотки $I_1$ = 20 тис. грн, залишений борг $K_1$ дорівнює $K_1 = D_1 - R_1 =$ 120 тис. грн – 40 тис. грн = 80 тис. грн.

На залишений борг $K_1$ знову нараховуються відсотки: $D_2 = K_1(1+i) = 80 \cdot (1+0,2) = 96$ тис. грн. Відсотки складають $I_2 = D_2 - K_1 =$ 96 тис. грн – 80 тис. грн = 16 тис. грн.

Оскільки другий платіж перекриває відсотки, через два роки залишений борг $K_2$ дорівнює $K_2 = D_2 - R_2 =$ 96 тис. грн – 20 тис. грн = 76 тис. грн.

До кінця третього року борг зросте до величини $D_3 = K_2(1+i) = 76 \cdot (1+0,2) = 91,2$ тис. грн Відсотки складають $I_3 = D_3 - K_2 =$ 91,2 – 76 = 15,2 тис. грн. Оскільки третій платіж не перекриває відсотки, то заборгованість не зменшується, а відповідний платіж додається до наступного платежу. Тому до кінця четвертого року борг збільшиться до величини $D_4 = D_3(1+i) = 91,2 \cdot (1+0,2)$ = 109,44 тис. грн.

Для збалансованості операції необхідно погасити весь борг. З урахуванням частинного платежу $R_3$ = 10 тис. грн розмір останнього платежу повинен дорівнювати $R_4 = D_4 - R_3$ = 109,44 – 10 = 99,44 тис. грн.

Як бачимо, за кредит 100 тис. грн у дійсності кредитор виплатив суму, сучасна вартість якої дорівнює:

$$P_\Sigma = R_1(1+0,2)^{-1} + R_2(1+0,2\cdot 2)^{-1} + R_3(1+0,2\cdot 3)^{-1} +$$
$$R_4(1+0,2\cdot 4)^{-1} = 33,33+14,29+6,25+55,25 = 109,12 \text{ тис. грн.}$$

При разовому погашенні відповідного боргу реальна відсоткова ставка (доходність кредитора), яка знаходиться з рівняння еквівалентності $P_\Sigma(1+i_\partial \cdot 4) = D_0(1+i\cdot 4)$, буде дорівнювати $i_\partial =$ 0,1625.

Актуарний метод порушує принцип нарахування простих відсотків, оскільки відсотки нараховуються не на початкову суму боргу, а на залишки заборгованості, які можуть частково включати і відсотки, що були нараховані раніше. Така ситуація не виникає, коли на кожному етапі погашають тільки відсотки.

Наприклад, при іншому методі – ***методі торговця*** – відсотки нараховуються тільки на суму боргу: $D = D_0(1+in)$, де $n$ – термін позики. На внесені частинні платежі $R_j$ також нараховуються відсотки: $K_j = R_j \cdot (1+i(n-n_j))$, де $n_j$ – термін платежу $R_j$. Останній платіж повинен збалансувати нарощену суму боргу та нарощені платежі:

$$R_n = D_0(1+in) - \sum_j R_j \cdot \left(1+i(n-n_j)\right). \tag{5.30}$$

Контур кредитної операції на основі методу торговця показано на *рис. 5.2*.

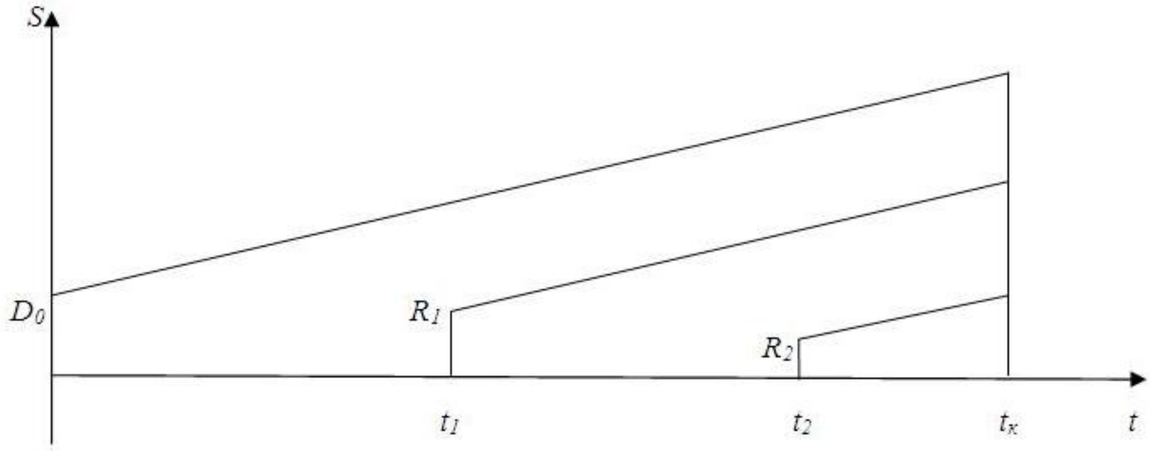



*Рис.5.2*. Контур кредитної операції на основі методу торговця

Метод торговця застосовується, коли термін позики не перевищує один рік. При умові, що термін позики більше року, всі розрахунки робляться для терміну заборгованості один рік. Останній платіж погашається знову за методом торговця, але в наступному році.

Покажемо застосування методу торговця на прикладі.

**Приклад 5.13.** Фірма має зобов’язання погасити борг 100 тис. грн за 1 рік за методом торговця і при відсотковій ставці 0,2% (відсотки прості). Кредитор згоден отримувати платежі частинами: 50 тис. грн через 6 місяців; 20 тис. грн через 9 місяців і останній платіж наприкінці року. Знайдемо розмір останнього платежу.

**Розв’язання.** Застосовуємо метод торговця. За рік борг 100 тис. грн наросте до суми

$$D_1 = D_0(1+in) = 100\cdot(1+0,2) = 120 \text{ тис. грн.}$$

Нарощена сума першого платежу дорівнює:

$$K_1 = R_1(1+i\cdot(n-n_1)) = 50\cdot\left(1+0,2\cdot\frac{6}{12}\right) = 55 \text{ тис. грн.}$$

Нарощена сума другого платежу дорівнює:

$$K_2 = R_1(1+i\cdot(n-n_2) = 20\cdot\left(1+0,2\cdot\frac{3}{12}\right) = 21 \text{ тис. грн.}$$

Останній платіж, який збалансує нарощену суму боргу та нарощені платежі, знаходяться з рівняння (5.30):

$$R_n = D_0(1+in) - \sum_j R_j\left(1+i(n-n_j)\right) = 120-55-21 = 44 \text{ тис. грн.}$$

Зазначимо, що при однакових вихідних даних актуарний метод нараховує більшу суму останнього платежу, ніж метод торговця.

## 5.4. Кредитні операції

Оскільки банки та інші кредитори утримують з суми кредиту різні виплати, то плата за кредит та, відповідно, доходність кредитора від цієї операції зростають.

Коли боржник отримує кредит $P$ на якийсь термін $n$ за відсотковою ставкою простих відсотків $i$, то за користування кредитом утримуються комісійні в розмірі $G = P\ g$ , де $g$ – відсоткова ставка комісійних утримань. Тоді дійсна величина виданої позики буде складати $P - G = P - P\cdot g = P(1-g)$, а боржник повинен повернути через термін $n$ суму $S = P(1+in)$.

При цьому величину повної доходності кредитора, яка визначається відсотковою ставкою $i_{ek}$ складних відсотків, можна знайти з наступного рівняння фінансової еквівалентності:

$$\text{Ð}(1-g)(1+i_{ek})^n = P(1+in) \qquad (5.31)$$

Розв’язавши рівняння (5.31) відносно $i_{ek}$, отримуємо:

$$i_{ek} = \left(\frac{1+in}{1-g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (5.32)$$

Величину повної доходності кредитора, яка визначається відсотковою ставкою $i_{ек\ пр}$ простих відсотків, а кредит видається також під прості відсотки, знаходимо з рівняння:

$$Đ(1-g)(1+i_{ек\ пр}\cdot n) = P(1+in) \qquad (5.33)$$

З цього рівняння отримуємо:

$$i_{ек\ пр} = \left(\frac{1+in}{1-g}-1\right)\cdot\frac{1}{n}. \qquad (5.34)$$

Коли кредит видається під складні відсотки, величину повної доходності кредитора, яка визначається відсотковою ставкою $i_{ек.скл}$ складних відсотків, знаходимо з рівняння:

$$Đ(1-g)(1+i_{ек\ скё})^n = P(1+i)^n. \qquad (5.35)$$

Розв’язавши рівняння (5.35) відносно $i_{ек.скл.}$, отримуємо:

$$i_{ек\ скё} = \frac{1+i}{(1-g)^{\frac{1}{n}}} - 1. \qquad (5.36)$$

**Приклад 5.14.** Фірмі дали кредит на 2 роки під річну відсоткову ставку 0,4%. Кредитор утримує з суми кредиту комісійну виплату в розмірі 0,1% від суми кредиту. Знайдемо повну доходність цієї операції для кредитора при застосуванні різних відсотків.

**Розв’язання.** Коли боржник отримує кредит за відсотковою ставкою простих відсотків $i$, повна доходність кредитора, яка визначається відсотковою ставкою $i_{ек}$ складних відсотків, дорівнює (5.32):

$$i_{ек} = \left(\frac{1+in}{1-g}\right)^{\frac{1}{n}}-1 = \left(\frac{1-0,4\cdot 2}{1-0,1}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,471.$$

Коли боржник отримує кредит за відсотковою ставкою простих відсотків $i$, повна доходність кредитора, яка визначається відсотковою ставкою $i_{ек.пр}$ простих відсотків, дорівнює (5.34):

$$i_{ek\ np} = \left(\frac{1+in}{1-g} - 1\right)\cdot\frac{1}{n} = \left(\frac{1+0,4\cdot 2}{1-0,1} - 1\right)\cdot\frac{1}{2} = 0,5.$$

Коли боржник отримує кредит за відсотковою ставкою складних відсотків $i$, повна доходність кредитора, яка визначається відсотковою ставкою $i_{ек.скл.}$ складних відсотків, дорівнює (5.36):

$$i_{ek\ ck\ddot{e}} = \frac{1+i}{(1-g)^{\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1+0,4}{(1-0,1)^{\frac{1}{2}}} - 1 = 0,474.$$

Таким чином, утримання комісійних максимально збільшило доходність операції для кредитора, якщо вона визначається відсотковою ставкою $i_{ек.скл.}$ складних відсотків та при отриманні кредиту боржником за відсотковою ставкою простих відсотків, на: 50% – 40% = 10%.

**Приклад 5.15.** Вексель обраховано в банку за відсотковою ставкою $d$ = 15% простих відсотків за один рік до його оплати. При обліку векселя з його власника утримали комісійні у розмірі $g$ = 1% від номіналу векселя $S$.

Знайдемо повну доходність банку $i_{ek}$ від цієї операції.

**Розв'язання.** Оскільки сума, яку отримує власник векселя, дорівнює $S(1-dn)-Sg$ , то повна доходність банку знаходиться з наступного рівняння фінансової еквівалентності:

$$\big(S(1-dn)-Sg\big)(1+i_{ek})^{n} = S.$$

Звідси маємо:

$$i_{\mathring{a}\hat{e}} = \left(\frac{1}{1-dn-g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1-0,15\cdot 1-0,01}\right)^{1} - 1 = 0,19\ (19\%).$$

### 5.5. Пільгові кредитні операції

У фінансовій практиці іноді довгострокові кредити (строк кредиту більше 5 років), з політичних мотивів або за іншими обставинами, видаються на пільгових умовах. Однією з пільг може бути видача кредиту за відсотковою ставкою $g$, яка є суттєво меншою за загальноприйняту на ринку капіталів у даний момент. Зменшення відсоткової ставки кредиту застосовується і при реструктуризації позики (restructuring loan, renegotiating loan), при цьому переглядаються умови погашення кредиту у зв'язку з різким погіршенням фінансового стану боржника.

Реструктуризацію проводять різними способами:

- пряме скасування деякої частини суми боргу;
- розташування кредиту за пільговою відсотковою ставкою;
- перегляд термінів та порядку виплати відсотків і сум погашення основного боргу;
- застосування одночасно декількох способів, які вказані вище.

Унаслідок видачі пільгового кредиту або реструктуризації боргу боржник фактично отримує субсидію, а кредитор втрачає деяку суму. Ця свідома втрата кредитора та, відповідно, виграш боржника, що обумовлені пільгами, зокрема застосуванням більш низької відсоткової ставки, ніж ставка кредитного ринку, називається ***грант-елементом***. Грант-елемент можна обчислювати або в абсолютних, або у відносних значеннях.

Коли погашення кредиту відбувається ануїтетами: рівними платежами наприкінці кожного періоду розрахунку (термінові виплати), то кожна виплата $Y$ є сумою двох величин: річної виплати $R$ з погашення основного боргу та відсотків $I$ за кредитом:

$$Y = R + I.$$

Ці виплати є членами постійної ренти постнумерандо. Величина пільгового кредиту $P$, який виданий на $n$ років під пільгову відсоткову ставку $g$ складних відсотків, є сумою дисконтованих виплат:

$$P = \frac{Y}{1+g} + \frac{Y}{(1+g)^2} + \frac{Y}{(1+g)^3} + \ldots + \frac{Y}{(1+g)^n} = Y \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{(1+g)^n \cdot g} = Y \cdot a_{n;\,g}, \quad (5.37)$$

де $a_{n;g} = \dfrac{(1+g)^n - 1}{(1+g)^n g}$ – коефіцієнт приведення постійної ренти постнумерандо з кількістю періодів $n$ та відсотковою ставкою $g$.

З рівняння (5.37) знаходимо величину $Y$ термінової виплати за пільговою відсотковою ставкою:

$$Y = P \cdot \frac{(1+g)^n \cdot g}{(1+g)^n - 1} = \frac{P}{a_{n;\,g}}. \quad (5.38)$$

Величина $\dfrac{(1+g)^n \cdot g}{(1+g)^n - 1} = \dfrac{1}{a_{n;\,g}}$ називається ***коефіцієнтом погашення заборгованості***.

Відповідно, при застосуванні загальноприйнятої відсоткової ставки $i$ $(i < g)$ величина термінової виплати $Y'$ дорівнює:

$$Y' = P \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{P}{a_{n;\,i}}, \quad (5.39)$$

де $a_{n;\,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$ – коефіцієнт приведення постійної ренти постнумерандо з кількістю періодів $n$ та відсотковою ставкою $i$.

Таким чином, боржник при кожній виплаті отримує субсидію $Y' - Y$. Тоді абсолютний грант-елемент $W$ буде дорівнювати сумі дисконтованих за ставкою $i$ субсидій $Y' - Y$:

$$W = \left(Y' - Y\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = \left(Y' - Y\right) \cdot a_{n;\,i} =$$

$$= \left( \frac{P}{a_{n;\,i}} - \frac{P}{a_{n;g}} \right) \cdot a_{n;\,i} \;=\; P - P \cdot \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;g}} \;=\; P \cdot \left( 1 \;-\; \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;g}} \right) \qquad (5.40)$$

Оскільки сучасна вартість *G* платежів погашення кредиту *Y*, яка визначена за реальною відсотковою ставкою, дорівнює

$$G \;=\; Y \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \;=\; Y \cdot a_{n;\,i} \;=\; P \cdot \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;\,g}}, \qquad (5.41)$$

то абсолютний грант-елемент *W* можна також виразити як різницю:

$$W \;=\; P - G \;=\; P - Y \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \;=$$

$$= \; P - P \cdot \frac{(1+g)^n \cdot g}{(1+g)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \;=\; P \cdot \left( 1 - \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;\,g}} \right). \qquad (5.42)$$

Відносне значення *w* грант-елемента визначаємо за формулою

$$w \;=\; \frac{W}{P} \;=\; \frac{P-G}{P} \;=\; 1 - \frac{G}{P}, \qquad (5.43)$$

Підставляємо (5.41) або (5.42) у (5.43), маємо відносний грант-елемент:

$$w \;=\; \frac{W}{P} \;=\; 1 - \frac{G}{P} \;=\; 1 - \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;\,g}}. \qquad (5.44)$$

Як видно з (5.43) та (5.44) грант-елемент суттєво залежить від різниці пільгової відсоткової ставки кредиту $g$ та загальноприйнятої відсоткової ставки $i$. Чим більше відношення $\frac{i}{g}$, тим більший грант-елемент.

**Приклад 5.16.** Пільговій кредит сумою $P = 500$ тис. грн видано на $n = 6$ років під пільгову відсоткову ставку $g = 10\%$ складних відсотків. Загальноприйнята відсоткова ставка $i = 20\%$. Погашення кредиту повинно здійснюватися рівними платежами наприкінці кожного року.

Знайдемо абсолютну та відносну величини грант-елемента.

**Розв’язання.** За формулою (5.38) знаходимо величину $Y$ термінової виплати за пільговою відсотковою ставкою:

$$Y = P \cdot \frac{(1+g)^n \cdot g}{(1+g)^n - 1} = 500 \cdot \frac{(1+0,1)^6 \cdot 0,1}{(1+0,1)^6 - 1} = P \cdot a_{n;\,g} = \frac{500}{4,355} = 114,811 \text{ тис. грн.}$$

За формулою (5.39) знаходимо величину $Y'$ термінової виплати при застосуванні загальноприйнятої відсоткової ставки $i$:

$$Y' = P \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = 500 \cdot \frac{(1+0,2)^6 \cdot 0,2}{(1+0,2)^6 - 1} = P \cdot a_{n;\,i} = \frac{500}{3,326} = 150,33 \text{ тис. грн.}$$

Різниця між терміновими виплатами (річні втрати кредитора) складає:

$$Y' - Y = 150,330 - 114,811 = 35,519 \text{ тис. грн.}$$

При річних втратах кредитора 35,519 тис. грн грант-елемент $W$ за 6 років при відсотковій ставці $i$ = 20%, яка є загальноприйнятою, складає:

$$W = (Y' - Y) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = 35,519 \cdot \frac{(1+0,2)^6 - 1}{(1+0,2)^6 \cdot 0,2} =$$

$$= P \cdot \left(1 - \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;\,g}}\right) = 500 \cdot \left(1 - \frac{3,326}{4,355}\right) = 118,140 \text{ тис. грн.}$$

Застосовуючи (5.44), знайдемо відносне значення $w$ грант-елемента:

$$w = \frac{W}{G} = 1 - \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;\,g}} = 1 - \frac{3,326}{4,355} = 0,236.$$

Максимальною пільгою при отриманні кредиту є безвідсотковий кредит ($g$ = 0%). У цьому випадку виплати боргу кожний рік $Y = \frac{P}{n}$ є рентою постнумерандо ($a_{n;\,g} = n$), а абсолютний грант-елемент дорівнює:

$$W = (Y' - Y) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = P - \frac{P}{n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = P \cdot \left(1 - \frac{a_{n;\,i}}{n}\right). \quad (5.45)$$

Відносне значення $w$ грант-елемента для безвідсоткового кредиту:

$$w = \frac{W}{G} = 1 - \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;\,g}} = 1 - \frac{a_{n;\,i}}{n}. \qquad (5.46)$$

**Приклад 5.17.** Пільговий безвідсотковий кредит ($g = 0\%$) сумою $P = 2$ млн грн видано на $n = 8$ років. Існуюча відсоткова ставка становить $i = 15\%$. Погашення кредиту повинно здійснюватися рівними терміновими платежами наприкінці кожного року.

Знайдемо абсолютну та відносну величини грант-елемента.

**Розв'язання.** За умов безвідсоткового кредиту абсолютна величина грант-елементу дорівнює (5.45):

$$W = P \cdot \left(1 - \frac{a_{n;\,i}}{n}\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{4,487}{8}\right) = 0,87825 \text{ млн грн.}$$

Відносний грант-елемент згідно (5.46) дорівнює:

$$w = \frac{W}{G} = 1 - \frac{a_{n;\,i}}{n} = 1 - \frac{4,487}{8} = 0,4391.$$

Такий безвідсотковий кредит відповідає субсидії в розмірі 43,91% від суми кредиту $P$.

Окрім кредиту за пільговою ставкою, також може надаватися пільговий період, у якому боржник нічого не виплачує, або виплачує тільки відсотки (виплати $Y = I$). Пільговий період ще більше збільшує грант-елемент (вигідність кредиту для боржника).

Дійсно, коли в пільговому періоді боржник виплачує тільки відсотки, тоді сучасна вартість $G$ всіх платежів погашення кредиту є сумою сучасної величини відсоткових платежів $P \cdot g$ у пільговий період $n_n$ та сучасної вартості платежів $Y$ у залишений $n - n_n$ період:

$$G = P \cdot g \cdot \frac{(1+i)^{n_ї} - 1}{(1+i)^{n_ї} \cdot i} + Y \cdot \frac{(1+i)^{n-n_ї} - 1}{(1+i)^{n-n_G} \cdot i} \cdot \nu_{n_ї;\,i} = P \cdot g \cdot a_{n_ї;\,i} + Y \cdot a_{n-n_ї;\,i} \cdot \nu_{n_ї;\,i}, \qquad (5.47)$$

де $n_n$ – тривалість пільгового періоду;

$\nu_{n_{\ddot{\imath}}\, i} = \dfrac{1}{(1+i)^{n_{\ddot{\imath}}}}$ – дисконтний множник зі ставкою $i$ за пільговий період $n_n$.

Тоді, враховуючи, що $Y = P \cdot \dfrac{(1+g)^{n-n_{\ddot{\imath}}} \cdot g}{(1+g)^{n-n_g} - 1} = \dfrac{P}{a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,g}}$, знаходимо формулу для абсолютного грант-елементу $W$:

$$W = P - G = P - P \cdot g \cdot a_{n_{\ddot{\imath}}\,;i} - Y \cdot a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} \cdot \nu_{n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} =$$

$$= P - P \cdot g \cdot a_{n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} - \frac{P}{a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,g}} \cdot a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} \cdot \nu_{n_{\ddot{\imath}}\,;i} = P \cdot \left( 1 - g \cdot a_{n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} - \frac{a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} \cdot \nu_{n_{\ddot{\imath}}\,;\,i}}{a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,g}} \right). \qquad (5.48)$$

Відносний грант-елемент

$$w = \frac{W}{P} = 1 - \left( g a_{n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} + \frac{a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} \cdot \nu_{n_{\ddot{\imath}}\,;\,i}}{a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,g}} \right). \qquad (5.49)$$

**Приклад 5.18.** Пільговий кредит ($g = 10\%$) сумою $P = 2$ млн грн було видано на $n = 8$ років та відстрочено на $n_n = 2$ роки. У пільговому періоді боржник виплачує наприкінці кожного року тільки відсотки. Існуюча відсоткова ставка $i = 15\%$. Погашення кредиту здійснюється рівними терміновими виплатами наприкінці кожного пільгового року.

Знайдемо абсолютну та відносну величини грант-елемента.

**Розв'язання.** За умовою задачі абсолютна величина грант-елементу $W$ визначається формулою (5.48):

$$W = P - G = P \cdot \left( 1 - g \cdot a_{n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} - \frac{a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,i} \cdot \nu_{n_{\ddot{\imath}}\,;\,i}}{a_{n-n_{\ddot{\imath}}\,;\,g}} \right) = 2 \cdot \left( 1 - 0{,}1 \cdot a_{2;\,0{,}15} - \frac{a_{8-2;\,0{,}15} \cdot \nu_{2;\,0{,}15}}{a_{8-2;\,0{,}1}} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( 1 - 0{,}1 \cdot 1{,}626 - \frac{3{,}784 \cdot 0{,}756}{4{,}355} \right) = 2 \cdot 0{,}1804 = 0{,}3608 \text{ млн грн.}$$

Відносний грант-елемент згідно (5.40) визначається наступним чином:

$$w = \frac{W}{P} = 1 - \left( g \cdot a_{n_{ï};i} + \frac{a_{n-n_{ï};i} \cdot \nu_{n_{ï};i}}{a_{n-n_{ï};g}} \right) = 0{,}1804.$$

Такий кредит відповідає субсидії в розмірі 18,04% від суми кредиту *P*.

Розглянемо ще один варіант пільгового кредиту. Нехай в пільговому періоді відсотки нараховуються, але боржник їх не виплачує. Ці відсотки приєднують до основної суми боргу, яка погашається протягом наступних $n - n_n$ років. У цьому випадку термінові виплати дорівнюють:

$$Y = \frac{P(1+g)^{n_{ï}}}{a_{n-n_{ï};g}}. \tag{5.50}$$

Тоді сучасна вартість *G* платежів погашення кредиту *Y*, яка визначена за реальною відсотковою ставкою, дорівнює:

$$G = Y \cdot a_{n-n_{ï};i} \cdot \nu_{n_{ï};i}. \tag{5.51}$$

Застосовуємо вирази (5.50) та (5.51) та, враховуючи, що $\nu_{n_{ï};i} = \dfrac{1}{(1+i)^{n_{ï}}}$, отримуємо формулу для абсолютного грант-елементу:

$$W = P - G = P - \frac{P}{a_{n-n_{ï};g}} \cdot a_{n-n_{ï};i} \cdot (1+g)^{n_{ï}} \cdot \nu_{n_{ï};i} = P \cdot \left( 1 - \frac{a_{n-n_{ï};i} \cdot (1+g)^{n_{ï}}}{a_{n-n_{ï};g} \cdot (1+i)^{n_{ï}}} \right) \tag{5.52}$$

Відносний грант-елемент

$$w = \frac{W}{P} = 1 - \frac{a_{n-n_{ï};i} \cdot (1+g)^{n_{ï}}}{a_{n-n_{ï};g} \cdot (1+i)^{n_{ï}}}. \tag{5.53}$$

**Приклад 5.19.** За умов задачі 5.18. знайти абсолютну та відносну величини грант-елемента, якщо відсотки в пільговому періоді не виплачують, а приєднують до основної суми боргу.

**Розв'язання.** У цій задачі абсолютний грант-елемент *W* визначається за формулою (5.52):

$$W = P \cdot \left( 1 - \frac{a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,i} \cdot (1+g)^{n_{\text{ї}}}}{a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,g} \cdot (1+i)^{n_{\text{ї}}}} \right) = 2 \cdot \left( 1 - \frac{3,784 \cdot (1+0,1)^2}{4,355 \cdot (1+0,15)^2} \right) = 2 \cdot 0,205 = 0,41 \text{ млн грн}$$

Відносний грант-елемент

$$w = \frac{W}{P} = 1 - \frac{a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,i} \cdot (1+g)^{n_{\text{ї}}}}{a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,g} \cdot (1+i)^{n_{\text{ї}}}} = 0,205.$$

Такий кредит відповідає субсидії в розмірі 20,5% від суми кредиту $P$, що є більше за результат 18,04% попередньої задачі.

Коли маємо пільгову відсоткову ставку $g$ = 0%, а також пільговий період $n_n$, в якому відсотки нараховуються, але боржник їх не виплачує, а ці відсотки приєднують до основної суми боргу, що погашається протягом наступних $n - n_n$ років, формули для грант-елементів (5.52) та (5.52) наступні:

$$W = P - G = P - \frac{P}{n} \cdot a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,i} \cdot v_{n_{\text{ї}}\,;\,i} = P \cdot \left( 1 - \frac{a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,i}}{n(1+i)^{n_{\text{ї}}}} \right). \qquad (5.54)$$

$$w = \frac{W}{P} = 1 - \frac{a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,i}}{n\,(1+i)^{n_{\text{ї}}}}. \qquad (5.55)$$

**Приклад 5.20.** За умов задачі 5.18. знайдемо абсолютну та відносну величини грант-елемента, якщо пільгова відсоткова ставка $g$ = 0%, відсотки в пільговому періоді не виплачують, а приєднують до основної суми боргу .

**Розв’язання.** Для цієї задачі абсолютний та відносний грант-елемент визначаються відповідно за формулами (5.54) та (5.55):

$$W = P \cdot \left( 1 - \frac{a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,i}}{n(1+i)^{n_{\text{ї}}}} \right) = 2 \cdot \left( 1 - \frac{3,784}{8 \cdot (1+0,15)^2} \right) = 2 \cdot 0,6423 = 1,2846 \text{ млн грн.}$$

$$w = \frac{W}{P} = 1 - \frac{a_{n-n_{\text{ї}}\,;\,i}}{n \cdot (1+i)^{n_{\text{ї}}}} = 1 - \frac{3,784}{8 \cdot (1+0,15)^2} = 0,6423.$$

Цей результат показує, що кредитор при таких умовах втрачає більше половини суми боргу.

## 5.6. Лізинг

***Лізинг*** (leasing) – це довгострокова (на термін від 3 років до 20 років і більше) оренда машин та обладнання, які куплені лізингодавцем для орендатора та при якій право власності зберігається за лізингодавцем на весь термін оренди.

Лізинг розглядають як специфічну форму фінансування в основні фонди, при якій лізингові компанії кредитують орендатора, у якого немає можливості застосовувати для цієї мети власні або запозичені гроші. При цьому продавець реальних активів (лізингодавець) для забезпечення повернення кредиту залишає за собою право власності на об’єкт кредитування до повного погашення займу.

Існує два основні види лізингу: фінансовий та оперативний.

***Фінансовий лізинг*** – це така угода, при якій орендатор за час дії угоди виплачує повну вартість амортизації машини (обладнання) або його більшу частину, а також прибуток лізингодавця. Після закінчення терміну угоди орендатор може або укласти нову угоду на оренду даних машин (обладнання), або купити об’єкт лізингу за його залишковою вартістю.

***Операційний лізинг*** – це угода, термін якої менший амортизаційного періоду, і після завершення цього терміну орендатор може укласти нову угоду, або повернути власнику об’єкт лізингу.

Таким чином, лізинг має подібність з кредитом, який дається на купівлю машин, обладнання. Але при лізингових операціях, на відміну від кредитних операцій, є більш складною процедура визначення суми лізингових платежів, яка складається з:

- амортизації;
- лізингової маржі, що включає в себе прибуток лізингодавця за його послуги;
- премії за ризик лізингодавця;
- плати за ресурси, які застосовує лізингодавець для здійснення угоди.

Останні три платежі є лізинговим відсотком (прибутком лізингодавця).

При цьому кожна строкова виплата $Y$ є сумою двох величин: річної виплати $R$, яка йде на погашення основної суми боргу та відсотків $I$ з основного боргу:

$$Y = R + I. \quad (5.56)$$

Для лізингодавця важливим є визначення розміру лізингових платежів, які забезпечують ефективність договору на оренду машин, обладнання. А орендатор повинен вирішити, коли є такі альтернативи, чи брати в оренду машину (обладнання), чи купувати її.

Коли термінові виплати, які забезпечують заданий норматив доходності, виплачуються наприкінці кожного року, вони стають членами постійної ренти постнумерандо, а величину разового платежу $Y$ знаходять з рівняння:

$$Y = (P - S \cdot \nu_{n;\,i}) \cdot \frac{(1+i_ё)^n \cdot i_ё}{(1+i_ё)^n - 1} = \frac{P - S \cdot \nu_{n;\,i}}{a_{n;\,i_ё}}, \quad (5.57)$$

де $P$ – сучасна вартість машини (обладнання), яке береться в лізинг;

$S$ – залишкова вартість машини (обладнання), яка береться в лізинг (вартість наприкінці терміну оренди), тому її потрібно привести (дисконтувати) до сучасного часу за діючою відсотковою ставкою $i$;

$\nu_{n;\,i} = \dfrac{1}{(1+i)^n}$ – дисконтний множник;

$a_{n;\,i_ё} = \dfrac{(1+i_ё)^n - 1}{(1+i_ё)^n \cdot i_ё}$ – коефіцієнт приведення постійної ренти постнумерандо з кількістю періодів $n$ та відсотковою ставкою $i_ё$;

$i_ё$ – лізингова річна відсоткова ставка, яка і визначає ефективність (доходність) операції;

$n$ – термін (кількість років) лізингового контракту.

При діючій відсотковій ставці $i$ сучасна вартість всіх платежів лізингу $A$ дорівнює:

$$A = Y \cdot a_{n;\,i} = \frac{(P - S \cdot v_{n;\,i}) \cdot a_{n;\,i}}{a_{n;\,i_ё}}, \qquad (5.58)$$

де $a_{n;\,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$ – коефіцієнт зведення постійної ренти постнумерандо з кількістю періодів $n$ та при відсотковій ставці $i$.

***Примітка.*** Коли орендні платежі виплачуються не наприкінці кожного року, вони створюють ренту не постнумерандо, а інші види рент, і тому у формулах (5.57) та (5.58) потрібно брати коефіцієнти зведення відповідних рент.

**Приклад 5.21.** Вартість комбайна, який береться в лізинг, складає $P = 1$ млн грн; термін лізингового договору $n$=5 років, а лізингова відсоткова ставка $i_ё = 25\%$ річних. Виплати відбуваються наприкінці кожного року. Залишкова вартість комбайна наприкінці оренди оцінюється у $S$ = 200 тис. грн.

Знайдемо величину кожного платежу та їх сучасну вартість при діючій відсотковій ставці $i$ = 16 %.

**Розв'язання.** Величина лізингових платежів згідно (5.57) дорівнює:

$$Y = \frac{P - S \cdot v_{n;\,i}}{a_{n;\,i_ё}} = \frac{1\,000 - 200 \cdot (1 + 0{,}16)^{-5}}{2{,}6893} = 336{,}397 \text{ тис. грн.}$$

Сучасна вартість всіх платежів $A$ при діючій відсотковій ставці $I = 16\%$ дорівнює згідно (5.58):

$$A = Y \cdot a_{n;\,i} = \frac{(P - S \cdot v_{n;\,i}) \cdot a_{n;\,i}}{a_{n;\,i_ё}} = 336{,}397 \cdot 3{,}2743 = 1101{,}464 \text{ тис. грн.}$$

Хоча ця сума і більше вартості комбайна $P = 1$ млн грн, але вона виплачується протягом $n = 5$ років, і тому лізинг може бути вигідним і для орендатора, і для лізингодавця.

Коли для виплат застосовуються інші види рент, тоді потрібно застосовувати коефіцієнти приведення відповідних рент. Зокрема, коли термінові платежі орендатор повинен виплачувати *p* разів за рік, тоді маємо *p*-термінову ренту постнумерандо, для якої виплати будуть дорівнювати:

$$Y = \frac{P - S \cdot v_{n;i}}{a^{p}_{n;i_ё}} = (P - S \cdot v_{n;i}) \cdot \frac{(1+i_ё)^{\frac{1}{p}} - 1}{1-(1+i_ё)^{-n}}, \qquad (5.59)$$

де $a^{p}_{n;i_ё} = \dfrac{1-(1+i_ё)^{-n}}{(1+i_ё)^{\frac{1}{p}} - 1}$ – коефіцієнт зведення постійної *p*-термінової ренти постнумерандо з відсотковою ставкою $i_ё$.

При діючій відсотковій ставці *i* сучасна вартість *A* всіх платежів лізингу дорівнює:

$$A = Y \cdot a^{p}_{n;i} = \frac{(P - S \cdot v_{n;i}) \cdot a^{p}_{n;i}}{a^{p}_{n;i_ё}}, \qquad (5.60)$$

де $a^{p}_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$ – коефіцієнт зведення постійної *p*-термінової ренти постнумерандо з відсотковою ставкою *i*.

**Приклад 5.22.** За умов задачі 5.21 знайти величину кожного платежу та сучасну вартість лізингу, коли виплати проводяться двічі на рік.

**Розв'язання.** Величина лізингових платежів згідно (5.59) дорівнює:

$$Y = \frac{P - S \cdot v_{n;i}}{a^{p}_{n;i_ё}} = (P - S \cdot v_{n;i}) \cdot \frac{(1+i_ё)^{\frac{1}{p}} - 1}{1-(1+i_ё)^{-n}} = 904{,}762 \cdot 0{,}1595 = 144{,}31 \text{тис. грн.}$$

При діючій відсотковій ставці *i* сучасна вартість всіх платежів *A* дорівнює згідно (5.60):

$$A = Y \cdot a^{p}_{n;i} = Y \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = 144{,}31 \cdot 9{,}291 = 1340{,}722 \text{ тис. грн.}$$

Для кредитора ці умови є гіршими, ніж умови задачі 5.21.

Для вирішення питання, що є вигіднішим: орендувати машину (обладнання), чи купувати її, потрібно порівняти сучасні вартості двох грошових потоків, а саме сучасні вартості всіх платежів лізингу $A$ та сучасні вартості $K$ потоку платежів, який буде пов'язаний з купівлею машини (обладнання). Якщо $A < K$, тоді перша альтернатива (лізинг) має фінансовий сенс.

**Приклад 5.22.** Вартість обладнання, яке береться в лізинг, складає $P = 6$ млн грн; термін лізингового договору $n = 8$ років. Виплати $Y = 300$ тис. грн проводяться на початку кожного кварталу. Остаточна вартість обладнання наприкінці оренди оцінюється у $S = 800$ тис. грн.

Орендатор може купити дане обладнання на наступних умовах: $P_0 = 1$ млн грн потрібно заплатити відразу, а на залишкову суму $P = 5$ млн грн відкривається кредит на 4 роки під 25% річних з виплатою наприкінці кожного року. Ремонт обладнання у двох варіантах виконується за рахунок орендатора. Який варіант обрати орендатору при діючій відсотковій ставці $i = 10\%$?

**Розв'язання.** Оскільки ремонт обладнання у двох варіантах виконується за рахунок орендатора, то в даній задачі його враховувати не потрібно.

Грошовий потік платежів при лізингу обладнання складається з $np = 32$ квартальних виплат розміром $Y = 300$ тис. грн (рента пренумерандо). Ураховуємо, що коефіцієнт зведення ренти пренумерандо відрізняється від коефіцієнту зведення ренти постнумерандо в $\left(1+\dfrac{i}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ разів, маємо, що при діючій річній відсотковій ставці $i = 20\%$ сучасна вартість цієї ренти пренумерандо буде дорівнювати:

$$A = Y \cdot a_{n;i}^{p} \cdot \left(1+\frac{i}{p}\right)^{\frac{1}{p}} = Y \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} \cdot \left(1+\frac{i}{p}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 300 \cdot 15{,}803 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 6\,679{,}975 \text{ тис. грн.}$$

При покупці обладнання потрібно протягом 4 років виплачувати наприкінці кожного року (рента постнумерандо) суму

$$R = \frac{P}{a_{4;\,0,25}} = \frac{5\,000}{2{,}362} = 2\,116{,}850 \text{ тис. грн.}$$

Тоді загальна сучасна вартість покупки обладнання буде складати:

$$\hat{E} = Đ_0 + R \cdot a_{4;\,0,2} = 1000 + 2116{,}850 \cdot 2{,}5887 = 6479{,}890 \text{ тис. грн.}$$

Оскільки $A > K$, то краще купувати обладнання у кредит, ніж брати його в лізинг. Лізинг є дорожчим варіантом на 200,85 тис. грн.

Для оцінки ефективності лізингових операцій, коли відома величина річного разового платежу $Y$, потрібно знайти $i_ё$ – лізингову річну відсоткову ставку з нелінійного рівняння:

$$a_{n;\,i_ё} = \frac{P - S \cdot v_{n;\,i}}{Y}, \qquad (5.61)$$

З рівняння (5.61) спочатку знаходять коефіцієнт зведення ренти $a_{n;i_ё}$, з якого інтерполяційним методом можне знайти лізингову річну відсоткову ставку $i_ё$, яка і визначає ефективність (доходність) операції.

Ефективність лізингу $Å$ для лізингодавця визначається лізинговою відсотковою ставкою $i_ё$ та нормою амортизації $\theta$ і дорівнює:

$$Å = i_ё - \theta. \qquad (5.62)$$

**Приклад 5.23.** Вартість обладнання, яке береться в лізинг, складає $P$ = 4 млн грн; термін лізингового договору $n$ = 5 років. Виплати $Y$ = 900 тис. грн проводяться наприкінці кожного року. Залишкова вартість обладнання наприкінці оренди оцінюється у $S$ = 2 000 тис. грн.

Знайдемо ефективність лізингової операції при нормі амортизації $\theta = 8\%$ та діючій відсотковій ставці $i$ = 10%.

**Розв'язання.** Спочатку для умов задачі знаходимо коефіцієнт зведення ренти $a_{n;i_ё}$:

$$a_{n;i_ё} = \frac{P - S \cdot v_{n;i}}{Y} = \frac{4\,000 - 2\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-5}}{900} = 3{,}064 .$$

Для коефіцієнта зведення ренти постнумерандо $a_{n;i_ё} = 13{,}91$ та для $n = 5$ інтерполяційним методом знаходимо лізингову річну відсоткову ставку: $i_ё$ = 19%.

Застосовуємо (5.62), отримуємо, що ефективність лізингу для лізингодавця дорівнює:

$$Å = i_ё - \theta = 19 - 8 = 11\,\% .$$

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ З ТЕМИ 5

1. Яку валюту можна називати конвертованою?
2. Який процес називається конверсією валюти?
3. Які можливі варіанти нарощення грошей з конверсією валюти?
4. Які можливі варіанти нарощення грошей без конверсії валюти?
5. Яка умова еквівалентності нарощування грошей з конверсією валюти та без конверсії?
6. Що визначає граничне значення курсу обміну ВКВ у гривні, при застосуванні конверсії?
7. Чи потрібно робити конвертацію ВКВ у гривню, коли курс $K_t$ обміну ВКВ у гривню наприкінці фінансової операції менше граничного значення $\bar{K}_t$?

8. Чи потрібно робити конвертацію гривні у ВКВ, коли курс $K_t$ обміну ВКВ у гривню наприкінці фінансової операції менше граничного значення $\bar{K}_t$?

9. Чи зростає для власника ВКВ ефективність операції з конверсією ВКВ при їх нарощуванні, коли ВКВ стає дешевше (величина $K_t$ зменшується)?

10. Чи зростає для власника гривні ефективність операції з конверсією гривні при її нарощуванні, коли курс ВКВ дорожчає (величина $K_t$ збільшується)?

11. Який процес називається консолідацією заборгованості?

12. Які повинні бути результати консолідації заборгованості відповідно принципу фінансової еквівалентності?

13. Які дві різні задачі можуть розв’язуватися при консолідації заборгованості?

14. Що таке конверсія платежів (займу)?

15. На основі якого принципу повинна виконуватися конверсія платежів?

16. Які платежі вважаються еквівалентними?

17. Чи змінює вибір базисної дати еквівалентність платежів?

18. Які існують методи погашення заборгованості?

19. Яка необхідна умова повинна виконуватись при погашенні заборгованості?

20. Яка кредитна операція є збалансованою?

21. Чим відрізняються різні методи погашення заборгованості?

22. На які суми нараховуються відсотки при актуарному методі погашення заборгованості?

23. Чому актуарний метод погашення заборгованості порушує принцип нарахування відсотків?

24. На які суми нараховуються відсотки при застосуванні методу торговця?

25. Намалюйте контур кредитної операції при застосуванні актуарного методу.

26. Намалюйте контур кредитної операції при застосуванні методу торговця.

27. Що таке пільговий кредит?

28. Що називається грант-елементом?

29. Що таке реструктуризацію боргу?

30. Якими способами проводять реструктуризацію боргу?

31. Хто виграє внаслідок реструктуризацію боргу?

32. Хто виграє внаслідок видачі пільгового кредиту?

33. Що характеризує величина грант-елемента?

34. Як підраховується абсолютна величина грант-елемента?

35. Як підраховується відносний грант-елемент?

36. Які існують різновидності пільгових кредитів?

37. При якому пільговому кредиті кредитор втрачає більше?

38. Що таке лізинг?

39. Чим відрізняється фінансовий лізинг від операційного?

40. Як визначається ефективність лізингу для лізингодавця?

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ З ТЕМИ 5

**1.** Планується розмістити депозит 20 000 грн на 6 місяців. На початок депозитної операції долар продавали за курсом $K_0$ = 24 грн/$. Річна відсоткова ставка 6-місячного депозиту складала 40% за гривневим депозитом та 10% за доларовим депозитом.

Який варіант нарощення грошей є кращим, якщо застосовуються прості відсотки, а курс купівлі долара зросте за 6 місяців на 6 грн і стане $K_t$ = 30 грн/$?

**2.** Планується розмістити депозит 5 000 $ терміном на один рік. На початок депозитної операції долар продавали за курсом $K_0$ = 22 грн/$. Річна відсоткова ставка депозиту складала 25% за гривневим депозитом та 0,10 за доларовим депозитом.

Який варіант нарощення грошей є кращим, якщо застосовуються прості відсотки, а курс купівлі долара через рік прогнозується до рівня $K_t$ = 25 грн/$? При яких значеннях $K_t$ конверсія валюти дає кращий результат у порівнянні з випадком, коли конвертація валют не робиться?

**3.** Планується розмістити на 1,5 роки депозит 20 000 грн. На початок депозитної операції долар продавали за курсом $K_0$ = 18 грн/$. Річна відсоткова ставка складала 0,25% за гривневим депозитом та 0,12 за доларовим депозитом.

Який спосіб нарощення грошей є кращим, якщо застосовуються складні відсотки, а курс купівлі долара через 1,5 роки прогнозується до рівня $K_t$ = 26 грн/$? При яких значеннях $K_t$ подвійна конвертація валюти дає кращий результат у порівнянні з випадком, коли конверсія валют не робиться?

**4.** Власник грошей у гривнях планує покласти їх на депозит на 2 роки. На початок депозитної операції долар продавали за курсом $K_0$ = 22 грн/$. Річна відсоткова ставка складала 0,26% за гривневим депозитом та 0,08 за доларовим депозитом.

Яка буде ефективність цієї депозитної угоди, коли застосовуються прості відсотки, а курс купівлі долара через три роки прогнозується до рівня $K_t$ = 28 грн/$?

**5.** Підприємець отримав кредит, який він повинен погасити трьома платежами: перший – 70 тис. грн – погасити через 120 діб; другий – 50 тис. грн – погасити через 150 діб; третій – 60 тис. грн – погасити через 360 діб. Зміна фінансової ситуації спонукала підприємця звернутися до кредитора з проханням консолідації платежів одним платежем з терміном погашення заборгованості $n_0$ = 220 діб.

Потрібно знайти розмір консолідованого платежу $S_0$. Нова угода, що задовольнила б обидві сторони, була затверджена для простих відсотків і відсоткової ставки $i$ = 0,28. За умовою задачі застосовуються звичайні відсотки ($T$ = 360 днів).

**6.** Підприємець отримав кредит, якій він повинен виплатити трьома платежами: перший – 30 тис. грн – погасити через 0,5 року; другий – 60 тис. грн – погасити через 1 рік; третій – 100 тис. грн – погасити через 2 роки. Зміна фінансової ситуації спонукала підприємця звернутися до кредитора з проханням консолідації платежів одним платежем з терміном погашення заборгованості $n_0$ = 1.5 року.

Потрібно знайти розмір консолідованого платежу $S_0$. Нова угода, що задовольнила б обидві сторони, була затверджена для складних відсотків і облікової ставки $d$ = 0,2.

**7.** Підприємець отримав кредит, якій він повинен повернути двома платежами: перший – 120 тис. грн – погасити через 1 рік; другий – 200 тис. грн – погасити через 2 роки. Зміна фінансової ситуації спонукала підприємця звернутися до кредитора з проханням консолідації платежів одним платежем у розмірі $S_0$ = 400 тис. грн.

Потрібно знайти термін погашення заборгованості $n_0$. Нова угода, що задовольнила б обидві сторони, була затверджена для простих відсотків і ставки нарощення $i$ = 0,6.

**8.** Підприємець отримав кредит, який він повинен погасити двома платежами: перший – 80 тис. грн – погасити через 1 рік; другий – 140 тис. грн – погасити через 2 роки. Зміна фінансової ситуації спонукала підприємця звернутися до кредитора з проханням консолідації платежів одним платежем у розмірі $S_0 = 300$ тис. грн.

Потрібно знайти термін погашення заборгованості $n_0$. Нова угода, що задовольнила б обидві сторони, була затверджена для складних відсотків і ставки нарощення $i = 0{,}4$.

**9.** Два платежі – 200 тис. грн та 160 тис. грн – повинні бути сплачені через рік і два роки відповідно. Сторони погодилися на наступну конверсію платежів: погашати заборгованість через кожні півроку однаковими платежами. Конверсія платежів здійснюється за ставкою простих відсотків, яка дорівнює 20%.

Знайти суму, яку повинен виплачувати боржник кожні півроку.

**10.** Фірма має три кредитних зобов’язання – 240 тис. грн, 180 тис. грн та 220 тис. грн, які повинні бути сплачені через рік, два роки і три роки відповідно. Сторони погодилися на наступну конверсію платежів: перший платіж у розмірі 160 тис. грн. боржник виплачує через два роки, а другий (останній) – через три роки. Конверсія платежів здійснюється за ставкою складних відсотків, яка дорівнює 20%. Знайти суму другого платежу.

**11.** Фірма має зобов’язання погасити борг 400 тис. грн за 4 роки за актуарним методом і відсотковій ставці 0,2% (відсотки прості). Кредитор згоден отримувати платежі частинами: 180 тис. грн через рік; 30 тис. грн через 2 роки; 200 тис. грн через 3 роки і останній платіж через 4 роки.

Знайти розмір останнього платежу. Схематично зобразити контур кредитної операції.

**12.** Фірма має зобов’язання погасити борг 200 тис. грн за 1 рік за методом торговця і відсотковій ставці 0,3% (відсотки прості). Кредитор згоден отримувати платежі частинами: 70 тис. грн через 6 місяців; 80 тис. грн через 9 місяців і останній платіж наприкінці року.

Знайти розмір останнього платежу.

**13.** Фірма має зобов'язання погасити борг 100 тис. грн за 1 рік за методом торговця і відсотковій ставці 0,2% (відсотки прості). Кредитор згоден отримувати платежі частинами: 50 тис. грн через 6 місяців; 20 тис. грн через 9 місяців і останній платіж наприкінці року.

Знайти розмір останнього платежу.

**14.** Видано кредит на 3 роки під 30% річних (відсотки складні). При видачі кредиту утримано комісійні в розмірі 2% від суми кредиту.

На скільки відсоткових пунктів підвищилася вартість кредиту, якщо доходність операції кредитора визначається відсотковою ставкою $i_{\text{ек.скл.}}$ складних відсотків.

**15.** Вексель обраховано в банку за відсотковою ставкою $d = 20\%$ складних відсотків за один рік до його оплати. При обліку векселя з його власника утримано комісійні в розміри $g$ = 0,5% від номіналу векселя $S$.

Знайти повну доходність банку $i_{\text{ек.скл}}$ від цієї операції.

**16.** Пільговий кредит на суму $P$ = 800 тис. грн видано на $n$ = 8 років під пільгову відсоткову ставку $g = 5\%$ складних відсотків. Загальноприйнята відсоткова ставка $i$ = 15%. Погашення кредиту повинно здійснюватися рівними платежами наприкінці кожного року.

Знайти абсолютну та відносну величини грант-елемента.

**17.** Пільговий безвідсотковий кредит на суму $P$ = 4 млн грн видано на $n$ = 6 років. Існуюча відсоткова ставка $i$ = 20%. Погашення кредиту повинно здійснюватися рівними платежами наприкінці кожного року.

Знайти абсолютну та відносну величини грант-елемента.

**18.** Пільговий кредит ($g$ = 5%) на суму $P$ = 3 млн грн видано на $n$ = 7 років та відстрочений на $n_n$ = 2 роки. У пільговому періоді боржник виплачує наприкінці кожного року тільки відсотки. Існуюча відсоткова ставка $i$ = 20%.

Погашення кредиту здійснюється рівними строковими платежами наприкінці кожного після пільгового року.

Знайти абсолютну та відносну величини грант-елемента.

**19.** Пільговій кредит ($g$ = 5%) на суму $P$ = 3 млн грн видано на $n$ = 7 років та відстрочений на $n_п$ = 2 роки. У пільговому періоді боржник відсотки не виплачує. Існуюча відсоткова ставка $i$ = 15%. Погашення кредиту здійснюється рівними строковими платежами наприкінці кожного після пільгового року.

Знайти абсолютну та відносну величини грант-елемента.

**20.** Вартість трактора, який береться в лізинг, складає $P$ = 500 тис. грн; термін лізингового договору $n$ = 6 років, а лізингова відсоткова ставка $i_л$= 30% річних. Виплати проводяться наприкінці кожного року. Залишкова вартість комбайна наприкінці оренди оцінюється у $S$ = 100 тис. грн.

Знайти величину кожного платежу та їх сучасну вартість при діючій відсотковій ставці $i$ = 12%.

**21.** Вартість машини, яка береться в лізинг, складає $P$ = 2 млн грн; термін лізингового договору $n$ = 5 років, а лізингова відсоткова ставка $i_л$ = 16% річних. Виплати проводяться наприкінці кожного кварталу. Залишкова вартість машини наприкінці оренди оцінюється у $S$ = 600 тис. грн.

Знайти величину кожного платежу та їх сучасну вартість при діючій відсотковій ставці $i$ = 12%.

# Тема 6. Фінансовий аналіз інвестиційних проектів

**Коли ви можете оцінити те, про що говорите, і виразити це кількісно,
тоді ви щось про це знаєте, але коли ви не можете це оцінити
та виразити кількісно, тоді ваші пізнання скудні і незадовільні.**
***Уільям Томпсон***

## 6.1. Показники ефективності інвестиційних проектів

Реалізація інвестиційних проектів включає в себе створення об'єкта підприємництва та послідовне отримання прибутків від його діяльності. Ці два процеси можуть бути послідовними в часі, а можуть на деякому інтервалі часу перетинатися. В останньому випадку прибутки від інвестицій починають надходить ще до завершення процесу витрат на створення об'єкта підприємництва.

Таким чином, інвестиційні проекти визначаються двома грошовими потоками: *грошовим потоком витрат* та *грошовим потоком надходжень* (прибутків). Але не існує однієї характеристики грошового потоку.

Тому оцінка ефективності інвестиційних проектів є багатокритеріальною задачею. Усі критерії, які застосовуються для оцінки ефективності інвестиційних проектів, поділяються на дві групи:

– статичні (бухгалтерські);

– динамічні (дисконтні).

Бухгалтерські критерії не враховують зміну вартості грошей у часі, тому і називаються статичними. Ці критерії не є адекватними для інвестиційної діяльності: за умов високої інфляції вони не можуть оцінювати реальну доходність інвестиційних проектів, тому надалі не будуть розглядатися.

Дисконтні критерії ґрунтуються на дисконтуванні грошей, що потребує обов'язкового врахування такої категорії, як час, яка відіграє велику роль у порівнянні грошових сум.

Усі критерії можуть бути класифіковані як абсолютні та відносні.

До *абсолютних* дисконтних критеріїв відносяться: чиста приведена вартість (*ЧПВ*) (Net Present Value (*NPV*)); чиста нарощена вартість (*ЧНВ*) (Net Future Value (*NFV*)); дисконтований період окупності (*ДПО*) (Discounted Payback Period (*DPP*)); дюрація (Duration).

До *відносних* дисконтних критеріїв відносяться: внутрішня норма доходності (*ВНД*) (Internal Rate of Retun, (*IRR*)) та індекс рентабельності (*IP*) (Profitability Index (*PI*)).

Різні критерії можуть мати різну пріоритетність (важливість) для різних інвесторів. Ці суб'єктивні уподобання інвесторів потрібно якось ураховувати при інтегральній оцінці інвестиційних проектів.

Важливим моментом при розрахунку дисконтних критеріїв ефективності інвестиційних проектів є вибір відсоткової ставки, по якій робиться дисконтування (порівняння проектів). Чим вона вище, тим у більшій мірі впливає фактор часу: далекі платежі все менше визначають оцінки критеріїв. На практиці рекомендують застосовувати мінімальну привабливу відсоткову ставку (minimum attractive rate of return) або таку, яка відповідає усередненій доходності акцій, відсоткових ставок по кредиту тощо.

Оскільки відповідь на запитання, яку відсоткову ставку дисконтування вважати мінімально привабливою, є невизначеною, то на практиці часто застосовують три варіанти відсоткової ставки:

– усереднений показник доходності акцій, відсоткових кредитних ставок;

– експертна оцінка на основі досвіду роботи підприємства;

– існуючі ставки довгострокових кредитів.

Також важливим при визначенні ставки дисконтування є урахування ризику. Це робиться шляхом додавання до ставки дисконтування премії за ризик.

## 6.2. Чиста приведена вартість

**Означення 6.1.** ***Чиста приведена вартість,*** *ЧПВ* (net present value, *NPV*), – це сумарна сучасна (дисконтована) вартість доходів мінус сумарна сучасна (дисконтована) вартість витрат:

$$\times \ddot{I}\ \hat{A} = \grave{A}_{\Sigma\ddot{a}} - \grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = \sum_i R_{i+} \cdot v_i - \sum_j R_{j-} \cdot v_j = \sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}} - \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}}, \quad (6.1)$$

де

$\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}} = \sum_i R_{i+} \cdot v_i = \sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}}$ – дисконтована (приведена) вартість доходів $R_{i+}$, які надходять за час $t_{i+}$ $\left( n_{i+} = \frac{t_{i+}}{T} \right)$;

$\grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = \sum_j R_{j-} \cdot v_j = \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}}$ – дисконтована (приведена) вартість витрат $R_{j-}$, яка надходить за час $t_{i-}$ $\left( n_{i-} = \frac{t_{i-}}{T} \right)$;

$v_i$ – дисконтний множник (discount factor);

$r$ – відсоткова ставка дисконтування.

У формулі (6.1) застосовуються складні відсотки, але можуть застосовуватися і прості відсотки.

З (6.1) випливає, що чиста приведена вартість має властивість ***адитивності:***

$$\times \ddot{I}\ \hat{A}(A+B+C) = \times \ddot{I}\ \hat{A}(A) + \times \ddot{I}\ \hat{A}(B) + \times \ddot{I}\ \hat{A}(C).$$

Це означає, що чиста приведена вартість суми проектів дорівнює сумі чистих приведених вартостей окремих проектів.

**Приклад 6.1.** Інвестиційний проект характеризується потоком платежів, наведеного в таблиці. Знайдемо *ЧПВ* проекту при відсотковій ставці дисконтування $r = 0{,}1\%$ складних відсотків.

| $t_{1-}$ = 1 рік | $t_{2-}$ = 2 роки | $t_{1+}$ = 3 роки | $t_{2+}$ = 4 роки | $t_{3+}$ = 5 років |
|---|---|---|---|---|
| $R_{1-}$ = 20 тис. грн | $R_{2-}$ = 40 тис. грн | $R_{1+}$ = 50 тис. грн | $R_{2+}$ = 70 тис. грн | $R_{3+}$ = 100 тис. грн |

**Розв'язання.** Застосовуючи формулу (6.1), маємо:

$$\times \ddot{I}\ \hat{A} = \sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}} - \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}} = \frac{50}{(1+0{,}1)^3} + \frac{70}{(1+0{,}1)^4} +$$

$$+\frac{100}{(1+0{,}1)^5} - \frac{20}{(1+0{,}1)^1} - \frac{40}{(1+0{,}1)^2} = 7{,}32 + 61{,}4 - 18{,}1 - 16{,}4 = 111{,}42\ \text{òèñ. ãðí}\,.$$

Оскільки однакові *ЧПВ* можуть мати проекти з різними фінансовими потоками, то застосування тільки даного критерію не зможе визначити кращий інвестиційний проект. Потрібно оцінювати проекти і за іншими критеріями.

### 6.3. Внутрішня норма доходності

**Означення 6.2.** ***Внутрішня норма доходності***, *ВНД* (internal rate of retun, *IRR*), – це така відсоткова ставка дисконтування $r_{IRR}$, за якою теперішня (дисконтована) вартість доходів дорівнює теперішній (дисконтованій) вартості витрат:

$$\grave{A}_{\Sigma \ddot{a}} = \sum_i R_{i+} \cdot v_i = \sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}} = \grave{A}_{\Sigma \hat{a}} = \sum_j R_{j-} \cdot v_j = \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}}\,. \qquad (6.2)$$

Із цього означення випливає, що *ЧПВ* інвестиційного проекту при ставці дисконтування $r_{IRR}$ дорівнює нулю:

$$\times \ddot{I}\ \hat{A} = \grave{A}_{\Sigma\ddot{a}} - \grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = 0 .$$

Отже, внутрішня норма доходності $r_{IRR}$ знаходиться з рівняння:

$$\sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}} - \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}} = 0 . \qquad (6.3)$$

Нелінійне рівняння (6.3) розв'язують відносно невідомої величини $r_{IRR}$ різними методами:

– методом підбору $r_{IRR}$;

– методом Ньютона-Рафсона;

– методом лінійної інтерполяції тощо.

**Приклад 6.2.** Інвестиційний проект характеризується потоком платежів, який наведено в таблиці. Знайдемо внутрішню норму доходності $r_{IRR}$

| $t_{1-}$ = 1 рік | $t_{2-}$ = 2 роки | $t_{1+}$ = 3 роки | $t_{2+}$ = 4 роки |
|---|---|---|---|
| $R_{1-}$ = 30 тис. грн | $R_{2-}$ = 40 тис. грн | $R_{1+}$ = 60 тис. грн | $R_{2+}$ = 100 тис. грн |

**Розв'язання.** Застосовуючи формулу (6.3), маємо:

$$\sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}} - \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}} =$$

$$= \frac{60}{(1+r_{IRR})^3} + \frac{100}{(1+r_{IRR})^4} = \frac{30}{(1+r_{IRR})^1} + \frac{40}{(1+r_{IRR})^2} .$$

Шляхом послідовного підбору знаходимо, що $r_{IRR}$ = 0,48.

На практиці для обчислення $r_{IRR}$ застосовується прикладна програма, яка є в пакеті MS Excell.

Внутрішня норма доходності $r_{IRR}$ характеризує ефективність інвестиційного проекту: чим вище $r_{IRR}$, тим більша ефективність проекту. Величина $r_{IRR}$ при особливо несприятливих умовах може бути нульовою або навіть від'ємною.

Якщо проект здійснюється за кредитні гроші, які отримані за відсотковою ставкою *i*, тоді різниця $r_{IRR} - i$ характеризує ефективність інвестиційної операції. При $r_{IRR} = i$ прибуток від інвестиційного проекту тільки окупить кредит, а при $r_{IRR} < i$ інвестиції у проект є збитковими.

На практиці отриману оцінку внутрішньої норми доходності $r_{IRR}$ порівнюють з необхідною нормою дохідності (ставкою дисконтування) *r*: якщо $r_{IRR} < r$ – інвестиційний проект відхиляється.

## 6.4. Дисконтований період окупності

**Означення 6.3.** ***Дисконтований період окупності***, *ДПО* (discounted payback period, *DPP*), – це тривалість періоду, за який теперішня вартість доходів (доходів дисконтованих на початок фінансової операції) дорівнює дисконтованій вартості всіх витрат (всіх інвестицій).

Відповідно означенню 6.3 алгоритм знаходження дисконтованого періоду окупності $t_{\text{î êóï}}$ складається з наступних кроків.

1. За ставкою дисконтування *r* знаходиться дисконтована вартість всіх витрат (всіх інвестицій):

$$\grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = \sum_j R_{j-} \cdot v_j = \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}}.$$

***2.*** Послідовно дисконтують вартості доходів $R_{i+}$, які надходять у час $t_{i+}\left(n_{i+} = \frac{t_{i+}}{T}\right)$.

***3.*** Дисконтовані вартості доходів $R_{i+}$ послідовно сумуються:

$$\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}} = \sum_i R_{i+} \cdot v_i = \sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}}.$$

***4.*** Як тільки сума $\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}}$ дисконтованих вартостей доходів $R_{i+}$ стане рівною або більшою дисконтованої вартості всіх витрат (всіх інвестицій) $\grave{A}_{\Sigma\hat{a}}$, дисконтування доходів зупиняється. Дисконтований період окупності $t_{\hat{i}\,\hat{e}\acute{o}\ddot{i}}$ знайдено, і він дорівнює терміну останнього дисконованого доходу.

**Приклад 6.3.** Інвестиційний проект характеризується потоком платежів, який наведено в таблиці. Знайдемо дисконтований період окупності $t_{\hat{i}\,\hat{e}\acute{o}\ddot{i}}$ при ставці дисконтування $r$ = 0,2.

| $t_{1-}$ = 1 рік | $t_{2-}$ = 2 роки | $t_{1+}$ = 3 роки | $t_{2+}$ = 4 роки | $t_{3+}$ = 5 років |
|---|---|---|---|---|
| $R_{1-}$ = 20 тис. грн | $R_{2-}$ = 30 тис. грн | $R_{1+}$ = 40 тис. грн | $R_{2+}$ = 40 тис. грн | $R_{3+}$ = 100 тис. грн |

**Розв'язання.** За ставкою дисконтування $r$ знаходимо дисконтовану вартість усіх витрат (усіх інвестицій):

$$\grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = \sum_j R_{j-} \cdot v_j = \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}} = \frac{20}{(1+0,2)^1} + \frac{30}{(1+0,2)^2} =$$

$$= 16,38 + 20,19 = 36,57 \text{ тис. грн.}$$

Послідовно дисконтуємо вартості доходів $R_{i+}$:

$$\grave{A}^1 = \frac{R_{1+}}{(1+r)^3} = \frac{40}{(1+0,2)^3} = 22{,}12\,\text{òèñ.ãðí}.$$

Оскільки $\grave{A}^1 = 22{,}12 < A_{\Sigma\hat{a}} = 36,57$, то дисконтуємо наступній дохід:

$$\grave{A}^2 = \frac{R_{2+}}{(1+r)^4} = \frac{40}{(1+0,2)^4} = 18,24\,\text{òèñ.ãðí}.$$

Дисконтовані вартості двох доходів сумують:

$$\grave{A}_\Sigma = A^1 + A^2 = 22{,}12 + 18,24 = 40,36\,\text{òèñ.ãðí}.$$

Оскільки $\grave{A}_\Sigma = 40,36 > \grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = 36,57$, то дисконтований період окупності $t_{\hat{i}\,\hat{e}\acute{o}\ddot{i}\,.}$ дорівнює терміну останнього дисконтованого доходу (для нашого прикладу – це $t_{2+}$ = 2 роки). За ці два роки інвестор окупив усі витрати.

Дисконтований період окупності також застосовується як міра ризику проекту: чим більший $t_{\hat{i}\,\hat{e}\acute{o}\ddot{i}\,.}$, тим більший вважається ризик. Зв'язок ризику та часу розглядувався вище в пункті 1.6.

Головним недоліком дисконтованого періоду окупності $t_{\hat{i}\,\hat{e}\acute{o}\ddot{i}}$ як характеристики інвестиційних проектів є те, що в ньому не враховуються доходи, які мають час надходження більший за $t_{\hat{i}\,\hat{e}\acute{o}\ddot{i}\,.}$, і тому вони не мають впливу на період окупності, хоча мають вплив на ефективність інвестицій.

Цього недоліку не має така характеристика грошового потоку, як дюрація (тривалість).

### 6.5. Дюрація

**Означення 6.4.** ***Дюрація,*** $T$ (duration), – це середньозважена тривалість надходження платежів грошового потоку, коефіцієнти ваги якої визначаються відношенням сучасної вартості цих платежів до сучасної вартості всього потоку платежів:

$$T = \sum_{i}^{n} t_i \times P_i \,, \tag{6.4}$$

де $t_i$ – час надходження *i*-го платежу;

$n$ – кількість платежів;

$P_i$ – коефіцієнт ваги *i*-го платежу.

Коефіцієнт ваги *i*-го платежу визначається за формулою:

$$P_i = \frac{A_i}{A_\Sigma}; \qquad \sum_{i}^{n} P_i = 1, \tag{6.5}$$

де $A_i$ – сучасна вартість *i*-го платежу;

$A_\Sigma$ – сучасна вартість всього потоку платежів.

Для розрахунку сучасної вартості застосовують відсоткову ставку, яка відповідає доходності інвестицій.

Дюрація є показником середнього «життя» цінного паперу (наприклад, облігації) і одночасно – ризику операцій з нею: чим більша дюрація грошового потоку, тим більший ризик, пов’язаний з цим цінним папером.

Дюрації не притаманний недолік дисконтованого періоду окупності, оскільки для її розрахунку застосовуються всі члени фінансового потоку, а для дисконтованого періоду окупності тільки ті члени потоку, які мають час надходження не більший за $t_{\hat{i}\,\hat{e}\acute{o}\ddot{i}}$ Але дюрація розраховується лише для грошових потоків, члени якого тільки додатні.

**Приклад 6.4.** Номінальні платежі розміром $R_i$ = 450 грн за облігацією вартістю 10 000 грн поступають через кожні півроку протягом 5 років. Потрібно знайти дюрацію грошового потоку при відсотковій ставці складних відсотків, яка дорівнює 10 %.

**Розв'язання.** Спочатку знаходимо сучасну (дисконтовану) вартість потоку платежів як суму сучасних (дисконтованих) вартостей окремих платежів:

$$\grave{A}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{10} A_i = \sum_{i} \frac{R_i}{(1+i)^{n_i}} = \frac{450}{(1+0,1)^{0,5}} + \frac{450}{(1+0,1)^{1}} + \frac{450}{(1+0,1)^{1,5}} + \frac{450}{(1+0,1)^{2}} +$$

$$+ \frac{450}{(1+0,1)^{2,5}} + \frac{450}{(1+0,1)^{3}} + \frac{450}{(1+0,1)^{3,5}} + \frac{450}{(1+0,1)^{4}} + \frac{450}{(1+0,1)^{4,5}} + \frac{450}{(1+0,1)^{5}} =$$

$$= 429,06 + 409,091 + 390,053 + 371,9 + 354,582 + 338,092 + 322,373 +$$

$$+ 307,39 + 293,064 + 6488,629 = 9704,23 \text{ ãðí} .$$

За формулою (6.4) розраховуємо тривалість (дюрацію) грошового потоку:

$$T = \sum_{t_i}^{10} t_i \cdot P_i = 0,5 \cdot \frac{439,06}{9704,23} + 1 \cdot \frac{409,091}{9704,23} + 1,5 \cdot \frac{390,053}{9704,23} + 2 \cdot \frac{371,9}{9704,23} +$$

$$+ 2,5 \cdot \frac{354,582}{9704,23} + 3 \cdot \frac{338,092}{9704,23} + 3,5 \cdot \frac{322,373}{9\,704,23} + 4 \cdot \frac{307,39}{9704,23} + 4,5 \cdot \frac{293,064}{9704,23} +$$

$$+ 5 \cdot \frac{6\,488,629}{9704,23} = 0,023 + 0,0422 + 0,06 + 0,077 + 0,091 + 0,105 + 0,118 +$$

$$+ 0,127 + 0,136 + 3,343 = 4,823 \text{ ðî ê³â.}$$

Тривалість (дюрацію) портфеля цінних паперів $T_p$ оцінюють як середньозважену тривалість $T_i$ цінних паперів цього портфеля:

$$T_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \, T_i \,, \tag{6.6}$$

де $\quad x_i = \dfrac{A_i}{A_\Sigma}$ – коефіцієнт ваги $i$-го цінного паперу;

$A_i$ – ринкова вартість $i$-го цінного паперу;

$A_\Sigma = \sum\limits_{i}^{n} A_i$ – ринкова вартість портфеля;

$n$ – кількість цінних паперів у портфелі.

**Приклад 6.5.** Портфель цінних паперів складається з казначейських облігацій, дюрація яких $T_1$ = 3,6 роки, а ринкова вартість $A_1$ = 10 000 грн, та корпоративних облігацій ($T_2$ = 6,6 роки і $A_2$ = 20 000 грн; $T_3$ = 4,2 роки і $A_3$ = 30 000 грн). Знайдемо дюрацію портфеля.

**Розв'язання.** Відповідно до формули (6.6) маємо:

$$T_p = \sum_{i=1}^{3} x_i T_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i}{A_\Sigma} T_i =$$

$$= \frac{10\,000}{60\,000} \cdot 3{,}6 + \frac{20\,000}{60\,000} \cdot 6{,}6 + \frac{30\,000}{60\,000} \cdot 4{,}2 = 4{,}9 \text{ ðî ê³â}.$$

Відмітимо, що використання такої характеристики, як дюрація, знаходить все більш широке застосування для оцінки ризику портфеля.

## 6.6. Індекс рентабельності

**Означення 6.5.** ***Індекс рентабельності,*** *IP* (profitability index, *PI*), – це відношення сумарної приведеної (дисконтованої) вартості доходів до сумарної приведеної (дисконтованої) вартості витрат:

$$^{2}Ð = \frac{\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}}}{\grave{A}_{\Sigma\hat{a}}} = \frac{\sum\limits_i R_{i+}\cdot v_i}{\sum\limits_j R_{j-}\cdot v_j} = \frac{\sum\limits_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}}}{\sum\limits_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}}}, \qquad (6.7)$$

де $\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}} = \sum\limits_i R_{i+}\cdot v_i = \sum\limits_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}}$ – дисконтована (приведена) вартість доходів $R_{i+}$, які надходять в час $t_{i+}\left(n_{i+} = \frac{t_{i+}}{T}\right)$;

$\grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = \sum\limits_i R_{j-}\cdot v_j = \sum\limits_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}}$ – дисконтована (приведена) вартість витрат $R_{j-}$, які надходять в час $t_{i-}\left(n_{i-} = \frac{t_{i-}}{T}\right)$.

**Приклад 6.6.** Інвестиційний проект характеризується потоком платежів, який приведено в таблиці. Знайдемо індекс рентабельності при ставці дисконтування $r$ = 0,3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t_{1-}$ = 1 рік | $t_{2-}$ = 2 роки | $t_{1+}$ = 4 роки | $t_{2+}$ = 5 років | $t_{3+}$ = 6 років |
| $R_{1-}$ = 40 тис грн | $R_{2-}$ =20тис.грн | $R_{1+}$ = 60 тис.грн | $R_{2+}$ =80 тис.грн | $R_{3+}$ =200 тис.грн |

**Розв'язання.** По ставці дисконтування $r$ знаходимо дисконтовану вартість усіх витрат (всіх інвестицій):

$$\grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = \sum_i R_{j-}\cdot v_j = \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}} = \frac{40}{(1+0,3)^1} + \frac{20}{(1+0,3)^2} = 29,68 + 11,04 = 40,72\,.$$

Дисконтована (сучасна) вартість усіх доходів відповідно дорівнює:

$$\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}} = \sum_i R_{i+}\cdot v_i = \sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}} = \frac{60}{(1+0,3)^4} + \frac{80}{(1+0,3)^5} + \frac{200}{(1+0,3)^6} =$$

$$= \ 18{,}48 + 18{,}48 + 34{,}8 = 71{,}76\,.$$

Тоді індекс рентабельності $^{2}Ð = \dfrac{\grave{A}_{\Sigma \ddot{a}}}{\grave{A}_{\Sigma \hat{a}}} = \dfrac{71{,}76}{40{,}72} = 1{,}76.$

Застосовуючи формули (6.1) та (6.7), знайдемо співвідношення між критеріями чистої приведеної вартості (*ЧПВ*) та індексом рентабельності (*ІР*):

$$^{2}Ð = \frac{\times \ddot{I}\ \hat{A}}{\grave{A}_{\Sigma \hat{a}}} + 1 \qquad \text{або} \qquad \times \ddot{I}\ \hat{A} = (^{2}Ð - 1)\grave{A}_{\Sigma \hat{a}}. \qquad (6.8)$$

Як видно з (6.8), коли *ІР* більше одиниці, *ЧПВ* є додатною величиною, й інвестиційний проект може бути прийнято. Чим більший *ІР*, тим кращий проект при інших рівних умовах. Якщо *ІР* < 1, тоді інвестування невигідне.

Відмітимо, що порівняння різних проектів за критеріями *ЧПВ* та *ІР* може давати суперечливі висновки. Покажемо це на наступному прикладі. Нехай два проекти мають дисконтовану вартість усіх доходів $\grave{A}_{\Sigma \ddot{a}}$ та дисконтовану вартість усіх витрат $\grave{A}_{\Sigma \hat{a}}$, які наведені в наступній таблиці:

| Характеристики проектів | $\grave{A}_{\Sigma \ddot{a}}$ | $\grave{A}_{\Sigma \hat{a}}$ | $ЧПВ = \grave{A}_{\Sigma \ddot{a}} - \grave{A}_{\Sigma \hat{a}}$ | $IP = \dfrac{A_{\Sigma \ddot{a}}}{A_{\Sigma \hat{a}}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Проект № 1 | 8 млн грн | 5 млн грн | 3 млн грн | 1,6 |
| Проект № 2 | 5 млн грн | 3 млн грн | 2 млн грн | 1,666 |

При цьому за критерієм *ЧПВ* кращим є проект № 1, а за критерієм *ІР* слід віддати перевагу проекту № 2.

Оскільки критерії *ЧПВ*, *ІР*, *ВНД* взаємопов’язані між собою, при аналізі одного інвестиційного проекту вони дають однакову відповідь щодо інвестування чи неінвестування у відповідний проект. Але коли приймається рішення відносно вибору одного проекту з декількох, ці критерії можуть дати протилежні результати.

У цьому випадку потрібно розв’язувати задачу багатокритеріальної оптимізації. При цьому пріоритетність того чи іншого критерію залежить від багатьох факторів, зокрема від цілей інвестування; від величини ризику, який приймає інвестор. Відмітимо, що на практиці найчастіше інвестори важливішим вважають критерій *ЧПВ*.

Важливим етапом аналізу інвестиційних проектів є аналіз чутливості (sensitivity analysis) оцінок критеріїв до зміни параметрів грошового потоку інвестиційного проекту. Для цього застосовують метод статистичного моделювання або нечіткі моделі оцінок інвестиційних проектів [9].

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ З ТЕМИ 6

1. Які існують дисконтні критерії ефективності інвестиційних проектів?
2. Які критерії відносяться до абсолютних дисконтних критеріїв ефективності інвестиційних проектів?
3. Чому бухгалтерські критерії називаються статичними?
4. Які критерії відносяться до відносних дисконтних критеріїв ефективності інвестиційних проектів?
5. Дайте означення *ЧПВ*.
6. Що означає властивість адитивності, яка притаманна критерію *ЧПВ*?
7. Дайте означення дисконтованому періоду окупності інвестиційних проектів.
8. Дайте означення внутрішній нормі доходності інвестиційних проектів.
9. Дайте означення індексу рентабельності інвестиційних проектів.
10. Яке співвідношення існує між критеріями чистої приведеної вартості (*ЧПВ*) та індексом рентабельності (*IP*)?

11. При яких *ІР* величина *ЧПВ* є додатною?

12. Який дисконтний критерій ефективності інвестиційних проектів застосовується як міра ризику?

13. Чи вірне твердження: «Чим вища внутрішня норма доходності, тим більша ефективність проекту»?

14. Чи може бути величина $r_{IRR}$ нульовою або від'ємною?

15. Чи може оцінка різних проектів за критеріями *ЧПВ* та *ІР* давати суперечливі висновки?

16. Чи може оцінка одного проекту за критеріями *ЧПВ* та *ІР* давати суперечливі висновки?

17. Який головний недолік такого критерію інвестиційних проектів, як дисконтований період окупності?

18. Дайте означення дюрації грошового потоку .

19. Що характеризує дюрація?

20. Який недолік, що притаманний дисконтованому періоду окупності, не є притаманним для дюрації ?

21. Як розраховується дюрація портфеля цінних паперів?

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ З ТЕМИ 6

1. Інвестиційний проект характеризується потоком платежів, який наведено в таблиці. Знайти *ЧПВ* проекту при відсотковій ставці дисконтування $r$ = 0,2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t_{1-}$ = 1 рік | $t_{2-}$ = 3 роки | $t_{1+}$ = 2 роки | $t_{2+}$ = 4 роки | $t_{3+}$ = 5 років |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_{1-}$ =30тис. грн | $R_{2-}$ =40тис.грн | $R_{1+}$ =60тис. грн | $R_{2+}$ =90тис. грн | $R_{3+}$ =150тис. грн |

2. Інвестиційний проект характеризується потоком платежів, який наведено в таблиці. Знайти внутрішню норму доходності $r_{IRR}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $t_{1-}$ = 1 рік | $t_{2-}$ = 2 роки | $t_{1+}$ = 3 роки | $t_{2+}$ = 4 роки |
| $R_{1-}$ = 40 тис. грн. | $R_{2-}$ = 40 тис. грн. | $R_{1+}$ = 70 тис. грн. | $R_{2+}$ = 100 тис. грн. |

3. Інвестиційний проект характеризується потоком платежів, який наведено в таблиці. Знайти дисконтований період окупності $t_{окуп.}$ при ставці дисконтування 0,3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t_{1-}$ = 1 рік | $t_{2-}$ = 2 роки | $t_{1+}$ = 3 роки | $t_{2+}$ = 4 роки | $t_{3+}$ = 5 років |
| $R_{1-}$ = 30 тис. грн. | $R_{2-}$ = 30тис.грн | $R_{1+}$ = 50тис.грн. | $R_{2+}$ = 60тис.грн | $R_{3+}$ =80тис.грн |

4. Інвестиційний проект характеризується потоком платежів, який наведено в таблиці. Знайти індекс рентабельності при ставці дисконтування 0,2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t_{1-}$ = 1 рік | $t_{2-}$ = 2 роки | $t_{1+}$ = 3 роки | $t_{2+}$ = 4 роки | $t_{3+}$ = 5 років |
| $R_{1-}$ = 50 тис.грн | $R_{2-}$ =30 тис. грн | $R_{1+}$ = 60 тис. грн | $R_{2+}$ = 90 тис. грн | $R_{3+}$ =150 тис.грн |

**5.** Порівняти за критеріями *ЧПВ* та *IP* два різних проекти, дисконтована вартість усіх доходів $\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}}$ та дисконтована вартість усіх витрат $\grave{A}_{\Sigma\hat{a}}$ яких наведені в наступній таблиці:

| Характеристики проектів | $\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}}$ | $\grave{A}_{\Sigma\hat{a}}$ |
|---|---|---|
| Проект № 1 | 10 млн грн | 6 млн грн |
| Проект № 2 | 7 млн грн | 3 млн грн |

**6.** Номінальні платежі за облігацією розміром $R$ = 200 грн поступають через кожні півроку протягом 4-х років. Потрібно знайти дюрацію грошового потоку при відсотковій ставці складних відсотків, яка дорівнює 20 %.

**7.** Портфель цінних паперів складається з казначейських облігацій, дюрація яких $T_1$ = 4 роки, а ринкова вартість $A_1$ = 20 000 грн, та корпоративних облігацій ($T_2$ = 3 роки і $A_2$ = 10 000 грн; $T_3$ = 2 роки і $A_3$ = 30 000 грн ). Знайти дюрацію портфеля.

# Післямова

*Коли буде зрублене останнє дерево,*
*коли буде отруєне остання річка,*
*коли буде зловлена остання пташка, -*
*тільки тоді ви зрозумієте,*
*що гроші не можливо їсти.*

**Індійська мудрість.**

У 2010 році лауреати Нобелівської премії Дітон та Канеман на основі результатів опитування 450 000 американців зробили висновок, що гроші приносять щастя, коли зарплата не перевищує $75 000 в рік, тому що люди з зарплатою не більше $6250 в місяць радіють кожному її підвищенню. Для тих, хто заробляє дуже великі гроші, вони перестають бути джерелом повсякденного щастя. З цього результату випливає, що при розробці економічної політики потрібно враховувати властивості індивідуального споживання.

Розуміння та використання фінансового принципу ***«зміни вартості грошей в часі»*** дає можливість правильно оцінювати кінцеві результати будь-якої фінансової операції. Тому методи фінансових розрахунків повинні засвоїти не тільки фінансисти, але і кожна розумна людина. Знання фінансової математики можуть допомогти керувати своїми грошима за умов невисоких економічних ризиків, скласти свій план досягнення фінансової свободи, який не повинен мати нічого загального з наживою.

У світі відбувається неперервний процес концентрації капіталу. В роботі [5] розглянута інтегральна концентрація капіталу як головна причина економічних криз. Кількісною характеристикою інтегральної концентрації капіталу $\rho$ є відсоток капіталу від, наприклад, загального капіталу в країні, який належить олігархам (самим заможним), чисельність яких складає, наприклад, 0,001% населення країни. Коефіцієнт інтегральної концентрації капіталу можна вираховувати або від внутрішнього валового продукту (ВВП), або від величини бюджету країни. При цьому змінюється діапазон значень $\rho$. Якщо взяти іншу величину відсотка самих багатих людей, яка враховується при знаходженні коефіцієнта інтегральної концентрації, то у відповідних формулах, які будуть приведені нижче, зміняться лише величини сталих коефіцієнтів. Інтегральну концентрацію капіталу можне розглядувати як в межах країни, так і в глобальних масштабах.

Якщо величина інтегральної концентрації капіталу не велика, але і не дуже мала, економіка розвивається позитивно. Але коли її величина переходить критичну величину $\rho_{крит}$, тоді починається економічна криза. Як за законами фізики неможливо створити вічний двигун, так і неможливий вічний процес збільшення інтегральної концентрації капіталу. Це відбувається в силу дії системного закону: кожна система має границі свого росту, при переході яких вона становиться некерованою і повинна або змінитися, або зламатися. Даний закон є наслідком діалектичного закону переходу кількісних змін у якісні. Момент, коли система становиться некерованою, і визначає кризу, при якій відбувається перерозподіл капіталу або його деконцентрація.

На основі даних швейцарського фінансового конгломерату Credit Suisse британська організація Oxfam розрахувала, що загальний капітал 3,6 млрд. самих бідних людей (половини людства) в 2010 році вже дорівнював капіталу всього 388 самих заможних людей світу. За останні п'ять років загальний капітал 3,6 млрд людей зменшився більш ніж на $1 трлн, а сукупний капітал 62 самих заможних людей світу зріс на $1,76 трлн. Одночасно кількість людей в світі, яка має активи на суму більше $30 млн., зменшилася в 2015 році на 3% (до 187 тис. людей). У Бразилії кількість надбагатих людей зменшилася у 2015 році на 12%, у Саудівській Аравії — на 8%, у Росії — на 5%, у США — на 2%, у Китаї — на 1%.

Загальна величина світового капіталу не змінюється: зменшення капіталу у одних призводить до зростання капіталу інших гравців світової економіки (компаній, галузей, країн, об'єднань країн).

Таким чином, інтегральна концентрація капіталу для економічної системи є об’єктивним процесом. Але коли її розмір переходить межу (величину $\rho_{крит}$ ), тоді цей процес як ракова пухлина різко знищує життєвість економічної системи.

У розвинутих країнах процес концентрації капіталу довгий час керувався кредитною «накачкою» попиту, більшість людей жила в кредит. Сучасні демократії створені за допомогою середнього класу, який в цих країнах складає не менш половини населення. Посилення та збільшення середнього класу стає перешкодою подальшої концентрації капіталу. Тому на даний час умови росту для середнього класу не створюються, більш того, йде процес його руйнування. Олігархічний капітал, який конвертувався у владу, та прикривається щитом «демократії», покладаючи основний тягар зобов’язань держави на середній клас, банкрутами робить простих громадян.

Війни релігійні, національні, мовні та інші конфлікти потрібні капіталу (владі) лише для того, щоб відвернути людей від справжніх джерел їх проблем. Олігархи застосовують поняття «демократія», «націоналізм», «патріотизм», «комунізм», «фашизм», «тоталітаризм», «ісламізм» та інші лише як інструменти в своїй стратегічній глобальній політиці. Олігархія становиться в світі основною формою правління.

Сучасні інформаційні технології, соціальні мережі, які різко прискорюють зміну свідомості людей, допомагають швидко організовуватися. І той самий середній клас може стати руйнівною силою існуючої економічної системи найбільш розвинутих держав. Тому в різних як недемократичних, так і «демократичних» країнах влада починає шукати шляхи та приймати закони, які допоможуть їй збільшити свій вплив на інформаційне поле та соціальні мережі.

В роботі [5] висунута гіпотеза, що сила взаємодії $F$ між двома капіталами $K_1$ та $K_2$ має математичний скалярний вираз, який аналогічний виразам взаємодії матеріальних систем, що мають масу, електричний та магнітний заряди (законам всесвітнього тяжіння Ньютона, Кулона та Ампера):

$$F = s \cdot \frac{K_1 \cdot K_2}{d^2},$$

де $d$ – безрозмірний коефіцієнт, що характеризує середовище (суспільство, країну), у якому взаємодіють капітали, і характеристики якого не можуть бути чіткими; $s$ – стала концентрації капіталу, яка знаходиться на основі статистичних даних.

Таким чином, історія людства – це історія взаємодії (боротьби) капіталів, а не класів як у К. Маркса. Боротьба класів іноді є тільки наслідком боротьби капіталів. Та і саме поняття «клас», змінюється в часі. Зараз можне виділити два класи:

– клас працівників, до якого відносяться і власники бізнесу;

– клас експлуататорів, до якого відносяться лише ті власники бізнесу, хто більшу частину додатної вартості витрачає на свої особисті потреби, а не на оплату працівникам, розвиток бізнесу, створення нових робочих місць та благодійність.

У якості сигналу $u(t, \rho, s)$, що визначає економічні цикли може виступати валовий національний продукт (ВНП), який змінюються в часі $t$. При вид цієї функції визначається як степенем інтегральної концентрації капіталу $\rho$, так і станом середовища $s$ і є більш тривалим ніж етап спадання.

Коли взяти перетворення Фур'є від автокореляційної функції $< u(t,\rho,s)\, u(t+\tau,\rho,s) >$ життєвого економічного циклу, тоді отримуємо спектральну щільність циклу $B_{\rho,T} = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} < u(t,\rho,s)\, u(t+\tau,\rho,s) > e^{-i2\pi\frac{\tau}{T}} d\tau$, де $T$ – тривалість (період) гармонік Фур'є спектральної щільності.

Висовується гіпотеза, що вид спектральної щільності $B_{\rho,T}$ економічних циклів має математичну форму, яка співпадає з формою термодинамічного закону Планка:

$$B_{\rho,T} = \frac{\tilde{N}_1}{T^5 \exp\left(\dfrac{C_2\, d}{\rho T} - 1\right)},$$

де $\rho$ – коефіцієнт інтегральної концентрації капіталу; $d$ – безрозмірний коефіцієнт, що характеризує середовище (країну), характеристики якого не можуть бути визначені чіткими; $C_1$ та $C_2$ – сталі величини, які знаходяться на основі статистичних даних економічних циклів.

З рівняння $\dfrac{\partial B_{\rho,T}}{\partial T} = 0,$ знаходимо, що гармоніка спектру з максимальним періодом обернено пропорційна степеню інтегральної концентрації капіталу $\rho$ та прямо пропорційна коефіцієнту середовища $d$:

$$T_{\max} = \frac{K d}{\rho},$$

де $K$ - стала, яка має розмірність часу (в роках) та розраховується на основі статистичних даних і залежить від того, як визначається інтегральна концентрація капіталу: скільки найбільш багатих людей враховується та від якої величини розраховується відсоток капіталу.

З цього рівняння слідує, що чим більше відрізняється реальне середовище від ідеального та чим більша інтегральна концентрація капіталу, тим менший період економічного циклу, який відбувається з максимальною потужністю.

Відповідно, тривалість економічного циклу $T_{кр}$, яка відповідає його максимальній спектральної щільності економічних циклів, і відповідає інтервалу часу між економічними кризами, має вигляд:

$$T_{кр} = \frac{K \cdot d}{\rho_{крит.}},$$

де $\rho_{крит.}$ – критичний коефіцієнт інтегральної концентрації капіталу, при якому починається криза.

Математично цей вираз є аналогічним термодинамічному закону зсуву Віна. При цьому, аналогом коефіцієнта відношення інтегральної концентрації капіталу $\rho$ до коефіцієнта середовища є температура чорного тіла, а аналогом $T_{max}$ є період інфрачервоного випромінювання чорного тіла, який відповідає максимуму потужності цього випромінювання.

Таким чином, чим менший коефіцієнт середовища $d$ та чим більше $\rho_{крит.}$, тим менший інтервал економічного циклу (тим з більшою частотою $f = 1/T$ відбуваються кризи). Але зміною економічного середовища та зменшенням швидкості інтегральної концентрації капіталу та, відповідно, коефіцієнта інтегральної концентрації капіталу можна збільшити цей період.

Ефективним способом зменшення швидкості інтегральної концентрації капіталу є не допущення олігархів до влади, яку вони застосовують для своїх особистих цілей. Це зменшило б корупцію та дало можливість не досягати критичних значень інтегральної концентрації капіталу.

Застосовуючи цю формулу, отримуємо, що наступна криза, прийде через час $T_{кр2}$:

$$T_{кр2} = T_{кр1} \frac{\rho_{крит1} \cdot d_2}{\rho_{крит2} \cdot d_1},$$

де $T_{кр1}$; $\rho_{крит1}$; $d_1$ – характеристики попередньої кризи.

Якщо, наприклад, характеристики попередньої кризи дорівнюють $T_{кр1}$ = 20 років; $\rho_{крит1}$ =0,6 (60%); $d_1$ = 0,6. Тоді при погіршенні середовища до $d_2$ = 0,5 та збільшенні інтегральної концентрації капіталу до $\rho_{крит2}$ = 0,9, отримуємо, що період наступного економічного циклу $T_{кр2}$ =11,1 років. При незмінних коефіцієнтах інтегральної концентрації ($\rho_{крит1} = \rho_{крит2}$) та покращенні середовища $d_2 = 0{,}5$, отримуємо, що період наступного економічного циклу $T_{кр2}$ = 30 років.

Якщо зміни середовища не відбуваються, реформи не проводяться ($d_2 = d_1$), тоді період наступного економічного циклу дорівнює

$$T_{кр2} = T_{кр1} \cdot \frac{\rho_{крит1}}{\rho_{крит2}},$$

При $T_{кр2} = 0{,}bT_{кр1,}$ отримуємо, що це відбулося в наслідок збільшення інтегральної концентрації капіталу : $\rho_{крит2} = \dfrac{\rho_{крит1}}{0{,}b}$.

$$P_2 = P_1 \frac{\rho^4_{крит2}\ d_1^4}{\rho^4_{крит1}\ d_2^4} = P_1 \frac{0{,}9^4\ 0{,}5^4}{0{,}6^4\ 0{,}6^4} = 2{,}44\ P_1.$$

Середовище визначатиме дискретною кінцевою множиною необхідних характеристик $X = \{x_i : i = \overline{1,n}\}$, які є значеннями дискретної нечіткої множини $A$, що характеризується сукупністю пар ($x_{\text{i}} \in A$, $\mu_A(x_i) \in [0;1]$ ) [6], де $\mu_A(x_i)$ – функція належності характеристики $x_{\text{i}}$ до середовища, у якому взаємодіють капітали.

В якості елементів, які характеризують середовище, можуть бути взяті, наприклад, наступні характеристики: $x_1$ – рівень освіти та культури; $x_2$ – моральність суспільства; $x_3$ – народовладдя; $x_4$ – наявність необхідної кількості середнього класу; $x_5$ – соціальна забезпеченість людей; $x_6$ – достойний рівень життя; $x_7$ – відсутність корумпованості в країні; $x_8$ - відсутність олігархів у владі; $x_9$ – якість правоохоронній системи; $x_{10}$ - незалежність судейської системи. Значення функцій належності характеристик реального середовища відносно необхідних (ідеальних) визначаються експертами. Відзначимо, що інтегральна концентрація капіталу є екзогенною змінною для всіх характеристик середовища.

Ідеальному середовищу кожна характеристика притаманна з функцією належності $\mu_A(x_i) = 1$. Тому коефіцієнт реального середовища буде визначатися степенем різниці між ним та ідеальним середовищем.

В якості кількісної характеристики цієї різниці в роботі пропонується застосовувати коефіцієнт розбіжності $Đ(D, \grave{A})$ між нечіткою множиною $D = \langle (x_1 / \mu_D(x_1) = 1);\ (x_2 / \mu_D(x_2) = 1);\ \dots, (x_n / \mu_D(x_n) = 1) \rangle$, яка визначає ідеальне середовище, та нечіткою множиною $A$, що характеризує реальне середовище [6]:

$$d = Đ(D, \grave{A}) = \frac{|\overline{D} \cup \grave{A}| - |\overline{D}|}{|D|} = \frac{|A|}{n},$$

де знак $|\dots|$ означає скалярну потужність нечіткої дискретної множини $A$:

$$|\grave{A}| = \sum_{\tilde{o}_i \in \tilde{O}} \mu_{\grave{A}}(\tilde{o}_i).$$

Чим менший коефіцієнт середовища, тим більш неідеальним воно є.

Нехай, для прикладу, реальне середовище визначається нечіткою множиною $A = \langle (x_1 / 0{,}7); (x_2 / 0{,}7); (x_3 / 0{,}5); (x_4 / 0{,}6); (x_5 / 0{,}5); (x_6 / 0{,}7); (x_7 / 0{,}2); (x_8 / 0{,}2); (x_9 / 0{,}5); (x_{10} / 0{,}5) \rangle$. Тоді коефіцієнт розбіжності між нечіткою множиною $D = \langle (x_1 / \mu_D(x_1) = 1);\ (x_2 / \mu_D(x_2) = 1);\ \dots, (x_n / \mu_D(x_n) = 1) \rangle$, яка визначає ідеальне середовище, та нечіткою множиною $A$, що характеризує реальне середовище, дорівнює:

$$d = \frac{|\overline{D} \cup \grave{A}| - |\overline{D}|}{|D|} = \frac{|A|}{n} = \frac{0,7+0,6+0,5+0,6+0,5+0,7+0,2+0,2+0,5+0,5}{10} = 0,5.$$

Криза не закінчиться доки степінь концентрації капіталу не буде нижчий критичного значення.

В період фінансової кризи 2008 – 2010 роках 49 самих заможних людей Німеччини стали вимагати від своєї влади підвищення податків для багатіїв (самих себе) на 5%, що змогло поповнити бюджет ФРН на 45 млрд. євро. Трохи раніше з аналогічним зверненням до своєї владі звернулися 16 французьких багатіїв. На заклик Білла Гейтса та Уоррена Бафета віддати 50% свого капіталу на благодійні потреби відгукнулося 69 американських багатіїв. Від українських олігархів таких закликів не чуємо.

Пояснення кризи тільки одним об'єктивним явищем (концентрацією капіталу) не суперечить системному аналізу і відповідає принципу «бритви Оками»: пояснення будь якого явища тим ближче до істинного, чим на меншій кількості гіпотез воно ґрунтується і чим більше широке коло явищ ґрунтується на цих гіпотезах.

# Глосарій

## А

**Актив (asset) –** будь-що, що має цінність при обміну (продажу).

**Актуарні розрахунки (actuarial calculations) -** система фінансових і статистичних методів розрахунку страхових тарифів, яка застосовується у страхуванні.

**Актуарний метод (actuarial method) погашення заборгованості** – це метод погашення заборгованості, при якому відсотки нараховуються на фактичні суми боргу, а частинний платіж $R_i$ іде, в першу чергу, на погашення відсотків. При цьому, як правило, застосовують звичайні відсотки з наближеною кількістю днів. Коли величина частинного платежу $R_i$ менше нарахованих відсотків, тоді заборгованість не зменшується, а платіж додається до наступного платежу.

**Амортизація (depreciation) –** періодичні відрахування, які характеризують зменшення облікової вартості основних фондів та нематеріальних активів за визначену кількість років.

**«Англійська практика» –** метод розрахунку відсотків, при якому тривалість року (база нарахування) береться рівною 365 або 366 діб, а кількість діб між датою отримання та погашення кредиту розраховується точно за календарем, - це є точними відсотками з точною кількістю діб кредиту (метод 365/365).

**Андеррайтер (underwriter) –** маклер в операціях з цінними паперами; особа, що оформляє страхові полюси, оцінює ризики, визначає ставки премій та інші умови страхування**.**

**Ануїтет (annuity) –** фінансова рента з річними виплатами; ряд послідовних грошових виплат або надходжень, які здійснюються через рівні інтервали часу (як правило, через рік).

**Антисипативні відсотки (anticipate interest)** – це відсотки, що нараховуються на кінцеву (нарощену) суму: $I = Sd$, при цьому застосовується облікова відсоткова ставка.

## Б

**База нарахування відсотків (interest base amount) –** вихідна сума, на яку нараховуються відсотки.

**Банківський (комерційний) облік (bank discount) –** це дисконтування, при якому застосовується відсоткова облікова ставка $d$.

**Брутто-премія (gross of premium) –** премія, яка збільшена на величину інфляційної премії та премії за ризик.

**Брутто-ставка (gross of rate) –** відсоткова ставка, яка враховує темп інфляції та ризик. В склад брутто-ставки входить нетто-ставка.

## В

**Вексель (bill of exchange) –** вид письмового боргового зобов'язання, що дає право власнику після закінчення терміну, який в ньому вказаний, вимагати виплати відповідної суми грошей з боржника.

**Відсоткова ставка (rate of interest) –** це відносна величина, яка характеризує доходність кредитної операції для кредитора та вартість кредиту для боржника і є відношенням відсотків до суми боргу.

**Відсоткова ставка дисконтування (rate of discount) –** відсоткова ставка, яка використовується для розрахунку сучасної вартості майбутніх грошей.

**Відсоткова ставка нарощення (interest base rate) *i*,** яку часто називають відсотковою ставкою – це відношення відсотків $I$, отриманих за певний проміжок часу, до початкової суми $P$ боргу: $i = \frac{I}{P} = \frac{S - P}{P}$.

**Відсотки (відсотковий прибуток, відсоткові гроші), (interest) *I*** – це абсолютна величина прибутку (доходу) власника капіталу за термін від видачі грошей в будь-якій формі в кредит до їх повернення: $I = S - P$.

**Відсотки прості (simple interest) –** це відсотки, при яких база нарахування *B* (interest base amount), на яку нараховується відсотки за кожний період нарахування, одна і та ж (*B* = const).

**Відсотки складні (compound interest) -** це відсотки, при яких база нарахування *B* (interest base amount), на яку нараховується відсотки за кожний період, змінюється: кожний період нарахування *B* = varia.

**Відкладена рента (deffered annuity)** – рента, термін реалізації якої відкладається на час, який вказаний у договорі.

**Вічна рента (perpetuity) –** фінансова рента з необмеженою кількістю членів ренти та, відповідно, необмеженим часом її дії.

**Вірна рента (annuity certain)** – рента, яка підлягає безумовній виплаті; кількість членів вірної ренти наперед відома.

**Внутрішня норма доходності (ВНД), (Internal Rate of Retun (IRR))** – це така відсоткова ставка дисконтування $r_{IRR}$, за якою теперішня (дисконтована) вартість доходів дорівнює теперішній (дисконтованій) вартості витрат:

$$A_{\Sigma д} = \sum_i R_{i+} * \nu_i = \sum_i \frac{R_{i+}}{(1 + r_{IRR})^{n_{i+}}} = A_{\Sigma в} = \sum_j R_{j-} * \nu_j = \sum_j \frac{R_{j-}}{(1 + r_{IRR})^{n_{j-}}}.$$

## Г

**Грант-елемент (grant element) –** це свідома втрата кредитора та, відповідно, виграш боржника, що обумовлені пільгами, зокрема, застосуванням більш низької відсоткової ставки, ніж ставка кредитного ринку. Грант-елемент обчислюється або у відносних або у абсолютних величинах.

**Грошові потоки (потоки платежів), (Cash flows stream) –** послідовні надходження або відтоки капіталу за деякий час.

# Д

**Декурсивні відсотки (discursive interest) –** це відсотки, що нараховуються на попередню суму (принцип «від теперішнього до майбутнього») і, відповідно, при цьому застосовується відсоткова ставка нарощення.

**Депозит (deposit) –** вклад; грошові кошти, які їх власник вніс на спеціальний рахунок банку.

**Дивіденди (dividend) –** прибуток по акціям або біржовим індексам.

**Дисконтування (discount) –** процес знаходження сучасних (приведених до попереднього часу) вартостей грошей.

**Дисконт (discount)** – 1) відсотки, які отримує банк, при обліку векселів; 2) різниця між номіналом цінного паперу та його курсом на фондовій біржі, при умові, що цей курс нижчий; 3) різниця між нарощеною вартістю $S$ та сучасною вартістю $P$ для учасника фінансової операції, який втрачає цю суму грошей: $D = S - P$.

**Дисконтний множник (present value interest factor)** – множник, який показує частку, яку становитиме початкова сума при заданій ставці дисконтування від нарощеної за $n$ періодів суми.

**Дисконтний множник за складними відсотками (compound discount factor) –** множник, який показує частку, яку становитиме початкова сума при заданій ставці дисконтування від нарощеної за $n$ періодів суми при застосуванні складних відсотків.

**Дисконтований період окупності, ДПО (discounted payback period, DPP) –** це тривалість періоду, за який теперішня вартість доходів (доходів дисконтованих на початок фінансової операції), дорівнює дисконтованій вартості всіх витрат (всіх інвестицій).

**Доходність фінансовій операції (return of financial operation) –** це відношення чистого прибутку, який отриманий за конкретний відрізок часу, до відповідних витрат.

**Дюрація** або **тривалість)** ***T*** **(duration)** – це середньозважена тривалість надходження платежів грошового потоку, коефіцієнти ваги якої визначаються відношенням сучасної вартості цих платежів до сучасної вартості всього потоку платежів:

$$T = \sum_{i}^{n} t_i \times P_i ,$$

де $t_i$ – час надходження $i$-ого платежу; $n$ – кількість платежів; $P_i$ - коефіцієнт ваги $i$-ого платежу, який визначається за формулою:

$$P_i = \frac{A_i}{A_\Sigma}; \quad \sum_{i}^{n} P_i = 1 ,$$

де $A_i$ – сучасна вартість $i$-ого платежу; $A_\Sigma$ – сучасна вартість всього потоку платежів.

## Е

**Еквівалентна відсоткова ставка (equivalent rate) –** відсоткова ставка, яка забезпечує фінансовий результат, що і альтернативна відсоткова ставка.

**Ефективна відсоткова ставка (effective rate) –** це відсоткова ставка складних відсотків, яка дає однаковий результат як і при $m$-разовому нарахуванні відсотків по ставці $j / m$.

**Ефективність фінансової операції (efficiency of financial operation) –** це відношення чистого прибутку до величини інвестицій (витрат).

## З

**Збиток (clain) –** втрати одного з учасників фінансової операції.

**Звичайні або комерційні відсотки (ordinary interest) –** це відсотки, при яких період нарахування відсотків визначають з наближеної кількості діб в році: $K$ = 360 діб.

**Змінна рента (variable rent) –** рента, члени якої не є постійними величинами.

## І

**Індекс купівельної спроможності грошей (cost idex, index of purchasing power) $J_c$ –** це кількісна характеристика інфляції, яка дорівнює оберненій величині індексу цін: $J_c = \frac{1}{J_p}$ і показує, у скільки разів зменшилася купівельна спроможність грошей.

**Індекс цін (price index) $J_p$ –** це кількісна характеристика інфляції, яка показує у скільки разів зросла вартість товару та послуг (наприклад, споживчої корзини) за певний період часу [0, t] та визначається за формулою: $J_p = \frac{C_t}{C_0}$, де $C_t$ – реальна вартість суми грошей або вартість, наприклад, споживчої корзини в час $t$; $C_0$ - вартість суми грошей (споживчої корзини ) в попередній час $t_0$.

**Інвестиції (investments)** – вкладення капіталу в будь-яке підприємство, справу, цінні папери майнові та інтелектуальні цінності, активи.

**Інвестор (investor) –** власник фінансових активів.

**Індекс рентабельності, IP (profitability index, PI)** – це відношення сумарної приведеної (дисконтованої) вартості доходів до сумарної приведеної (дисконтованої) вартості витрат:

$$^{2}Đ=\frac{\grave{A}_{\Sigma\ddot{a}}}{\grave{A}_{\Sigma\hat{a}}}=\frac{\sum_{i}R_{i+}*\nu_{i}}{\sum_{j}R_{j-}*\nu_{j}}=\frac{\sum_{i}\frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}}}{\sum_{j}\frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}}}.$$

**Іпотека, іпотечний кредит (mortgage) –** кредит, який забезпечений нерухомістю, та погашається потоком платежів.

**Інфляція (inflation) –** це знецінення грошей, що виявляється в рості цін на товари та послуги і, як наслідок, зниженні купівельної спроможності грошей.

## К

**Коефіцієнт нарощення ренти (future value factor of an annuity) –** коефіцієнт який показує, в скільки разів нарощена сума ренти більше її першого члену.

**Коефіцієнт приведення ренти (present value factor of an annuity) –** коефіцієнт який показує, скільки рентних платежів утримується в сучасній її вартості.

**Конверсія валюти (conversion currency)** – це варіанти нарощення грошей шляхом покладення їх на депозит з подвійною конвертацією валюти.

**Конверсія займу (conversion loan) –** зміна початкових умов займу: відсоткової ставки, терміну погашення кредиту, терміну купонних виплат.

**Конверсія рент (conversion rent) –** зміна умов виплати ренти (часткова чи повна зміна початкових параметрів ренти), яка призводить до створення нової ренти.

**Конвертована валюта (convertible currency)** – це валюта, яка можне бути вільно обмінена (конвертована) на іншу іноземну валюту.

**Консолідація (consolidation) заборгованості** – це об’єднання окремих платежів $S_1$; $S_2$;…; $S_m$ з термінами виплат $n_1$; $n_2$;…; $n_m$ одним платежем в розмірі $S_0$ і одним терміном погашення заборгованості $n_0$.

**Консолідація рент (rent consolidation)** – це об’єднання декількох рент в одну, яке ґрунтується на принципі фінансової еквівалентності.

**Котирування валют (quotation of currency) –** встановлення курсів валют.

**Короткострокові кредити (short-term loan) –** кредити, які видаються на термін до одного року з однократним нарахуванням відсотків.

## Л

**Лізинг (leasing)** – це довгострокова (на термін від 3 до 20 і більш років) оренда машин та обладнання, які куплені лізингодателем для орендатора, та при якій права власності зберігається за лізингодателем на весь термін оренди.

## М

**Маржа (margin) –** це різниця між курсами продажу та покупки валюти, цінних паперів та інше.

**Математичне дисконтування (mathematic discount) –** це дисконтування, при якому застосовується відсоткова ставка нарощування $i$.

**Матеріальний актив (tangible asset) –** актив, вартість якого визначається його фізичними властивостями (наприклад, споруда, обладнання, земля, твори мистецтва).

**Метод (правило) торговця (merchant's rule) –** це метод, при якому виплата заборгованості здійснюється наступним чином: відсотки нараховуються тільки на суму боргу: $D = D_0(1+in),$ де $n$ – термін позики. На внесені платежі $R_j$ також нараховуються відсотки: $K_j = R_j(1+i(n-n_j)),$ де $n_j$ – термін платежу $R_j$. Останній платіж повинен збалансувати нарощену суму боргу та нарощені платежі.

$$R_n = D_0(1+in) - \sum_j R_j(1+i(n-n_j)).$$

**Множник нарощення (future value interest factor) –** множник що показує в скільки разів збільшилася за $n$ періодів нарахування початкова сума при заданій відсотковій ставці.

**Множник нарощення за складними відсотками (compound interest factor) –** множник, що показує в скільки разів збільшилася за $n$ періодів нарахування початкова сума при заданій відсотковій ставці складних відсотків.

## Н

**Нарощення грошей (money growth) –** збільшення суми грошей шляхом їх видачі в будь-якій формі в кредит.

**Нарощена сума, майбутня сума позики (future value, terminal value) –**сума, що дорівнює інвестованим грошам плюс нарахованим на них відсоткам (для позичальника – це сума боргу, яка повинна бути погашена в час $t$).

**Нарощена сума потоку платежів (amount of cash flows) –** сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них відсотками.

**Нарощена сума аннуітету (amount of annuity) –** сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них відсотками.

**Нематеріальний актив (intangible asset) –** це законні права на деяку майбутню вигоду (наприклад, цінні папери).

**Неперервні відсотки (continuous interest)** – відсотки, які нараховуються з частотою $m = \infty$ (нарощення або дисконтування проводиться неперервне).

**«Німецька практика» -** метод розрахунку відсотків, при якому тривалість року (база нараховування) береться рівною 360 діб, а кількість діб між датою отримання та погашення кредиту розраховується по 30 діб в кожному повному місяці та точною кількістю діб в кожному неповному місяці; це є звичайні відсотки з неточною кількістю діб кредиту (метод 360/360).

**Номінальна відсоткова ставка (nominal interest rate)** – це 1)така відсоткова ставка, яка не враховує непередбачених темпів інфляції (**нетто – ставка (net of rate)**); 2) річна відсоткова ставка при нарахуванні відсотків декілька разів на рік.

## О

**Обернені задачі (inverse problem)** фінансової математики **–** це знаходження сучасних (приведених) вартостей грошей $P$. Відповідний процес називається **дисконтуванням (discount).**

**Облігація (bound) –** довгостроковий борговий цінний папір, яку випускають корпорації або держави, за якою емітент повинен виплатити інвестору (кредитору) у визначений час отриману суму плюс відсотки.

**Облікова відсоткова ставка (discount base rate) *d*,** – це відношення відсотків $I$, отриманих за певний проміжок часу, до нарощеної суми $S$:

$$d = \frac{I}{S} = \frac{S - P}{S}.$$

**Операційний лізинг** (**operational leasing)** – це аренда машин та обладнання на термін менший ніж їх період амортизації, і після завершення цього терміну орендатор може заключити нову угоду, або повернути власнику об'єкт лізингу.

**Опціон «колл» ( call option)** – контракт, які дає право купити визначену кількість акцій по визначеній ціні у визначений час.

**Опціон «пут» ( put option)** – контракт, який дає право продати визначену кількість акцій по визначеній ціні у визначений час.

## П

**Період нарахування відсотків (running period) –** це інтервал часу $K$, до якого прив'язана відсоткова ставка.

**Період ренти (rent period, payment period) –** часовий інтервал між двома рентними платежами.

**Пільговий кредит (preferential credit, soft credit) –** видача кредиту по відсотковій ставці $g$, яка суттєво менше ніж та, яка є загально прийнятою на ринку капіталів в даний момент. В наслідок видачі пільгового кредиту або реструктуризації боргу боржник фактично отримує субсидію, а кредитор втрачає деяку суму.

**Портфель цінних паперів (portfolio) –** набір цінних паперів, які знаходиться у інвестора.

**Початкова, теперішня (в початковий момент $t_0$) сума (present value, principal value)** – це сума фінансової операції в початковий момент $t_0$; вартість майбутніх грошей дисконтованих (приведених) по визначеній ставці до попереднього часу $t_0$, або сума, яка дається в борг.

**Прості відсотки (simple interest) –** це відсотки, база нарахування $B$ яких на кожній період нарахування одна і та ж ($B$ = const).

**Прямі задачі (direct problem)** фінансової математики **–** це задачі знаходження майбутньої суми грошей $S$.

## Р

**Реальна відсоткова ставка (real interest rate) $i_p$** – це така відсоткова ставка, яка характеризує доходність операції за умов інфляції.

**Рента постнумерандо (ordinary annuity) –** рента, у якій платежі робляться в кінці кожного відповідного періоду (року, кварталу, місяцю і т.д.).

**Рента пренумерандо (annuity due) –** рента, у якій платежі робляться на початку кожного відповідного періоду (року, кварталу, місяця і т.д.).

**Реструктуризація кредиту (restructuring loan, renegotiating loan) –** це перегляд умов погашення кредиту в зв’язку з різким погіршенням фінансового стану боржника. Реструктуризацію проводять різними способами:

- пряме скасування деякої частини суми боргу;
- розташування кредиту за пільговою відсотковою ставкою;
- перегляд термінів та порядку виплати відсотків і сум погашення основного боргу;
- застосування одночасно декілька способів, які вказані вище.

**Рівняння еквівалентності (equation of value) –** рівняння, у якому сума одних платежів, приведених до якогось моменту часу, дорівнює сумі інших платежів ( платежів за новим зобов'язанням), зведених до тієї самої дати.

**Річна рента (annuity)** – рента, за якої виплати проводяться один раз за рік.

**Ризик (risk) –** це невизначеність в процесі прийняття та реалізації рішення, а також в процесі досягнення цілі, яка може призвести до відхилення отриманого результату, від того який очікувався.

## С

**Складні відсотки (compound interest) –** це такі відсотки, при яких база нарахування $B$ змінюється в кожному періоді: кожний період нарахування $B$ = varia.

**Сила росту (force of interest) –** річна відсоткова ставка при неперервних відсотках; відносний приріст нарощеної суми до нарощеної суми в нескінченно малому інтервалі часу.

**Ставка дисконтування (rate of discount) –** відсоткова ставка, при якій майбутня вартість платежу S зводиться до його сучасної вартості $P$ або будь-якого попереднього часу при відомій тривалості фінансової операції.

**Споживчий кредит (buyer credit) –** кредит, який видається населенню для купівлі предметів особистого споживання.

**Сучасна вартість аннуітету (present value of an annuity) –** сума всіх членів потоку платежів, дисконтованих на початок відрахування.

**Сучасна вартість потоку платежів (present value of cash flows) –** сума всіх членів потоку платежів, дисконтованих на початок відрахування.

## Т

**Темп інфляції (rate of inflation) *H* –** це відносний приріст цін, що вимірюється у відсотках, за період часу [$t_0$, $t$]: $H = \frac{C_t - C_0}{C_0} * 100,\%$ .

**Термін окупності (payback, payout period)** або **дисконтований період окупності, ДПО (discounted payback period, DPP)** – це тривалість періоду, за який теперішня вартість доходів (доходів дисконтованих на початок фінансовій операції), дорівнює дисконтованій вартості всіх витрат (всіх інвестицій).

**Термін ренти (term of rent) –** проміжок часу від початку першого періоду ренти до кінця останнього.

**Точні відсотки (exact interest) –** відсотки, при яких період нарахування визначають з точною кількістю діб в році ($K$ = 365 або 366 діб).

## У

**Умовна рента (contingent annuity)** – рента, виплата якої залежить від того, чи відбудеться деяка випадкова подія; кількість членів умовної ренти наперед не відоме.

## Ф

**Фінансова рента (rent) або рента –** ряд послідовних грошових виплат або надходжень, які здійснюються через рівні інтервали часу.

**Фінансовий лізинг (financial leasing)** – це така угода, при якій орендатор за час дії угоди виплачує повну вартість амортизації машини (обладнання) або його більшу частину, а також прибуток лізингодавця. Після закінчення терміну угоди орендатор може або заключити нову угоду на оренду машин (обладнання), або купити об’єкт лізингу за його залишкову вартість.

**«Французька практика»** – метод розрахунку відсотків, при якому тривалість року (база нарахування) береться рівною 360 діб, а кількість діб між датою отримання та погашення кредиту розраховується точно за календарем; це є звичайні відсотки з точною кількістю діб кредиту (метод 365/360).

## Ч

**Часова вартість грошей (time value to money)** – економічний закон, який говорить, що сучасні гроші мають більшу ціну, ніж гроші майбутні.

**Число (кількість) періодів нарахування** відсотків за інтервал часу $t - t_0$ – це число $n = \frac{t - t_0}{\hat{E}}$, де $K$ – період нарахування відсотків.

**Член ренти (member of rent)** – величина окремого рентного платежу.

**Чиста приведена вартість, ЧПВ (net present value, NPV)** – це сумарна сучасна (дисконтована) вартість доходів мінус сумарна сучасна (дисконтована) вартість витрат:

$$\times\ddot{I}\,\hat{A} = \grave{A}_{\Sigma\ddot{a}} - \grave{A}_{\Sigma\hat{a}} = \sum_i R_{i+} \cdot v_i - \sum_j R_{j-} \cdot v_j = \sum_i \frac{R_{i+}}{(1+r)^{n_{i+}}} - \sum_j \frac{R_{j-}}{(1+r)^{n_{j-}}},$$

де $v_i$ – дисконтний множник (discount factor); $r$– відсоткова ставка дисконтування.

# Англо – український словник з фінансової математики

## A

Actuarial calculations – актуарні розрахунки.

Actuarial method – актуарний метод.

Amount – сума, кількість.

Amount due – сума боргу.

Amount of annuity – нарощена сума аннуітету.

Amount of cash flows – нарощена сума потоку платежів.

Annually – щороку; один раз в рік.

Annuity – річна рента, ануітет.

Annuity due – рента пренумерандо.

Annuity certain – вірна рента.

Anticipate interest – антисипативні відсотки.

Asset– актив.

Asset management decision – рішення з управління активами.

## B

Bank – банк.

Bankrupt – банкрот.

Bank Discount – банківський (комерційний) облік.

Bill of exchange – вексель.

Bonus – бонус, премія, надбавка, пільга.

Bound – облігація.

Buyer – покупець.

Buyer credit – споживчий кредит.

## C

Cash Insolvency – банкрутство.

Cash Flow – член грошового потоку.

Cash flows stream – грошовий потік.

Call Option – опціон «колл».

Cess – податок.

Compound Interest – складні відсотки.

Compound discount rate – облікова ставка складних відсотків.

Compound discount factor – дисконтний множник за складними відсотками.

Compound interest factor – множник нарощення за складними відсотками.

Compounding – нарахування складних відсотків.

Compound discursive interest – складні декурсивні відсотки.

Compound anticipate interest – складні антисипативні відсотки.

Currency risk – валютний ризик.

Consolidation – консолідація.

Consumer price index – індекс споживчих цін.

Continuous Interest – неперервні відсотки.

Contingent annuity – умовна  рента.

Contract – договір, контракт.

Convertable (hard) currency - конвертована валюта

Conversion – конверсія.

Conversion loan – конверсія позики.

Conversion rent – конверсія рент.

Cost – вартість.

Cost idex, index of purchasing power – індекс купівельної спроможності грошей.

## D

Damage – збиток, втрата.

Date of maturity, due date – кінец фінансової операції, дата платежу.

Depreciation – амортизація.

Default – дефолт.

Deffered annuity – відкладена рента.

Deposit – депозит.

Discursive interest – декурсивні відсотки.

Direct problem – прямі задачі.

Diversification – диверсифікація.

Discount – дисконт (знижка).

Discursive interest – рекурсивні відсотки.

Discount base rate – облікова відсоткова ставка *d*.

Discounted payback period – дисконтований період окупності.

Discount rate – відсоткова ставка дисконтування.

Discounting – дисконтування.

Discount factor – дисконтний множник.

Dividend – дивіденди.

Due – внесок, збір, податок.

Duration – дюрація.

## E

Econometric Model – економетрична модель.

Economic Earnings – економічний прибуток.

Effective rate – ефективна  відсоткова ставка.

Efficiency of financial operation – ефективність фінансової операції.

Endogenous Variable – ендогенна змінна.

Equivalent rate – еквівалентна відсоткова ставка.

Equivalent Yield – еквівалентна доходність.

Equation of value – рівняння еквівалентності.

Exact interest – точні відсотки.

Expenced – витрати.

Exogenous Variable – екзогенна змінна.

## F

Financial analysis – фінансовий аналіз.

Financial management – фінансовий менеджмент.

Financial Analysts – фінансовий аналітик.

Financial Investment – фінансова інвестиція ( інвестиція у фінансові активи).

Financial leasing – фінансовий лізинг.

Floating (Variable) Rate – плаваюча (змінна) ставка.

Force of interest – сила росту.

Futures (Futures Contract) – ф’ючерс (ф’ючерсній контракт).

Future value (terminal value) – майбутня (нарощена) сума позики.

Future Value Interest Factor – множник нарощення.

Future value factor of an annuity – коефіціент нарощення ренти.

## G

Grant element – грант-елемент.

Gross of premium – брутто-премія.

Gross of rate – брутто-ставка.

## H

Hedge –хеджування.

Hedger – хеджер.

Hypothec – іпотека.

## I

Inflation – інфляція.

Information – інформація.

Intangible asset – нематеріальний актив.

Internal rate of return (Implied return) –внутрішня ставка (норма) доходності.

Interest – відсотки.

Interest base amount – база нарахування відсотків.

Interest base rate – відсоткова ставка нарощення.

Investor – інвестор.

Investment – інвестиція.

Investment manager – інвестиційний менеджер.

Investment company – інвестиційна компанія.

Investment decision – інвестиційне рішення.

Inverse problem – обернені задачи.

## L

Lease – оренда.

Leasing – лізинг.

Lessor – арендодавець, лізингодавець.

Liquidity – ліквідність.

Loan – кредит (позика).

## M

Mathematic discount – математичне дисконтування.

Market Risk (Systematic Risk) – ринковий (систематичний) ризик.

Member of rent – член ренти.

Merchant’s rule – правило торговця.

Minimum attractive rate of return – мінімальна приваблива відсоткова ставка.

Money growth – нарощення грошей.

Mortgage – іпотека.

Mutuant – кредитор.

Mutuar – позичальник

**N**

Net future value (NFV) – чиста нарощена вартість (ЧНВ).

Net present value, NPV – чиста приведена вартість, *ЧПВ*.

Nominal interest rate – номінальна відсоткова ставка.

**O**

Operational leasing – операційний лізинг.

Option – опціон.

Ordinary annuity рента постнумерандо.

Ordinary interest – звичайні  або комерційні відсотки.

**P**

Payback, payout period – термін окупності.

Payment period, rent period – період ренти.

Pension plan – пенсійний фонд.

Perpetuity – вічна рента.

Par value – номінальна вартість.

Portfolio – портфель.

Portfolio construction – формування портфеля.

Prise – ціна.

Prise index – індекс цін.

Premium – премія.

Present value, principal value – початкова, сучасна, теперішня (в початковий момент $t_0$) сума грошей.

Present value factor of an annuity – коефіцієнт зведення ренти.

Present value (principal value) – теперішня, початкова (в початковий момент $t_0$) сума.

Present value of an annuity – сучасна вартість аннуітету.

Present value interest factor – дисконтний множник.

Profitability index, PI – індекс рентабельності.

Preferential credit – пільговій кредит.

Put option – опціон «пут».

## R

Rate of inflation – темп інфляції.

Rate of interest – відсоткова ставка

Real interest rate – реальна відсоткова ставка.

Rent – фінансова рента, рента, член ренти.

Rent consolidation – консолідація рент.

Restructuring loan, renegotiating loan – реструктуризація позики.

Return – дохід, доходність.

Return of financial operation – доходність фінансової операції.

Real Return – реальна доходність.

Risk – ризик.

Risky asset – ризиковані активи.

Risk free asset – безризиковий актив.

Risk premium – премія за ризик.

Running period – період нарахування відсотків.

## S

Security – цінний папір.

Seller – продавець.

Simple interest – прості відсотки.

Simple discursive interest – прості декурсивні відсотки.

Simple anticipate interest – прості антисипативні відсотки.

Soft credit – пільговий кредит.

## T

Tangible asset – матеріальний актив.

Term of rent – термін ренти.

Time – час.

Time value to money – зміна цінності грошей в часі.

## U

Underwriter – андерайтер.

Undiversifiable risk – недиверсифікований ризик.

Unsystematic risk – несистематичний ризик.

## V

Value – вартість, цінність.

Variable rent – змінна рента.

## Додаток 1

# НОМЕРИ ДНІВ РОКУ

| місяці / дні | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 32 | 60 | 91 | 121 | 152 | 182 | 213 | 244 | 274 | 305 | 335 |
| **2** | 2 | 33 | 61 | 92 | 122 | 153 | 183 | 214 | 245 | 275 | 306 | 336 |
| **3** | 3 | 34 | 62 | 93 | 123 | 154 | 184 | 215 | 246 | 276 | 307 | 337 |
| **4** | 4 | 35 | 63 | 94 | 124 | 155 | 185 | 216 | 247 | 277 | 308 | 338 |
| **5** | 5 | 36 | 64 | 95 | 125 | 156 | 186 | 217 | 248 | 278 | 309 | 339 |
| **6** | 6 | 37 | 65 | 96 | 126 | 157 | 187 | 218 | 249 | 279 | 310 | 340 |
| **7** | 7 | 38 | 66 | 97 | 127 | 158 | 188 | 219 | 250 | 280 | 311 | 341 |
| **8** | 8 | 39 | 67 | 98 | 128 | 159 | 189 | 220 | 251 | 281 | 312 | 342 |
| **9** | 9 | 40 | 68 | 99 | 129 | 160 | 190 | 221 | 252 | 282 | 313 | 343 |
| **10** | 10 | 41 | 69 | 100 | 130 | 161 | 191 | 222 | 253 | 283 | 314 | 344 |
| **11** | 11 | 42 | 70 | 101 | 131 | 162 | 192 | 223 | 254 | 284 | 315 | 345 |
| **12** | 12 | 43 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 |
| **13** | I3 | 44 | 72 | 103 | 133 | 164 | 194 | 225 | 256 | 286 | 317 | 347 |
| **14** | 14 | 45 | 73 | 104 | 134 | 165 | 195 | 226 | 257 | 287 | 318 | 348 |
| **15** | 15 | 46 | 74 | 105 | 135 | ,66 | 196 | 227 | 258 | 288 | 319 | 349 |
| **16** | 16 | 47 | 75 | 106 | 136 | 167 | 197 | 228 | 259 | 289 | 320 | 350 |
| **17** | 17 | 48 | 76 | 107 | 137 | 168 | 198 | 229 | 260 | 290 | 321 | 351 |
| **18** | 18 | 49 | 77 | 108 | 138 | 169 | 199 | 230 | 261 | 291 | 322 | 352 |
| **19** | 19 | 50 | 78 | 109 | 139 | 170 | 200 | 231 | 262 | 292 | 323 | 353 |
| **20** | 20 | 51 | 79 | 110 | 140 | 171 | 201 | 232 | 263 | 293 | 324 | 354 |
| **21** | 21 | 52 | 80 | 111 | 141 | 172 | 202 | 233 | 264 | 294 | 325 | 355 |
| **22** | 22 | 53 | 81 | 112 | 142 | 173 | 203 | 234 | 265 | 295 | 326 | 356 |
| **23** | 23 | 54 | 82 | 113 | 143 | 174 | 204 | 235 | 266 | 296 | 327 | 357 |
| **24** | 24 | 55 | 83 | 114 | 144 | 175 | 205 | 236 | 267 | 297 | 328 | 358 |
| **25** | 25 | 56 | 84 | 115 | 145 | 176 | 206 | 237 | 268 | 298 | 329 | 359 |
| **26** | 26 | 57 | 85 | 116 | 146 | 177 | 207 | 238 | 269 | 299 | 330 | 360 |
| **27** | 27 | 58 | 86 | 117 | 147 | 178 | 208 | 239 | 270 | 300 | 331 | 361 |
| **28** | 28 | 59 | 87 | 118 | 148 | 179 | 209 | 240 | 271 | 301 | 332 | 362 |
| **29** | 29 | - | 88 | 119 | 149 | 180 | 210 | 241 | 272 | 302 | 333 | 363 |
| **30** | 30 | - | 89 | 120 | 150 | 181 | 211 | 242 | 273 | 303 | 334 | 364 |
| **31** | 31 | - | 90 | - | 151 | - | 212 | 243 | - | 304 | - | 365 |

# Додаток 2

## Множники нарощення (складні відсотки)

| Число період. | Ставка відсотків, % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 1,020000 | 1,050000 | 1,070000 | 1,090000 | 1,100000 | 1,110000 |
| 2 | 1,040400 | 1,102500 | 1,144900 | 1,188100 | 1,210000 | 1,232100 |
| 3 | 1,061208 | 1,157625 | 1,225043 | 1,295029 | 1,331000 | 1,367631 |
| 4 | 1,082432 | 1,215506 | 1,310796 | 1,411582 | 1,464100 | 1,518070 |
| 5 | 1,104081 | 1,276282 | 1,402552 | 1,538624 | 1,610510 | 1,685058 |
| 6 | 1.126162 | 1,340096 | 1,500730 | 1,677100 | 1,771561 | 1,870415 |
| 7 | 1,148686 | 1,407100 | 1,605781 | 1,828039 | 1,948717 | 2,076160 |
| 8 | 1,171659 | 1,477455 | 1,718186 | 1,992563 | 2,143589 | 2,304538 |
| 9 | 1,195093 | 1,551328 | 1,838459 | 2,171893 | 2,357948 | 2,558037 |
| 10 | 1,218994 | 1,628895 | 1,967151 | 2,367364 | 2,593742 | 2,839421 |
| 11 | 1,243374 | 1,710339 | 2,104852 | 2,580426 | 2,853117 | 3,151757 |
| 12 | 1,268242 | 1,795856 | 2,252192 | 2,812665 | 3,138428 | 3,498451 |
| 13 | 1,293607 | 1,885649 | 2,409845 | 3,065805 | 3,452271 | 3,883280 |
| 14 | 1,319479 | 1,979932 | 2,578534 | 3,341727 | 3,797498 | 4,310441 |
| 15 | 1,345868 | 2,078928 | 2,759032 | 3,642482 | 4,177248 | 4,784589 |
| 16 | 1,372786 | 2,182875 | 2,952164 | 3,970306 | 4,594973 | 5,310894 |
| 17 | 1.400241 | 2,292018 | 3,158815 | 4,327633 | 5,054470 | 5,895093 |
| 18 | 1,428246 | 2,406619 | 3,379932 | 4,717120 | 5,559917 | 6,543553 |
| 19 | 1.456811 | 2,526950 | 3,616528 | 5,141661 | 6,115909 | 7,263344 |
| 20 | 1,485947 | 2,653298 | 3,869684 | 5,604411 | 6,727500 | 8,062312 |
| 21 | 1,515666 | 2,785963 | 4,140562 | 6,108808 | 7,400250 | 8,949166 |
| 22 | 1,545980 | 2,925261 | 4,430402 | 6,658600 | 8,140275 | 9,933574 |
| 23 | 1,576899 | 3,071524 | 4,740530 | 7,257874 | 8,954302 | 11,02626 |
| 24 | 1,608437 | 3,225100 | 5,072367 | 7,911083 | 9,849733 | 12,23915 |
| 25 | 1,640606 | 3,386355 | 5,427433 | 8,623081 | 10,83470 | 13,58546 |
| 26 | 1,673418 | 3,555673 | 5,807353 | 9,399158 | 11,91817 | 15,07986 |
| 27 | 1,706886 | 3,733456 | 6,213868 | 10,24508 | 13,10999 | 16,73865 |
| 28 | 1,741024 | 3,920129 | 6,648838 | 11,16714 | 14,42099 | 18,57990 |
| 29 | 1,775845 | 4,116136 | 7,114257 | 12,17218 | 15,86309 | 20,62369 |
| 30 | 1,811362 | 4,321942 | 7,612255 | 13,26767 | 17,44940 | 22,89229 |
| 35 | 1,999890 | 5,516015 | 10,67658 | 20,41396 | 28,10243 | 38,57485 |
| 40 | 2,208040 | 7,039989 | 14,97445 | 31,40942 | 45,25925 | 65,00086 |
| 45 | 2,437854 | 8,985008 | 21,00245 | 48,32728 | 72,89048 | 109,5302 |
| 50 | 2,691588 | 11,46740 | 29,45702 | 74,35752 | 117,3908 | 184,5648 |

## Додаток 3

### Множники нарощення (складні відсотки)

| Число період. | Ставка відсотків (%) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 13 | 15 | 18 | 20 | 22 | 25 |
| 1 | 1,130000 | 1,150000 | 1,180000 | 1,200000 | 1,220000 | 1,250000 |
| 2 | 1,276900 | 1,322500 | 1,392400 | 1,440000 | 1,488400 | 1,562500 |
| 3 | 1,442897 | 1,520875 | 1,643032 | 1,728000 | 1,815848 | 1,953125 |
| 4 | 1,630474 | 1,749006 | 1,938778 | 2,073600 | 2,215335 | 2,441406 |
| 5 | 1,842435 | 2,011357 | 2,287758 | 2,488320 | 2,702708 | 3,051758 |
| 6 | 2,081952 | 2,313061 | 2,699554 | 2,985984 | 3,297304 | 3,814697 |
| 7 | 2,352605 | 2,660020 | 3,185474 | 3,583181 | 4,022711 | 4.768372 |
| 8 | 2,658444 | 3,059023 | 3,758859 | 4,299817 | 4,907707 | 5,960464 |
| 9 | 3,004042 | 3,517876 | 4,435454 | 5,159780 | 5,987403 | 7,450581 |
| 10 | 3,394567 | 4,045558 | 5,233836 | 6,191736 | 7,304631 | 9,313226 |
| 11 | 3,835861 | 4.652391 | 6,175926 | 7,430084 | 8,911650 | 11,641532 |
| 12 | 4,334523 | 5,350250 | 7,287593 | 8,916100 | 10,872213 | 14,551915 |
| 13 | 4,898011 | 6,152788 | 8,599359 | 10,699321 | 13,264100 | 18,189894 |
| 14 | 5,534753 | 7,075706 | 10,147244 | 12,839185 | 16,182202 | 22,737368 |
| 15 | 6,254270 | 8,137062 | 11,973748 | 15,407022 | 19,742287 | 28,421709 |
| 16 | 7,067326 | 9,357621 | 14,129023 | 18,488426 | 24,085590 | 35,527137 |
| 17 | 7,986078 | 10,761264 | 16,672247 | 22,186111 | 29,384420 | 44,408921 |
| 18 | 9,024268 | 12,375454 | 19,673251 | 26,623333 | 35,848992 | 55,511151 |
| 19 | 10,197423 | 14,231772 | 23,214436 | 31,948000 | 43,735771 | 69,388939 |
| 20 | 11,523088 | 16,366537 | 27,393035 | 38,337600 | 53,357640 | 86,736174 |
| 21 | 13,021089 | 18,821518 | 32,323781 | 46,005120 | 65,096321 | 108,420217 |
| 22 | 14,713831 | 21,644746 | 38,142061 | 55,206144 | 79,417512 | 135,525272 |
| 23 | 16,626629 | 24,891458 | 45,007632 | 66,247373 | 96,889364 | 169,406589 |
| 24 | 18,788091 | 28,625176 | 53,109006 | 79,496847 | 118,205024 | 211,758237 |
| 25 | 21,230542 | 32,918953 | 62,668627 | 95,396217 | 144,210130 | 264,697796 |
| 26 | 23,990513 | 37,856796 | 73,948980 | 114,475460 | 175,936358 | 330,872245 |
| 27 | 27,109279 | 43,535315 | 87,259797 | 137,370552 | 214,642357 | 413,590306 |
| 28 | 30,633486 | 50,065612 | 102,966560 | 164,844662 | 261,863675 | 516,987883 |
| 29 | 34,615839 | 57,575454 | 121,500541 | 197,813595 | 319,473684 | 646,234854 |
| 30 | 39,115898 | 66,211772 | 143,370638 | 23',376314 | 389,757894 | 807,793567 |
| 35 | 72,068506 | 133,175523 | 327,997290 | 590,668229 | 1053,401842 | 2465,190329 |
| 40 | 132,781552 | 267,863546 | 750,378345 | 1469,771568 | 2847,037759 | 7523,163845 |
| 45 | 244,641402 | 538,769269 | 1716,683879 | 3657,261988 | 7694,712191 | 22958,87404 |
| 50 | 450,735925 | 1083,657442 | 3927,356860 | 9100,438150 | 20796,56145 | 70064,92322 |

# Додаток 4

## Дисконтні множники (складні відсотки)

| Число період. | Ставка відсотків, % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 0,980392 | 0,952381 | 0,934579 | 0,917431 | 0,909091 | 0,900901 |
| 2 | 0,961169 | 0,907029 | 0,873439 | 0,841680 | 0,826446 | 0,811622 |
| 3 | 0,942322 | 0,863838 | 0,816298 | 0,772183 | 0,751315 | 0,731191 |
| 4 | 0,923845 | 0,822702 | 0,762895 | 0,708425 | 0,683013 | 0,658731 |
| 5 | 0,905731 | 0,783526 | 0,712986 | 0,649931 | 0,620921 | 0,593451 |
| 6 | 0,887971 | 0,746215 | 0,666342 | 0,596267 | 0,564474 | 0,534641 |
| 7 | 0,870560 | 0,710681 | 0,622750 | 0,547034 | 0,513158 | 0,481658 |
| 8 | 0,853490 | 0,676839 | 0,582009 | 0,501866 | 0,466507 | 0,433926 |
| 9 | 0,836755 | 0,644609 | 0,543934 | 0,460428 | 0,424098 | 0,390925 |
| 10 | 0,820348 | 0,613913 | 0,508349 | 0,422411 | 0,385543 | 0,352184 |
| 11 | 0,804263 | 0,584679 | 0,475093 | 0,387533 | 0,350494 | 0,317283 |
| 12 | 0,788493 | 0,556837 | 0,444012 | 0,355535 | 0,318631 | 0,285841 |
| 13 | 0,773033 | 0,530321 | 0,414964 | 0,326179 | 0,289664 | 0,257514 |
| 14 | 0,757875 | 0,505068 | 0,387817 | 0,299246 | 0,263331 | 0,231995 |
| 15 | 0,743015 | 0,481017 | 0,362446 | 0,274538 | 0,239392 | 0,209004 |
| 16 | 0,728446 | 0,458112 | 0,338735 | 0,251870 | 0,217629 | 0,188292 |
| 17 | 0,714163 | 0,436297 | 0,316574 | 0,231073 | 0,197845 | 0,169633 |
| 18 | 0,700159 | 0,415521 | 0,295864 | 0,211994 | 0,179859 | 0,152822 |
| 19 | 0,686431 | 0,395734 | 0,276508 | 0,194490 | 0,163508 | 0,137678 |
| 20 | 0,672971 | 0,376889 | 0,258419 | 0,178431 | 0,148644 | 0,124034 |
| 21 | 0,659776 | 0,358942 | 0,241513 | 0,163698 | 0,135131 | 0,111742 |
| 22 | 0,646839 | 0,341850 | 0,225713 | 0,150182 | 0,122846 | 0,100669 |
| 23 | 0,634156 | 0,325571 | 0,210947 | 0,137781 | 0,111678 | 0,090693 |
| 24 | 0,621721 | 0,310068 | 0,197147 | 0,126405 | 0,101526 | 0,081705 |
| 25 | 0,609531 | 0,295303 | 0,184249 | 0,115968 | 0,092296 | 0,073608 |
| 26 | 0,597579 | 0,281241 | 0,172195 | 0,106393 | 0,083905 | 0,066314 |
| 27 | 0,585862 | 0,267848 | 0,160930 | 0,097608 | 0,076278 | 0,059742 |
| 28 | 0,574375 | 0,255094 | 0,150402 | 0,089548 | 0,069343 | 0,053822 |
| 29 | 0,563112 | 0,242946 | 0,140563 | 0,082155 | 0,063039 | 0,048488 |
| 30 | 0,552071 | 0,231377 | 0,131367 | 0,075371 | 0,057309 | 0,043683 |
| 35 | 0,500028 | 0,181290 | 0,093663 | 0,048986 | 0,035584 | 0,025924 |
| 40 | 0,452890 | 0,142046 | 0,066780 | 0,031838 | 0,022095 | 0,015384 |
| 45 | 0,410197 | 0,111297 | 0,047613 | 0,020692 | 0,013719 | 0,009130 |
| 50 | 0,371528 | 0,087204 | 0,033948 | 0,013449 | 0,008519 | 0,005418 |

# Додаток 5

## Дисконтні множники (складні відсотки)

| Число період. | Ставка відсотків, % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 15 | 18 | 20 | 22 | 25 |
| 1 | 1,130000 | 1,150000 | 1,180000 | 1,200000 | 1,220000 | 1,250000 |
| 2 | 1,276900 | 1,322500 | 1,392400 | 1,440000 | 1,488400 | 1,562500 |
| 3 | 1,442897 | 1,520875 | 1,643032 | 1,728000 | 1,815848 | 1,953125 |
| 4 | 1,630474 | 1,749006 | 1,938778 | 2,073600 | 2,215335 | 2,441406 |
| 5 | 1,842435 | 2,011357 | 2,287758 | 2,488320 | 2,702708 | 3,051758 |
| 6 | 2,081952 | 2,313061 | 2,699554 | 2,985984 | 3,297304 | 3,814697 |
| 7 | 2,352605 | 2,660020 | 3,185474 | 3,583181 | 4,022711 | 4.768372 |
| 8 | 2,658444 | 3,059023 | 3,758859 | 4,299817 | 4,907707 | 5,960464 |
| 9 | 3,004042 | 3,517876 | 4,435454 | 5,159780 | 5,987403 | 7,450581 |
| 10 | 3,394567 | 4,045558 | 5,233836 | 6,191736 | 7,304631 | 9,313226 |
| 11 | 3,835861 | 4.652391 | 6,175926 | 7,430084 | 8,911650 | 11,641532 |
| 12 | 4,334523 | 5,350250 | 7,287593 | 8,916100 | 10,872213 | 14,551915 |
| 13 | 4,898011 | 6,152788 | 8,599359 | 10,699321 | 13,264100 | 18,189894 |
| 14 | 5,534753 | 7,075706 | 10,147244 | 12,839185 | 16,182202 | 22,737368 |
| 15 | 6,254270 | 8,137062 | 11,973748 | 15,407022 | 19,742287 | 28,421709 |
| 16 | 7,067326 | 9,357621 | 14,129023 | 18,488426 | 24,085590 | 35,527137 |
| 17 | 7,986078 | 10,761264 | 16,672247 | 22,186111 | 29,384420 | 44,408921 |
| 18 | 9,024268 | 12,375454 | 19,673251 | 26,623333 | 35,848992 | 55,511151 |
| 19 | 10,197423 | 14,231772 | 23,214436 | 31,948000 | 43,735771 | 69,388939 |
| 20 | 11,523088 | 16,366537 | 27,393035 | 38,337600 | 53,357640 | 86,736174 |
| 21 | 13,021089 | 18,821518 | 32,323781 | 46,005120 | 65,096321 | 108,420217 |
| 22 | 14,713831 | 21,644746 | 38,142061 | 55,206144 | 79,417512 | 135,525272 |
| 23 | 16,626629 | 24,891458 | 45,007632 | 66,247373 | 96,889364 | 169,406589 |
| 24 | 18,788091 | 28,625176 | 53,109006 | 79,496847 | 118,205024 | 211,758237 |
| 25 | 21,230542 | 32,918953 | 62,668627 | 95,396217 | 144,210130 | 264,697796 |
| 26 | 23,990513 | 37,856796 | 73,948980 | 114,475460 | 175,936358 | 330,872245 |
| 27 | 27,109279 | 43,535315 | 87,259797 | 137,370552 | 214,642357 | 413,590306 |
| 28 | 30,633486 | 50,065612 | 102,966560 | 164,844662 | 261,863675 | 516,987883 |
| 29 | 34,615839 | 57,575454 | 121,500541 | 197,813595 | 319,473684 | 646,234854 |
| 30 | 39,115898 | 66,211772 | 143,370638 | 23',376314 | 389,757894 | 807,793567 |
| 35 | 72,068506 | 133,175523 | 327,997290 | 590,668229 | 1053,401842 | 2465,190329 |
| 40 | 132,781552 | 267,863546 | 750,378345 | 1469,771568 | 2847,037759 | 7523,163845 |
| 45 | 244,641402 | 538,769269 | 1716,683879 | 3657,261988 | 7694,712191 | 22958,87404 |
| 50 | 450,735925 | 1083,657442 | 3927,356860 | 9100,438150 | 20796,56145 | 70064,92322 |

# Додаток 6

## Множники нарощення (неперервні відсотки)

| Число період. | Сила росту, (%) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 1,020201 | 1,051271 | 1,072508 | 1,094174 | 1,105171 | 1,116278 |
| 2 | 1,040811 | 1,105171 | 1,150274 | 1,197217 | 1,221403 | 1,246077 |
| 3 | 1,061837 | 1,161834 | 1,233678 | 1,309964 | 1.349859 | 1,390968 |
| 4 | 1,083287 | 1,221403 | 1,323130 | 1,433329 | 1,491825 | 1,552707 |
| 5 | 1,105171 | 1,284025 | 1,419068 | 1,568312 | 1,648721 | 1,733253 |
| 6 | 1,127497 | 1,349859 | 1,521962 | 1,716007 | 1,822119 | 1,934792 |
| 7 | 1,150274 | 1,419068 | 1,632316 | 1,877611 | 2,013753 | 2,159766 |
| 8 | 1,173511 | 1,491825 | 1,750673 | 2,054433 | 2,225541 | 2,410900 |
| 9 | 1,197217 | 1,568312 | 1,877611 | 2,247908 | 2,459603 | 2,691234 |
| 10 | 1,221403 | 1,648721 | 2,013753 | 2,459603 | 2,718282 | 3,004166 |
| 11 | 1,246077 | 1,733253 | 2,159766 | 2,691234 | 3,004166 | 3,353485 |
| 12 | 1,271249 | 1,822119 | 2,316367 | 2.944680 | 3,320117 | 3,743421 |
| 13 | 1,296930 | 1,915541 | 2,484323 | 3,221993 | 3,669297 | 4,178699 |
| 14 | 1,323130 | 2,013753 | 2,664456 | 3,525421 | 4,055200 | 4,664590 |
| 15 | 1,349859 | 2,117000 | 2,857651 | 3,857426 | 4,481689 | 5,206980 |
| 16 | 1,377128 | 2,225541 | 3,064854 | 4,220696 | 4,953032 | 5,812437 |
| 17 | 1,404948 | 2,339647 | 3,287081 | 4,618177 | 5,473947 | 6,488296 |
| 18 | 1,433329 | 2,459603 | 3,525421 | 5,053090 | 6,049647 | 7,242743 |
| 19 | 1,462285 | 2,585710 | 3,781043 | 5,528% 1 | 6,685894 | 8,084915 |
| 20 | 1,491825 | 2,718282 | 4,055200 | 6,049647 | 7,389056 | 9,025013 |
| 21 | 1,521962 | 2,857651 | 4,349235 | 6,619369 | 8,166170 | 10,074425 |
| 22 | 1,552707 | 3,004166 | 4,664590 | 7,242743 | 9,025013 | 11,245859 |
| 23 | 1,584074 | 3,158193 | 5,002811 | 7,924823 | 9,974182 | 12,553506 |
| 24 | 1,616074 | 3,320117 | 5,365556 | 8,671138 | 11,023176 | 14,013204 |
| 25 | 1,648721 | 3,490343 | 5,754603 | 9,487736 | 12,182494 | 15,642632 |
| 26 | 1,682028 | 3,669297 | 6,171858 | 10,381237 | 13,463738 | 17,461527 |
| 27 | 1,716007 | 3,857426 | 6,619369 | 11,358882 | 14,879732 | 19,491920 |
| 28 | 1,750673 | 4,055200 | 7,099327 | 12,428597 | 16,444647 | 21,758402 |
| 29 | 1,786038 | 4,263115 | 7,614086 | 13,599051 | 18,174145 | 24,288427 |
| 30 | 1,822119 | 4,481689 | 8,166170 | 14,879732 | 20,085537 | 27,112639 |
| 35 | 2,013753 | 5,754603 | 11,588347 | 23,336065 | 33,115452 | 46,993063 |
| 40 | 2,225541 | 7,389056 | 16,444647 | 36,598234 | 54,598150 | 81,450869 |
| 45 | 2,459603 | 9,487736 | 23,336065 | 57,397457 | 90,017131 | 141,17496 |
| 50 | 2,718282 | 12,182494 | 33,115452 | 90,017131 | 148,41315 | 244,69193 |

## Додаток 7

### Множники нарощення (неперервні відсотки)

| Число період. | Сила росту, (%) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 13 | 15 | 18 | 20 | 22 | 25 |
| 1 | 1,138828 | 1,161834 | 1,197217 | 1,221403 | 1,246077 | 1,284025 |
| 2 | 1,296930 | 1,349859 | 1,433329 | 1,491825 | 1,552707 | 1,648721 |
| 3 | 1.476981 | 1,568312 | 1,716007 | 1,822119 | 1,934792 | 2,117000 |
| 4 | 1,682028 | 1,822119 | 2,054433 | 2,225541 | 2,410900 | 2,718282 |
| 5 | 1,915541 | 2,117000 | 2,459603 | 2,718282 | 3,004166 | 3,490343 |
| 6 | 2,181472 | 2,459603 | 2.944680 | 3,320117 | 3,743421 | 4,481689 |
| 7 | 2,484323 | 2,857651 | 3,525421 | 4,055200 | 4,664590 | 5,754603 |
| 8 | 2,829217 | 3,320117 | 4,220696 | 4,953032 | 5,812437 | 7,389056 |
| 9 | 3,221993 | 3,857426 | 5,053090 | 6,049647 | 7,242743 | 9,487736 |
| 10 | 3,669297 | 4,481689 | 6,049647 | 7,389056 | 9,025013 | 12,182494 |
| 11 | 4.178699 | 5,206980 | 7,242743 | 9,025013 | 11,245859 | 15,642632 |
| 12 | 4,758821 | 6,049647 | 8,671138 | 11,023176 | 14,013204 | 20,085537 |
| 13 | 5,419481 | 7,028688 | 10,381237 | 13,463738 | 17,461527 | 25,790340 |
| 14 | 6,171858 | 8,166170 | 12,428597 | 16,444647 | 21,758402 | 33,115452 |
| 15 | 7,028688 | 9,487736 | 14,879732 | 20,085537 | 27,112639 | 42,521082 |
| 16 | 8,004469 | 11,023176 | 17,814273 | 24,532530 | 33,784428 | 54,598150 |
| 17 | 9,115716 | 12,807104 | 21,327557 | 29,964100 | 42,097990 | 70,105412 |
| 18 | 10,381237 | 14,879732 | 25,533722 | 36,598234 | 52,457326 | 90,017131 |
| 19 | 11,822447 | 17,287782 | 30,569415 | 44,701184 | 65,365853 | 115,58428 |
| 20 | 13,463738 | 20,085537 | 36,598234 | 54,598150 | 81,450869 | 148,41315 |
| 21 | 15,332887 | 23,336065 | 43,816042 | 66,686331 | 101,49403 | 190,56626 |
| 22 | 17,461527 | 27,112639 | 52,457326 | 81,450869 | 126,46935 | 244,69193 |
| 23 | 19,885682 | 31,500392 | 62,802821 | 99,484316 | 157,59051 | 314,19066 |
| 24 | 22,646380 | 36,598234 | 75,188628 | 121,51041 | 196,36987 | 403,42879 |
| 25 | 25,790340 | 42,521082 | 90,017131 | 148,41315 | 244,69193 | 518,01282 |
| 26 | 29,370771 | 49,402449 | 107,77007 | 181,27224 | 304,90492 | 665,14163 |
| 27 | 33,448268 | 57,397457 | 129,02420 | 221,40641 | 379,93493 | 854,05876 |
| 28 | 38,091837 | 66,686331 | 154,47001 | 270,42640 | 473,42807 | 1096,6331 |
| 29 | 43,380065 | 77,478463 | 184,93418 | 330,29956 | 589,92770 | 1408,1048 |
| 30 | 49,402449 | 90,017131 | 221,40641 | 403,42879 | 735,09518 | 1808,0424 |
| 35 | 94,632408 | 190,56626 | 544,57191 | 1096,6331 | 2208,3479 | 6310,6881 |
| 40 | 181,27224 | 403,42879 | 1339,4307 | 2980,9579 | 6634,2440 | 22026,465 |
| 45 | 347,23438 | 854,05876 | 3294,4680 | 8103,0839 | 19930,370 | 76879,919 |
| 50 | 665,14163 | 1808,0424 | 8103,0839 | 22026,465 | 59874,141 | 268337,28 |

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Баранкевич М.М. Фінансова математика: Основи теорії, задачі, розв'язки. – Львів: Вид. цент ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 268 с.

2. Брусов П.Н. Финансовая математика: Учебное пособие/ П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова. – М.: КноРус, 2013. – 224 с.

3. Василевич Л,Ф., Маловик К.Н., Смирнов С.Б. Количественные методы принятия решений в условиях риска: учебное пособие. – Севастополь: СНУЯЭиП, 2007. – 229 с.

4. Василевич Л.Ф., Василевич М.Л. Нечітка фізична економіка. Закон взаємодії капіталів. К. ДУІКТ: Економіка. Менеджмент. Бізнес. Том 2., 2012.- С. 82 – 88.

5. Василевич Л.Ф. , Василевич М.Л., Астафьева М. М., Бодненко Д. М., Семеняка С.О. Математизація суспільно – гуманітарних спеціальностей. Колективна монографія «Інноваційні технології в розвитку науковій думки сьогодення: теоретико – практичний аналіз та науково – аналітичні коментарі. М. Кіровоград., 30.11.2015., с 4 – 37.

6. Vasylevych L., Iurtyn I. Quantitative Estimation of Competency as a Fuzzy Set. Proceedings of the 9th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications: Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (June 19-22, 2013) Kherson, Ukraine, 2013. – C. 187-193.

7. Васильченко І.П., Васильченко З.М. Фінансова математика: навчальний посібник. – К.: Кондор, 2007. – 184 с.

8. Вахрушева Н.В. Финансовая математика: учебное пособие / Н.В. Вахрушева. – М.-Берлин: Директ-Медиа, 2014. – 180 с.

9. Гадецька С.В., Савченко Г.О. Фінансова математика: навчальний посібник / С.В. Гадецька, Г.О. Савченко. – Львів: «Новий світ – 2000», 2014. – 214 с.

10. Григорків В.С., Ярошенко О.І., Нікіфоров П.О. Фінансова математика: підручник. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – 488 с.

11. Долінський Л.Б. Фінансові обчислення та аналіз цінних паперів: навчальний посібник. – К.: Майстер-клас, 2005. -192 с.

12. Ізмайлова К.В. Фінансовий аналіз: навчальний посібник. – 2-ге вид., стереотип.- К.: МАУП, 2001. – 152 с.

13. Козловський С.В. Фінансова математика: навчальний посібник. – К.: Знання України, 2006. – 308 с.

14. Корж О.П. Основи фінансової математики: навчальний посібник. – Харків: Студ. центр, 2006. – 176 с.

15. Кочович Е. Финансовая математика. Теорія и практика финансово-банковских расчетов. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 144 с.

16. Леонова Н.Г. Финансовая математика: учебное пособие / Н.Г. Леонова. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. – 104 с.

17. Лук’янова В.В., Головач Т.В. Економічний ризик: навчальний посібник. - Академ-видав, 2007. – 464 с.

18. Салига С.Я. і ін.. Фінансовий менеджмент: навчальний посібник. – К.:Центр навчальної літератури, 2006. – 274 с.

19. Стрельченко О.С., Стрельченко І.Г. Фінансова математика: навчальний посібник для шкіл (класів) економічного профілю. – К.: Педагогічна преса, 1999. – 104 с.

20. Фінансова математика: Методичні вказівки і контрольні роботи для студентів V курсу всіх форм навчання економічних спеціальностей / П.В. Задерей, О.О. Мазурок, П.А. Попов – К.: КНУТД, 2007. – 44 с.

21. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник / Е.М. Четыркин. – М.: ИД «Дело», 2011. – 392с.

22. Четыркин Е.М. Финансовая математика. – М.: Дело, 2006. – 400с.

23. Чусавитина Г.Н. Основы финансовой математики: учебное пособие / Г.Н. Чусавитина. – 2-е изд. - М.: ФЛИНТА, 2014. – 176 с.

24. Чуйко А.С. Финансовая математика: Учебное пособие / А.С. Чуйко, В.Г. Шершнев. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 160 с.

25. Шарп У., Александер Г., Бєйли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.:ИНФРА-М, 2001. – 1028 с.

26. Шеремет А.Д. Фінанси підприємств. – М.: ІНФРА-М. 1999 – 344с.