**Олександр Рудик**

# Еквівалентність аксіоми вибору, теореми Цермело, принципу максимальності Хаусдорфа й леми Цорна

**Означення 1.** *Запровадимо такі поняття.*

1. *Максимальний (мінімальний) елемент частково впорядкованої множини — елемент, більше (відповідно, менше) якого немає.*
2. *Найбільший (найменший) елемент частково впорядкованої множини — це такий елемент, що більший (менший) за решту елементів.*
3. *Цілком впорядкована множина — лінійно впорядкована множина, в якій для кожної непорожньої підмножини існує найменший елемент відповідно до заданого порядку.*

**Зауваження 1.**

1. *Існують частково впорядковані множини, в яких немає максимального чи мінімального елементів.*
2. *Існують частково впорядковані множини, в яких немає найбільшого чи найменшого елементів.*
3. *Максимальний елемент може бути не порівнюваним з деякими елементами частково впорядкованої множини і тому може не бути найбільшим.*

**Теорема 1.** *Наступні чотири висловлювання еквівалентні між собою.*

1. **Теорема Цермело про цілковите впорядкування:** *будь-яку множину можна цілком впорядкувати.*
2. **Принцип максимальності Хаусдорфа:** *Довільна лінійно впорядкована підмножина частково впорядкованої множини M міститься у деякій максимальній за включенням лінійно впорядкованій підмножині множини M.*
3. **Лемма Цорна:** *якщо довільна лінійно впорядкована підмножина частково впорядкованої множини M обмежена зверху (хоча б одним) елементом множини M, то існує (щонайменше один) максимальний елемент M.*
4. **Аксіома вибору:** *для довільного множини M існує функция f, при якій:*
   - *область визначення — множина усіх непорожніх підмножин множини M —* $2^M \setminus \varnothing$
   - *для довільної непорожньої підмножини A множини M маємо:* $f(A) \in A$.

**Доведення.** Викладемо міркування таким чином: (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (1).

**(1) ⇒ (2)**

Для виведення теореми Хаусдорфа з теореми Цермело здійснимо таке. Впорядкуємо цілком множину $M$ (згідно з теоремою Цермело це можна зробити). Для довільної лінійно впорядкованої підмножини $A$ частково впорядкованої множини $M$ розглянемо множину $B$, що містить усі елементи $A$ і ті елементи $b \in M \setminus A$, які порівнювані щодо *визначеного спочатку* на $M$ часткового порядку як з усіма елементами множини $A$, так і зо всіма елементами множини $B$, які менші ніж $b$ щодо повного порядку, запровадженого на $M$. Згідно з таким вибором $B$ — лінійно впорядкована і максимальна за включенням подмножина множини $M$, що містить $A$ як підмножину.

**(2) ⇒ (3)**

Лему Цорна з теореми Хаусдорфа виведемо таким чином. Розглянемо довільну одноелементну підмножину частково впорядкованої множини $M$. Згідно з принципом максимальності Хаусдорфа існує максимальна за включенням лінійно впорядкована підмножина $B$ частково впорядкованої множини $M$. Згідно з умовою леми Цорна існує верхня ґрань множини $B$, яку позначимо $y$. Припустимо, що $y$ не є максимальним елементом множини $M$. Тоді існує елемент $z \in M$, при якому $y < z$. Долучивши $z$ до множини $B$, отримуємо лінійно впорядковану множину. Отримана суперечність з максимальністю множини $B$ свідчить про хибність припущення. Інакше кажучи, $y$ — максимальний елемент множини $M$.

**(3) ⇒ (4)**

Аксіому вибору з леми Цорна отримаємо таким чином. Розглянемо множину $F$ усіх таких функцій $f$, при яких:

- область визначення — $2^M \setminus \varnothing$ — множина усіх непорожніх підмножин множини $M$;
- $f(A) \in A$ для всіх непорожніх підмножини $A$ множини $M$, при яких визначено $f(A)$.

Перетворимо $F$ на частково впорядковану множину таким чином: будемо вважати, що $f \leq g$ тоді й лише тоді, коли $f(A) = g(A)$ на всій області визначення $f$, що є підмножиною області визначення $g$. Довільний лінійно впорядкований набір функцій обмежений зверху функцією, область визначення якої збігається з об'єднанням областей визначення усіх функцій. Згідно з лемою Цорна у множині $F$ є щонайменше один максимальний елемент $f$. Припустимо, функцію $f$ не означено на деякій непорожній підмножині $A$ множини $M$, то можна, довільним чином вибравши елемент $a$ з $A$, побудувати функцію $g$, долучивши $A$ до області визначення функції $f$ і поклавши:

- $g(A) = a$;
- $g(B) = f(B)$ при довільному $B$ з області визначення $f$.

Отримана суперечність нерівності $f < g$ з максимальністю елемента $f$ множини $F$ свідчить про хибність припущення. Інакше кажучи, $f$ — шукана функція, що виділяє в *кожній* непорожній підмножині множини $M$ по одному елементу.

**(4) ⇒ (1)**

Теорему Цермело про можливість цілковитого впорядкування довільної множини $M$ виводимо з аксіоми вибору таким чином. Згідно з аксіомою вибору існує функція

$$f : 2^M \setminus \varnothing \to M,$$

при якій для довільної непорожньої підмножини $A$ множини $M$ маємо: $f(A) \in A$. Розглянемо цілком впорядковані множини $P$ з такими властивостями:

i. $P \subseteq M$;
ii. $\forall x \in P \quad x = f(M \setminus \{y \in P \mid y < x\})$.

З умови (ii) маємо: $f(M)$ — найменший елемент. Щонайменше одна цілком впорядкована множина $P$, що задовольняє умови (i–ii), існує. Наприклад, $P = \{f(M)\}$. Для зручності подальшого викладу доведення запровадимо таке поняття: початковим відрізком цілком впорядкованої множини $P$ назвемо таку її підмножину $Q$, що разом з кожним своїм елементом $q$ містить усі ті елементи $p$ множини $P$, які менші за $q$. Інакше кажучи,

$$\forall p \in P \quad \forall q \in Q \quad (p < q \Rightarrow p \in Q).$$

Доведемо, що для довільних двох цілком впорядкованих множин $P$ і $Q$, що задовольняють властивості (i–ii), одна є початковим відрізком іншої. Розглянемо усі можливі початкові відрізки $P$, що одночасно є початковими відрізками $Q$. Існує щонайменше один такий непорожній початковий відрізок $\{f(M)\}$. Розглянемо об'єднання $U$ всіх таких спільних початкових відрізків. Припустимо, що $P \neq U$ і $Q \neq U$. Тоді $f(M \setminus U)$ є найменшим елементом множин $P \setminus U$ і $Q \setminus U$. Множина $U \bigcup \{f(M \setminus U)\}$ є початковим відрізком обох множин $P$ і $Q$, яка більша від їхнього найбільшого спільного початкового відрізка $U$. Отримана суперечність свідчить про хибність припущення. Отже, $P = U$ або $Q = U$. Для завершення доведення теореми Цермело розглянемо об'єднання $A$ всіх множин $P$, що задовольняють умови (i–ii). Згідно з доведеним, воно є цілком впорядкованою множиною. Припустимо, що $A \neq M$. Долучивши до $A$ элемент $f(M \setminus A)$ і вважаючи його більшим за всі елементи множини $A$, отримаємо суперечність з максимальністю $A$ щодо включення. Отримана суперечність свідчить про хибність припущення $A \neq M$. Отже, $A = M$, що й потрібно було довести.