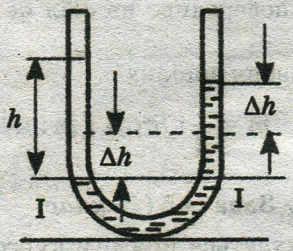
ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ 7–11 КЛАСІВ ДО ФІЗИЧНИХ ОЛІМПІАД*

Ірина Іванівна ЗАДНІПРЯНЕЦЬ,
методист НМЦ природничо-математичної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка

Задача 1 (*8 клас*)

В U-подібній трубці сталого перерізу знаходиться ртуть. Визначити рівень піднімання ртуті Δh у правому коліні трубки, якщо у ліве коліно налити стовпчик води висотою $h = 13{,}6$ см. Густина ртуті $13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, густина води $1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.



Мал. 1

Розв'язання

Згідно із законом сполучених посудин, гідростатичний тиск у рідині на рівні I — I буде один і той самий у правому та лівому колінах трубки (*мал. 1*):

$$\rho_в \cdot gh = \rho_{рт} \cdot g2\Delta h.$$

Звідси

$$\Delta h = h\frac{\rho_в}{2\rho_{рт}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Задача 2 (*8 клас*)

Крижина площею 1 м^2 і товщиною 0,4 м плаває у воді. Яку мінімальну роботу треба виконати, щоби повністю занурити крижину у воду? Густина льоду 900 кг/м^3, $g = 10$ Н/кг.

Розв'язання

Нехай у початковому стані h — глибина занурення крижини, що плаває. Запишемо умову рівноваги та наслідки з неї:

$$\rho_в g V_{зан} = \rho_л g V = \rightarrow \rho_в h = \rho_л H \rightarrow h = \frac{\rho_л H}{\rho_в}.$$

$$\Delta h = H - h = H\left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}\right),$$

де $\rho_в$ і $\rho_л$ — густини води і льоду відповідно, $V_{зан}$ — об'єм зануреної частини крижини, V — повний об'єм, H — товщина крижини, h — товщина її зануреної частини.

Під час занурення крижини сила натискання лінійно зростає від 0 до F_{max}, виконуючи роботу

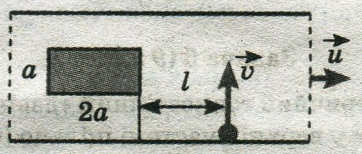
$$A = \frac{F_{max}}{2} \cdot \Delta h, \text{ де } F_{max} = \rho_в g S \Delta h.$$

Звідси:

$$A = \frac{(\rho_в - \rho_л)^2 g S H^2}{2\rho_в} = 8 \text{ Дж}.$$

Задача 3 (*8 клас*)

Стрічка горизонтального транспортера шириною l рухається зі швидкістю u. Посередині стрічки вирізаний прямокутний отвір розмірами $a \times 2a$. В деякий момент хлопчик запускає на стрічку перпендикулярно її бічному краю кульку, яка через відсутність тертя рухається перпендикулярно до стрічки (*мал. 2*). В цей момент передній край отвору знаходиться на відстані l від перпендикуляра, вздовж якого запущена кулька. Які значення може мати швидкість кульки, щоби вона «пройшла» стрічку транспортера?



Мал. 2

Розв'язання

Кулька буде знаходитись на відстані від $\frac{l-a}{2}$ до $\frac{l+a}{2}$ від края транспортера (тобто там, де може бути отвір) протягом часу

$$\frac{l-a}{2v} \le t \le \frac{l+a}{2v}.$$

Отвір буде перетинати шлях кульки протягом часу

* *Продовження*. Початок див.: 2014. — № 9.

$$\frac{l}{u} \le t \le \frac{l+2a}{u}.$$

Щоб кулька не потрапила в отвір, треба, щоб попередні нерівності не мали спільних розв'язків. Для цього повинна виконуватись умова

$$\frac{l}{u} \ge \frac{l+a}{2v} \text{ або } \frac{l+2a}{u} \le \frac{l-a}{2v}.$$

Звідси отримаємо швидкість кульки:

$$v \le \frac{(l-a)u}{2(l+2a)} \text{ або } v \ge \frac{(l+a)u}{2l}$$

Задача 4 (*9 клас*)

Тонка пряма паличка розташована перпендикулярно головній оптичній осі тонкої лінзи таким чином, що один з її кінців знаходиться на цій осі. Лінза дає дійсне зображення палички із збільшенням k. Відстань між паличкою та зображенням, відрахована вздовж осі лінзи, дорівнює d. Знайдіть фокусну відстань лінзи.

Розв'язання

За умовою, зображення палички дійсне. Отже, лінза — збиральна, а відстань a від палички до головної площини лінзи більша за її фокусну відстань F. Якщо відстань від головної площини лінзи до зображення палички позначити через b, то, за умовою задачі, $a + b = d$. Оскільки лінійне збільшення лінзи $k=b/a$, знайдемо:

$$a = \frac{d}{1+k}, b = \frac{kd}{1+k}.$$

Згідно з формулою тонкої лінзи,

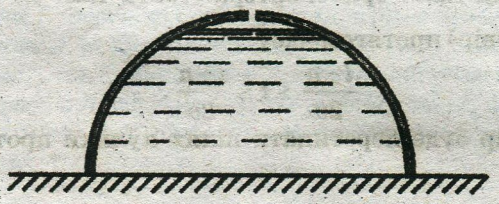
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1+k}{d} + \frac{1+k}{kd} = \frac{(1+k)^2}{kd}.$$

Отже, фокусна відстань лінзи дорівнює

$$F = \frac{kd}{(1+k)^2}.$$

Задача 5 (*9 клас*)

Напівсферичний тонкостінний «дзвін» з невеликим отвором у верхній частині щільно (без зазорів) лежить на горизонтальному столі (*мал. 3*). Через отвір у дзвін повільно наливають воду. Коли вода досягає отвору, вона піднімає дзвін і починає витікати з-під нього знизу. Знайдіть масу дзвону m, якщо його радіус $R = 10$ см. Густина води 10^3 кг/м^3.



Мал. 3

Розв'язання

Сила гідростатичного тиску води на стіл дорівнює

$$F = \pi R^2 \rho g h,$$

де h — висота рівня води у дзвоні. У момент початку витікання води з-під дзвона $h = R$, отже,

$$F = \pi R^3 \rho g.$$

З іншого боку, сумарна вага дзвона і води дорівнює

$$F' = mg + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g,$$

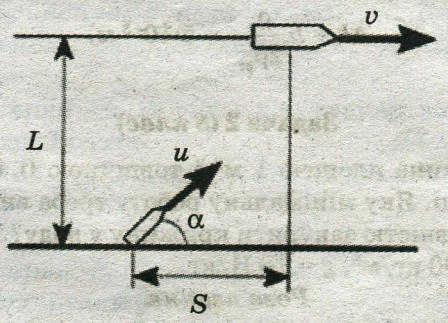
Оскільки вода, що підтікає під дзвін, піднімає його, дзвін безпосередньо на стіл не тисне. Отже, $F' = F$.

Тоді маса дзвону дорівнює

$$m = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho \approx 1 \text{ кг}.$$

Задача 6 (*10 клас*)

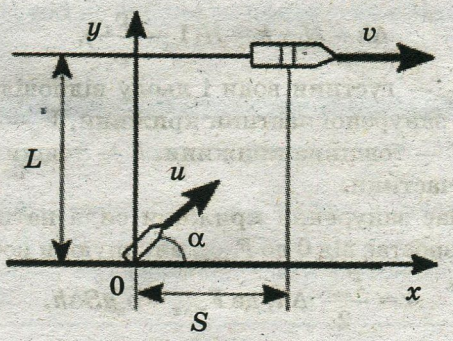
Корабель рухається прямим курсом вздовж берега на відстані $L = 3$ км від нього зі швидкістю υ. Коли відстань між кораблем та пристанню (вздовж берега) стала рівною $S = 4$ км, навздогін йому посилають катер, що рухається зі швидкістю $u = 2v$, який, рухаючись прямолінійно, наздоганяє корабель (*мал. 4*). Під яким кутом α до берега рухався катер?



Мал. 4

Розв'язання

Оберемо систему відліку, пов'язану із Землею (*мал. 5*).



Мал. 5

Умовою зустрічі катера і корабля є рівність їх координат в певний момент часу:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Запишемо закони руху катера:

$$\begin{cases} x_1 = u\cos\alpha \cdot t, \\ y_1 = u\sin\alpha \cdot t, \end{cases}$$

і корабля:

$$\begin{cases} x_2 = S + vt, \\ y = L. \end{cases}$$

Враховуючи, що за умовою задачі, $u = 2v$, отримаємо:

$$\begin{cases} 2v\cos\alpha \cdot t = S + vt, \\ 2v\sin\alpha \cdot t = L. \end{cases}$$

Виключаючи з системи рівнянь час t, маємо:

$$t = \frac{L}{2v\sin\alpha},\ 2v\cos\alpha \cdot \frac{L}{2v\sin\alpha} = S + v \cdot \frac{L}{2v\sin\alpha},$$

або

$$(2L\cos\alpha - L)^2 = (2S\sin\alpha)^2.$$

Виражаючи $\sin^2\alpha$ з тригонометричної дотожності $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, матимемо квадратне рівняння

$$4(L^2 + S^2)\cos^2\alpha - 4L^2\cos\alpha + (L^2 - 4S^2) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\cos\alpha = \frac{2L^2 \mp \sqrt{4L^4 - \left(4L^4 + 4L^2S^2 - 16L^2S^2 - 16S^4\right)}}{4\left(L^2 + S^2\right)} = \frac{2L^2 \mp \sqrt{\left(16S^4 + 12L^2S^2\right)}}{4\left(L^2 + S^2\right)}.$$

Підставимо числові значення:

$$(\cos\alpha)_2 = \frac{2 \cdot 9 + 4 \cdot \sqrt{256 + 12 \cdot 9}}{100} \approx 0{,}94.$$

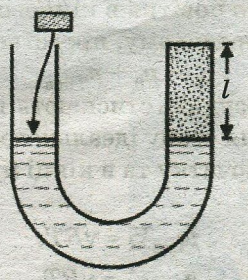
$$(\cos\alpha)_1 = \frac{2 \cdot 9 - 4 \cdot \sqrt{256 + 12 \cdot 9}}{100} \approx -0{,}58$$ не підходить за фізичним змістом.

Отже, отримаємо відповідь:

$\alpha = \arccos(0{,}94) = 20°$.

Задача 7 (*11 клас*)

В U-подібній трубці площею перерізу S знаходиться рідина густиною ρ. Праве коліно трубки зверху герметично закривають, а у ліве коліно опускають брусок, в результаті чого рівень рідини в правому коліні піднімається відносно початкового рівня на висоту h (мал. 6). Визначити масу бруска m, якщо відомо, що він плаває в рідині. Відстань від поверхні рідини до верхнього краю правого коліна трубки в початковому стані дорівнює l. Атмосферний тиск p_0, прискорення вільного падіння g. Температура повітря стала. Тиском пари рідини знехтувати.



Мал. 6

Розв'язання

Брусок масою m, що плаває у рідині густиною ρ, витискає об'єм $V = \frac{m}{\rho}$. Внаслідок цього рівні рідини в трубці підвищуються: у лівому коліні на h_1, у правому — на h, причому

$$h_1 + h = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho S}.$$

Якщо p — тиск повітря над рідиною у правому коліні, то умова рівноваги рідини має вигляд:

$$p_0 + \rho g h_1 = p + \rho g h.$$

За законом Бойля — Маріотта, для повітря, що міститься у правому коліні,

$$p_0 S l = pS(l - h).$$

Розв'язуючи записані рівності (виключаючи p і h_1), отримаємо відповідь:

$$m = hS\left[\frac{p_0}{g(l-h)} + 2\rho\right].$$

Задача 8 (*11 клас*)

У посудині під поршнем знаходиться вологе повітря при температурі $t = 100$ °C і тиску $p_1 = 1{,}4 \cdot 10^5$ Па. Рухаючи поршень, повітря термічно стиснули в 1,5 рази. При цьому частина пари конденсувалась, а тиск в посудині став рівним $p_2 = 2{,}2 \cdot 10^5$ Па. Визначити відносну вологість повітря перед стисканням.

Розв'язання

Вологе повітря — це суміш пари води та «сухого» повітря. Отже, тиск вологого повітря в початковому стані

$$p_1 = p_{1\,\text{пари}} + p_{1\,\text{пов}}.$$

Тиск пари запишемо через відносну вологість повітря. За означенням,

$$\varphi = \frac{p_{1\text{пари}}}{p_{\text{нас}}},\ \text{звідки}\ p_{1\,\text{пари}} = \varphi\, p_{\text{нас}}.$$

Тиск насиченої пари води при температурі $t = 100$ °C дорівнює $p_0 = 10^5$ Па. Отже,

$$p_{1\,\text{пари}} = \varphi\, p_0 \text{ і } p_1 = \varphi\, p_0 + p_{1\,\text{пов}}.$$

В кінцевому стані, за умовою задачі, частина пари конденсується, тоді тиск пари води у кінцевому стані

$$p_{2\,\text{пари}} = p_{\text{нас}} = p_0.$$

Тиск вологого повітря в кінцевому стані можна аналогічно попередньому, представити у вигляді

$$p_2 = p_0 + p_{2\,\text{пов}}.$$

Повітря в посудині стискають ізотермічно. Запишемо рівняння стану ідеального газу для «сухого» повітря на початку та в кінці процесу стискання:

$$\begin{cases} p_{1\text{пов}} V_1 = \nu RT, \\ p_{2\text{пов}} V_2 = \nu RT. \end{cases}$$

Отже,

$$\frac{p_{2\text{пов}}}{p_{1\text{пов}}} = \frac{V_1}{V_2} = n.$$

Знайшовши тиски повітря з попередніх рівнянь:

$$p_{1\,\text{пов}} = p_1 - \varphi p_0,$$
$$p_{2\,\text{пов}} = p_2 - p_0,$$

і підставляючи у відношення, отримаємо:

$$\frac{p_2 - p_0}{p_1 - \varphi p_0} = n.$$

Звідси знайдемо шукану величину відносної вологості повітря перед стисканням:

$$\varphi = \frac{p_0 + np_1 - p_2}{n p_0} = \frac{10^5 + 1{,}5 \cdot 1{,}4 \cdot 10^5 - 2{,}2 \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^5} =$$
$$= 0{,}6 = 60\ \%.$$

Задача 9 (*11 клас*)

Космічний корабель, що знаходиться у стані спокою, має сеанс зв'язку із Землею, спрямовуючи в її бік лазерний промінь. На яку відстань S від початкового положення зміститься корабель на кінець сеансу зв'язку, якщо потужність лазерного променя $P = 60$ Вт, масса корабля $M = 10$ т, тривалість сеансу $\tau = 1$ год? Швидкість світла $3 \cdot 10^8$ м/с. Впливом усіх небесних тіл знехтувати.

Розв'язання

Імпульс одного фотона дорівнює

$$p_1 = \frac{E_1}{c},$$

де $E_1 = h\nu$ — енергія фотона. Імпульс фотонів, що вилітають в одному напрямі за час Δt, можна записати як

$$p = \frac{P\Delta t}{c}.$$

За другим законом Ньютона, $p = F\Delta t$, де F — сила, що діє з боку фотонів на корабель: $F = P/c$.

Під дією цієї сили корабель набуває прискорення

$$a = \frac{P}{Mc}.$$

Зміщення корабля за час сеансу зв'язку

$$S = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{P\tau^2}{2Mc} \approx 0{,}13\ \text{мм}.$$

Задача 10 (*11 клас*)

Дощова крапля радіуса R падає з висоти h. Під час падіння крапля пролітає крізь заряджену хмару і набуває потенціалу φ_0. Під дією сил кулонівського відштовхування крапля розділяється на дві однакові частини, відносні швидкості яких напрямлені горизонтально. Якої максимальної швидкості може набути кожна з крапельок у момент падіння на поверхню Землі? Опором повітря та електростатичною взаємодією з поверхнею Землі та із зарядженою хмарою, а також поверхневим натягом води можна знехтувати. Густина води ρ, електрична стала — ε_0, прискорення вільного падіння g.

Розв'язання

Рух крапельок у вертикальному та горизонтальному напрямах відбувається незалежно. Тому величина вертикальної складової їх швидкості у момент падіння на землю дорівнює $v_y = \sqrt{2gh}$ і не залежить від моменту поділу краплі на частини. Рух в горизонтальному напрямі відбувається під дією сил кулонівського відштовхування. Заряд краплі та її початкова електростатична енергія дорівнюють:

$$q_1 = C_1\varphi_0;\ W_1 = C_1\frac{\varphi_0^2}{2},$$

де $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R$ — ємність краплі. Після поділу краплі на частинки радіус кожної з них, їх ємність та заряд дорівнюватимуть відповідно:

$$R_2 = \frac{R}{\sqrt[3]{2}};\ C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 = 4\pi\varepsilon_0\frac{R}{\sqrt[3]{2}};\ q_2 = \frac{q_1}{2} = 2\varepsilon_0 R\varphi_0.$$

Електростатична енергія двох крапель, що знаходяться на великій відстані одна від одної, дорівнює

$$W_2 = 2 \cdot \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Різниця між початковою та кінцевою електростатичними енергіями

$$W_1 - W_2 = \pi\varepsilon_0 R\ \varphi_0^2(2 - \sqrt[3]{2})$$

перетвориться у кінетичну енергію відносного руху крапельок

$$E_k = 2\,\frac{m_1}{2} \cdot \frac{v_x^2}{2} = \frac{2}{3}\,\pi R^3 \rho\, v_x^2,$$

якщо розділення краплі відбувається достатньо далеко від поверхні Землі. Тому максимально можлива швидкість крапель

$$v_{max} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

$$v_{max} = \left[2gh + \frac{3\left(2 - \sqrt[3]{2}\right)}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\rho} \cdot \frac{\varphi_0^2}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$