Олександр Рудик

Функціонал Шпраґе — Ґранді

(Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах», 2010, № 5–6, с. 87–91)

Мета публікації донести до відвідувачів сайту результати Шпраґе і Ґранді, опубліковані у таких роботах:

1. Sprague R. P. (1935–36). "Uber mathematische Kampfspiele". Tohoku Mathematical Journal, 41, p. 438–444.
2. Grundy P. M. (1939). "Mathematics and games". Eureka 2: 6–8. Reprinted, 1964, 27, p. 9–11.

Відповідні твердження дозволяють аналізувати позиції антагоністичних ігор з повною інформацією без випадкового втручання та створювати ефективні алгоритми (програми) для розв'язання завдань на олімпіадах з інформатики різних рівнів. Публікацію адресовано учням класів з поглибленим вивченням математики, учасникам олімпіад з інформатики, студентам математичних спеціальностей, учителям і викладачам вищих навчальних закладів.

Теорема 1. *Роглянемо скінчену антагоністичну гру з повною інформацією і без випадкового втручання такого вигляду:*

- *є орієнтований граф без циклів і вершина у ньому;*
- *два гравці по черзі здійснюють перехід до наступної вершини-позиції гри дугою (орієнтованим ребром) графа, починаючи з вказаної вершини;*
- *програє той, хто не може зробити наступний перехід.*

У такій грі:

- *усі вершини-позиції можна поділити на виграшні й програшні;*
- *гравець, чия черга ходити з виграшної позиції, має виграшну стратегію. Інакше кажучи, для цього гравця існує відображення, що вершині графа (позиції) ставить у відповідність дугу з початком у цій вершині (хід з цієї позиції), при якому незалежно від дій суперника ходи гравця у повній відповідності з цим відображенням гарантують йому виграш.*

Доведення (методом математичної індукції за максимальною кількістю ходів партії).

1. **База індукції.** Якщо з даної вершини не виходить жодна дуга, то дану позицію вважаємо *програшною* для гравця, чия черга ходити. У цьому випадку виграшна стратегія його суперника може мати довільний вигляд, наприклад задаватися порожньою множиною.

2. **Припущення індукції.** Нехай висловлювання теореми справджується для всіх вершин, починаючи з яких максимальна кількість ходів партії не перевищує певне ціле n.
3. **Крок індукції.** Розглянемо множину усі початкові позиції-вершини графа, для яких максимальна тривалість партії дорівнює $n + 1$. Тоді кінці дуг, спрямованих з цих вершин, є вершинами-позиціями, починаючи з яких партія триває небільше, ніж n ходів. Для цих кінців дуг справджується висловлювання теореми. Довільну позицію-вершину графа, для яких максимальна тривалість партії дорівнює $n + 1$ вважаємо:
   - *програшною*, якщо усі ходи з неї ведуть у виграшні позиції;
   - *виграшною*, якщо існує хід з неї у програшну позицію.

   Виграшна стратегія полягає у здійсненні ходу з виграшної (для себе) позиції у програшну (для суперника).

Надалі відповідний граф будемо називати *графом гри*, позицію (вершину), з якої починається гра — *початковою* позицією, з якої немає ходу — *кінцевою* позицією.

Означення 1. *Сумою ігор I та I' з графами гри відповідно G і G' називають гру, у графі якої:*
- *множина вершин є декартовим добутком множини вершин G і множини вершин G';*
- *ребро сполучає вершини $(a; a')$ і $(b; b')$ тоді й лише тоді, коли справджується одне з таких двох висловлювань:*
  - *справджується рівність $a = b$ і граф G' містить дугу $(a'; b')$;*
  - *справджується рівність $a' = b'$ і граф G містить дугу $(a; b)$.*

Інакше кажучи, суму ігор грають на відповідних графах ігор-доданків. При цьому ходом суми ігор є хід однієї з ігор-доданків. Таку гру позначають $I + I'$.

Зауваження 1. *Для довільної гри I гра $I + I$ з початковою позицією на діагоналі декартового добутку вершин відповідних графів (тобто такою, що має вигляд $(a; a)$) є програшною для гравця, що починає гру. Виграшна симетрична стратегія суперника полягає у повертанні на діагональ добутку вершин графа.*

Зауваження 2. *Для довільних ігор I та J ігри J та $I + I + J$ з початковими позиціями вигляду j та $(i; i; j)$ є виграшною для одного й того ж самого гравця. Виграшна стратегія цього гравця полягає у дотриманні виграшної стратегії у грі J та симетричних ходах-відповідях, якщо суперник переходить до однієї з ігор I.*

Зауваження 3. *Для довільних ігор I та J у грі $I + J$:*
- *програшною є позиція, яка є парою програшних позицій ігор I та J ;*
- *виграшною є позиція, яка є парою програшної та виграшної (у довільному порядку) позицій ігор I та J .*

Дослідженню виграшності позиції суми двох ігор, яка парою виграшних позиції, присвячений подальший виклад. Запровадимо поняття еквівалентності ігор, слабше за еквівалентність графів ігор.

Означення 2. *Ігри з графами гри G і G' та відповідно початковими позиціями s і s' взаємно моделюють одна одну, якщо існує відношення R — підмножина декартового добутку множини вершин G і множини вершин G' — з такими властивостями*:

- $(s\,;\,s')$ *належить до* R;
- *при довільній парі вершин* $(v;\,v')$ *з* R:
  - *якщо у графі G існує дуга з початком v і кінцем w, то у графі G' існує вершина w', при якій пара вершин* $(w;\,w')$ *належить до R і у графі G' існує дуга з початком v' і кінцем w'*;
  - *якщо у графі G' існує дуга з початком v' і кінцем w', то у графі G існує вершина w, при якій пара вершин* $(w;\,w')$ *належить до R і у графі G існує дуга з початком v і кінцем w.*

Рис. 1. Приклад графів двох ігор, що моделюють одна одну.

Зауваження 4. *Попереднє означення задає відношення еквівалентності ігор. Не порушуючи такої еквівалентності ігор, з графа гри можна вилучити вершини, недосяжні з початкової позиції, та дуги з кінцями чи початками у цих вершинах. У еквівалентних іграх виграє один і той самий гравець: той, який починає гру, або його суперник.*

Означення 3. *Кожній грі S поставимо у відповідність модель гри — множину $m(S)$, яку побудуємо індуктивно за максимальною кількістю ходів партії*:

- *якщо неможливо зробити жодного ходу, то* $m(S) = \{\}$ (*порожня множина*);
- *якщо хід з початкової позиції гри S призводить до однієї з позицій S_1, S_2, …, S_n, то*

$$m(S) = \{m(S_1), m(S_2), \ldots, m(S_n)\}.$$

Побудована таким чином множина $m(S)$ є *спадково скінченою*, тобто вона скінчена, її елементи скінчені, елементи її елементів скінчені і т.і. Таким чином, не порушено аксіоми теорії множин і висловлювань, які забороняють нескінчені послідовності такого вигляду: множина, елемент множини, елемент елемента … Таку спадково скінчену множину можна розглядати як початкову позицію певної гри $I_{m(S)}$, у якій ходом є перехід від множини до її елемента.

Лема 1. *Довільна гра S взаємно моделюється грою $I_{m(S)}$.*

Доведення. Для довільної позиції s гри S позначимо через S_s гру, що відрізняється від S лише початковою позицією s. Цій позиції s поставимо у відповідність $m(S_s)$, якщо s досяжна з початкової позиції гри S, або ніщо, якщо вона недосяжна. Для досяжної позиції s множина $m(S_s)$ є елементом елемента ... елемента $m(S)$, бо переходу дугою графа гри S відповідає перехід від множини до її елемента. Таким чином, множина $m(S_s)$ для досяжної позиції s насправді є позицією гри $m(S)$. З означення 3 випливає таке: якщо з позиції s можна зробити хід у позицію t, то $m(S_t)$ належить як елемент до множини $m(S_s)$. І навпаки: довільний елемент множини $m(S_s)$ є $m(T)$ для деякої гри T, яку отримують з після одного ходу S_s, тобто дорівнює $m(S_t)$ при позиції t, у яку можна потрапити за один хід з позиції s.

Лема 2. *Дві гри S і S′ взаємно моделюють одна одну тоді й лише тоді, коли* $m(S) = m(S')$.

Доведення. Відношення взаємного моделювання ігор є відношенням еквівалентності (зауваження 3), тому з леми 1 випливає *достатність.* Доведемо *необхідність* методом математичної індукції за максимальною кількістю ходів, що залишилися, починаючи з позицій s і s', що відповідають одна одній при взаємному моделюванні ігор S і S'.

1. **База індукції.** Якщо з позиції s неможливо зробити хід, то s' також є кінцевою позицією, і навпаки. У цьому випадку $m(S_s) = m(S'_{s'})$ як порожні множини.
2. **Припущення індукції.** Нехай висловлювання теореми справджується для всіх вершин, починаючи з яких максимальна кількість ходів партій не перевищує певне ціле n.
3. **Крок індукції.** Розглянемо ігри S_s і $S'_{s'}$, що взаємно моделюють одна одну і в яких максимальна кількість ходів партій не перевищує $n + 1$. Елементами множин $m(S_s)$ і $m(S'_{s'})$ є значення $m(\ldots)$ для всіх ігор, що виникають відповідно в іграх S_s і $S'_{s'}$ після одного ходу. З умови взаємного моделювання й припущення індукції випливає рівність відповідних елементів множин $m(S_s)$ і $m(S'_{s'})$, а значить — і самих множин.

Означення 4. *Дві гри S і S' називають еквівалентними за Шпраге — Ґранді, якщо для довільної гри T в іграх $T + S$ та $T + S'$ виграє один і той самий гравець.*

Зауваження 5. *З ізоморфності графів ігор чи навіть зі взаємного моделювання ігор випливає їхня еквівалентність за Шпраге — Ґранді.*

Означення 5. *Розглянемо довільну скінчену антагоністичну гру з повною інформацією і без випадкового втручання на орієнтованому графі з програшними кінцевими позиціями (тобто таку, яку описано в умові теореми 1). Для кожної позиції s (вершини графа) означимо невід'ємне ціле число $i(s)$, яке назвемо оцінкою (числом Шпраге — Ґранді) цієї позиції*:

- *якщо з позиції s неможливо зробити хід, то $i(s) = 0$;*
- *якщо з позиції s можна зробити хід в одну з таких позицій s_1, s_2, …, s_k (перераховано всі такі позиції), то $i(s)$ — найменше невід'ємне ціле число, відмінне від $i(s_1)$, $i(s_2)$, …, $i(s_k)$.*

Рис. 2. Граф гри, у якому цифрами вказано оцінки (числа Шпраге — Ґранді) позицій.

Лема 5 [про нульове значення оцінки позиції]. *Позиція s програшна тоді й лише тоді, коли її оцінка дорівнює нулю.*

Доведення (методом математичної індукції за максимальною кількістю ходів, що залишилися, починаючи з позицій s).

1. **База індукції.** Якщо з позиції s неможливо зробити хід, то згідно з означенням 5 $i(s) = 0$.
2. **Припущення індукції.** Нехай висловлювання теореми справджується для всіх вершин, починаючи з яких максимальна кількість ходів партій не перевищує певне ціле n.
3. **Крок індукції.** Нехай максимальна кількість ходів партій з початковою позицією s не перевищує ціле $n + 1$. Тоді:
   - справдження рівності $i(s) = 0$ означає, що з позиції s усі можливі ходи ведуть у позиції з додатними оцінками, які згідно з припущенням індукції є виграшними;
   - справдження нерівності $i(s) > 0$ означає, що з позиції s щонайменше один хід веде у позицію з оцінкою нуль, яка згідно з припущенням індукції є програшною.

Позначимо через $+_2$ операцію порозрядного додавання за модулем 2 у двійковій системі числення (див. операцію xor у мові Pascal).

Зауваження 6. *Операція* $+_2$ *задовольняє сполучний та переставний закони. Для довільного невід'ємного цілого* j *справджується рівність* $j +_2 j = 0$*, тому операція* $+_2 j$ *є оберненою сама до себе.*

Лема 6 [про порозрядне додавання]. *Число* $(j +_2 k)$ *— це найменше невід'ємне ціле число, відмінне від чисел вигляду* $(j' +_2 k)$ *та* $(j +_2 k')$ *при* $j' < j$ *,* $k' < k$*.*

Доведення. Операція $+_2 k$ обернена само до себе: подвійне її застосування залишає довільне число без змін. Якщо j' менше від j, то різними є суми $(j' +_2 k)$ та $(j +_2 k)$. Тому число $(j +_2 k)$ не зустрічається серед чисел вигляду $(j' +_2 k)$ при $j' < j$. Аналогічно, $(j +_2 k)$ не зустрічається серед чисел вигляду $(j +_2 k')$ при $k' < k$.

Покажемо, що всі невід'ємні числа l, менші за $(j +_2 k)$, зустрічаються серед пар вказаного вигляду. Згідно з вибором $l < (j +_2 k)$ існує розряд двійкового запису цілих чисел (надалі — виділений розряд), у якому:

- цифра числа l дорівнює 0;
- цифра числа $(j +_2 k)$ дорівнює 1,

а в усіх старших розрядах цифри чисел l і $(j +_2 k)$ збігаються. У цьому самому розряді цифри чисел j і k різні, бо їхня побітна сума дорівнює 1 . Не обмежуючи загальності міркувань, обмежимося випадком, коли у цьому розряді саме число j має цифру 1. Розглянемо число j', двійковий запис якого такий:

- у виділеному розряді має цифру 0;
- у довільному старшому розряді цифра збігається з відповідною цифрою числа j;
- у довільному молодшому розряді, якщо такий існує, цифру підбирають таким чином, щоб її сума з відповідною цифрою сума k збігалася (mod 2) з цифрою l у цьому самому розряді.

Маємо: $l = (j' +_2 k)$ при $j' < j$.

Якщо у виділеному розряді двійкового запису число k має цифру 1, то $l = (j +_2 k')$ при $k' < k$, а пошук двійкового запису k' здійснюють з точністю до перепозначення так само, як і для числа j'.

Лема 7 [про оцінку суми ігор]. *Оцінка позиції суми ігор дорівнює сумі оцінок відповідних позицій цих ігор при порозрядному додаванні за модулем 2 у двійковій системі числення.*

Доведення. Операції $+_2$ і додавання ігор задовольняють сполучний закон, тому у доведенні обмежимося розглядом суми *двох* ігор. Нехай x — найменше серед невід'ємних цілих чисел, відмінних від x_1, x_2, …, x_j, y — найменше серед невід'ємних цілих чисел, відмінних від y_1, y_2, …, y_k. Доведемо, що $(x +_2 y)$ — найменше серед невід'ємних цілих чисел, відмінних від $(x_1 +_2 y)$, $(x_2 +_2 y)$, …, $(x_j +_2 y)$ та $(x +_2 y_1)$, $(x +_2 y_2)$, …, $(x +_2 y_j)$. По-перше, число $(x +_2 y)$ відмінне від перелічених вище $(j + k)$ чисел, бо подвійне порозрядне додавання є тотожнім перетворенням. По-друге, серед чисел x_1, x_2, …, x_j зустрічаються усі ті, які менші за x (також, можливо, деякі більші за x), а серед чисел y_1, y_2, …, y_k зустрічаються усі ті, які менші за y (також, можливо, деякі більші за y). Тому згідно з попередньою лемою 6, серед перелічених вище $(j + k)$ чисел є всі числа, які менші за $(x +_2 y)$. Для завершення доведення достатньо всі числа, які розглядалися, тлумачити як оцінки відповідних позицій ігор.

Теорема 2 [Шпраґе — Ґранді]. *Дві гри еквівалентні за Шпраґе — Ґранді тоді й лише тоді, коли оцінки початкових позицій у них збігаються.*

Доведення. Якщо оцінки ігор початкових позицій ігор S і S' збігаються, то для довільної гри T збігаються оцінки початкових позицій ігор $S + T$ і $S' + T$. Отже, ці оцінки позицій одночасно додатні або дорівнюють нулю, а відповідні позиції відповідно виграшні або програшні (див. лему 5 про нульове значення оцінки позиції). Якщо оцінки ігор початкових позицій ігор S і S' різні, то розглянемо ігри $S + S$ та $S' + S$. Початкова позиція гри $S + S$ — програшна, а початкова позиція гри $S + S'$ — виграшна, бо її оцінка додатна. У цьому випадку ігри S і S' не еквівалентні за Шпраґе — Ґранді.

Після ознайомлення з викладеною теорією доволі прозорим видається аналіз відомої гри «фан-тан» чи нім, яка має такі правила. На початку гри є k куп предметів. Перша купа містить m_1 предметів, друга — m_2 предметів, …, k-та купа — m_k предметів. Двоє гравців по черзі забирають з будь-якої купи довільну *додатну* кількість предметів (можливо, й усі предмети купи). Переможцем вважають того, хто зробить останній хід. У грі з однією купою предметів оцінка позиції дорівнює кількості предметів у купі. Тому переможець повинен створювати ті позиції, у яких для кожного розряду двійкової системи числення сума цифр кількостей предметів у всіх купах парна.