Київський університет імені Бориса Грінченка

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОСВІТІ Й НАУЦІ

Монографія

Київ — 2021

УДК 51-7+004]:37 https://doi.org/10.28925/9720213284km
Т33

Рекомендовано до друку Вченою радою
Київського університету імені Бориса Грінченка
(*протокол № 2 від 25.02.2021 р.*)

Рецензенти:

Батечко Н.Г., завідувач кафедри вищої та прикладної математики Національного університету біоресурсів і природокористування, кандидат фізико-математичних наук, доктор педагогічних наук, доцент;

Зінченко Н.М., професор кафедри інформаційних технологій та аналізу даних Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;

Юрчишин В.М., професор кафедри інженерії програмного забезпечення Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, доктор технічних наук, професор.

Т33 **Теоретичні та практичні аспекти використання математичних методів та інформаційних технологій в освіті й науці:** моногр. / за заг. ред. О. Литвин. — К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2021. — 332 с.
ISBN 978-617-658-104-8

У монографії висвітлено результати опрацювання наукової теми «Теоретичні та практичні аспекти використання математичних методів та інформаційних технологій в освіті і науці» (реєстраційний номер 0116U004625) кафедрою комп'ютерних наук і математики Факультету інформаційних технологій та управління Київського університету імені Бориса Грінченка (термін виконання: березень 2016 р. — березень 2021 р.).

Представлено основні наукові та практичні результати з таких напрямів: математичне та комп'ютерне моделювання, апаратно-програмні засоби автоматизованих систем керування, застосування цифрових технологій в освітньому процесі.

Для науково-педагогічних, наукових і педагогічних працівників, які цікавляться сучасними проблемами застосування математичних методів і цифрових технологій в освіті й науці.

УДК 51-7+004]:37

ISBN 978-617-658-104-8

ЗМІСТ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ І ПРИКЛАДНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

2.1. ОПТИМІЗАЦІЙНІ ФУНКЦІЇ КЕРУВАННЯ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Марія Астаф'єва
(Київський університет імені Бориса Грінченка)

За останні десятиліття теорія оптимального керування інтенсивно розвивається, що пояснюється не лише наявністю складних і цікавих суто математичних проблем, а й широким спектром прикладних задач у різних галузях науки і людської діяльності: фізиці, економіці, біології, екології, медицині, енергетиці та ін. Нові наукові (теоретичні) й реальні (прикладні) задачі відрізняються своєю складністю, що зумовлює не лише розширення сфери застосування математичного моделювання, а й удосконалення самих моделей у напрямі більшої їх точності та повноцінності. Особливо гостро в сучасних умовах стрімкого розвитку науки, техніки, інформаційних технологій постає проблема керованості системи (процесу). Як відомо, кожне завдання оптимального керування містить такі складові: 1) математичну модель об'єкта керування; 2) мету керування (т. зв. критерій якості); 3) певні обмеження на стан (траєкторію) системи, тривалість процесу керування тощо, при яких має бути забезпечена мета керування.

Математичній теорії керування присвячено дуже багато монографій, підручників і наукових статей українських та зарубіжних авторів. Основи сучасної теорії оптимального керування заклали Л.С. Понтрягін, В.Г. Болтянский та ін. [5]. Методи варіаційного числення в оптимізаційних задачах висвітлено, наприклад, у дослідженнях [3–4]. Вивченню лінійних та нелінійних систем диференціальних рівнянь присвячені монографії [2–6]. Питання теорії керування лінійних систем, зокрема й методи аналізу систем з невідомими параметрами, розглядаються в [7]. Актуальною є задача знаходження оптимізаційної функції керування в лінійних диференціальних рівняннях та їх системах, яка забезпечує мінімум функціонала певного виду. Для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами вона розглянута в [8], суть розв'язання викладено в [1].

Далі розглянемо оптимізаційну задачу математичної теорії керування (мінімізація ризиків, досягнення потрібного результату за найкоротший час, економія енергоресурсів тощо), у якій еволюційний процес описується лінійними диференціальними рівняннями, а функція керування задається невласним інтегралом.

1. Скалярний випадок.

Нехай математичною моделлю процесу є скалярне диференціальне рівняння:

$$\dot{x} = ax + bu, \tag{1.1}$$

де a, b — деякі сталі коефіцієнти; $u(t)$ — скалярна функція керування.

Задано початкову умову:

$$x\big|_{t=0} = x_0. \tag{1.2}$$

Потрібно знайти таку функцію $u = u(t)$, визначену і неперервну на півосі $\left[0, +\infty\right)$, щоб розв'язок $x = x(t)$ рівняння (1.1) прямував до нуля на $+\infty$ й, крім того, інтеграл

$$I\left[u\right] = \int_0^{+\infty} \left(u^2\left(t\right) + x^2\left(t\right)\right) dt \tag{1.3}$$

набував найменшого значення.

Шукатимемо керування, яке забезпечує мінімум функціонала (1.3), у вигляді:

$$u(t) = -kx(t). \tag{1.4}$$

Зазначимо, що при цьому відповідний розв'язок $x(t)$ разом із функцією керування прямує до нуля на $+\infty$, що гарантує збіжність інтеграла (1.3).

Щоб знайти значення коефіцієнта k, розглянемо допоміжну функцію:

$$V(t) = s \cdot x^2(t), \tag{1.5}$$

де $x(t)$ — деякий розв'язок рівняння (1.1) з початковою умовою (1.2), а коефіцієнт s залишається поки що невизначеним.

Диференціюючи рівність (1.5), отримаємо:

$$\dot{V}(t) = 2s \cdot x(t) \cdot \dot{x}(t) = 2sx(t)\left(ax(t) + bu(t)\right).$$

Останнє співвідношення інтегруємо в межах від 0 до T і переходимо до границі при $T \to \infty$. Отримуємо:

$$0 = V(0) + \int_0^{+\infty} 2sx(t)\left[ax(t) + bu(t)\right]dt.$$

Додаючи цю рівність з (1.3) і враховуючи (1.5), дістанемо:

$$I[u] = V(0) + \int_0^{+\infty} \left[u^2 + 2sbux + x^2 + 2sax^2\right]dt =$$

$$= sx_0^2 + \int_0^{+\infty} \left[\left(u + sbx\right)^2 + \left(1 + 2as - b^2s^2\right)x^2\right]dt.$$

Доберемо s так, щоб виконувалася умова $1 + 2as - b^2s^2 = 0$. Це буде, зокрема, якщо $s = s_0 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b^2}$. Тепер $I[u]$ набуває вигляду:

$$I[u] = s_0x_0^2 + \int_0^{+\infty} \left(u(t) + s_0bx(t)\right)^2 dt. \tag{1.6}$$

Бачимо, що функціонал (1.6), а з ним і (1.3) набуває найменшого значення при умові $u(t)+s_0bx(t)=0$. Отже, в (1.4) $k=s_0b$. Урахувавши це і підставляючи (1.4) у рівняння (1.1), отримуємо:

$$\dot{x}=ax+b(-s_0b)x=-x\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

Розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову (1.2)

$$x=x(t)=x_0e^{-t\sqrt{a^2+b^2}},$$

і відповідна функція керування $u=u(t)=-\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}x_0e^{-t\sqrt{a^2+b^2}}$ забезпечує мінімум функціонала (1.3). Значення цього мінімуму

$$\min I[u]=s_0x_0^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\cdot x_0^2.$$

Отже, для будь-яких дійсних a, b ($b\neq 0$) і фіксованого x_0 знайдено функцію керування $u(t)$, при якій функціонал (1.3) досягає найменшого свого значення.

2. Векторний випадок.

Розглянемо тепер випадок, коли еволюційний процес описується лінійною системою зі сталими коефіцієнтами:

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ x\in R^n,\ u\in R^m, \tag{2.1}$$

початкова умова: $x(t_0)=x_0$.

Припускаємо, що існують неперервні вектор-функції керування $u(t)$, $t\in R_+$, $u(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0$, такі, що розв'язок системи (2.1) із заданою початковою умовою $x(t)=e^{At}\left(x_0+\int\limits_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right)$ прямує до нуля на нескінченності. На множині таких вектор-функцій досліджуємо на мінімум функціонал

$$I[u]=\int\limits_0^{+\infty}\left[\langle\Theta u(t),u(t)\rangle+\langle Mx(t),x(t)\rangle\right]dt, \tag{2.2}$$

де Θ, M — сталі квадратні матриці розмірності $m \times m$ та $n \times n$ відповідно. Причому матриця Θ додатно визначена, а M — невід'ємна.

Як і в скалярному випадку (п. 1), шукаємо $u(t)$ у вигляді:

$$u(t) = -K \cdot x(t),$$

де K — деяка стала прямокутна матриця.

Розглядаючи допоміжну квадратичну форму:

$$V(x) = \langle Sx, x \rangle, \ x \in R^n,$$

і виконавши ті ж процедури, що й у скалярному випадку (диференціювання, наступне інтегрування, перехід до границі, почленне додавання відповідних рівностей), знаходимо:

$$K = \Theta^{-1} B^T S.$$

У результаті виявиться, що для мінімізації функціонала (2.2) S має бути розв'язком матричного рівняння Ріккаті

$$-SNS + SA + A^T S + M = 0, \tag{2.3}$$

де фіксована симетрична матриця N визначається рівністю $N = B\Theta^{-1}B^T$.

Якщо вдалося знайти розв'язок S цього рівняння, то оптимальне керування $u(t)$ має вигляд:

$$u = -\Theta^{-1}B^T S \cdot \exp\left\{\left(A - B\Theta^{-1}B^T S\right)t\right\} \cdot x_0,$$

а мінімальне значення функціонала (2.2) дорівнює $I_{\min} = \langle Sx_0, x_0 \rangle$.

3. Приклад.

Для задачі Коші

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} + 2x = u, \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = -1 \end{cases} \tag{3.1}$$

потрібно знайти функцію керування $u = u(t)$, визначену і неперервну на додатній півосі, при якій мінімізується функціонал

$$I[u]=\int_0^{+\infty}\left[4u^2(t)+9x^2(t)+26x(t)\dot{x}(t)+41\dot{x}(t)\right]dt \qquad (3.2)$$

і знайти мінімальне значення цього функціонала.

Розв'язання

Перейдемо від лінійного диференціального рівняння другого порядку до системи двох рівнянь, вважаючи $x_1(t)=x(t),\ x_2(t)=\dot{x}(t)$. Тоді задача (3.1) набуває вигляду (3.3) — (3.4):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + u, \end{cases} \qquad (3.3)$$

$$x_1(0)=1,\ x_2(0)=-1, \qquad (3.4)$$

а функціонал (3.2) запишеться так:

$$I[u]=\int_0^{+\infty}\left[4u^2+\left\langle\begin{pmatrix}9 & 13\\ 13 & 41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right\rangle\right]dt. \qquad (3.5)$$

Таким чином, отримаємо:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ \Theta=4,\ M=\begin{pmatrix}9 & 13\\ 13 & 41\end{pmatrix},$$

$$N=B\Theta^{-1}B^T=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Невідому симетричну матрицю $S=\begin{pmatrix}s_1 & s\\ s & s_2\end{pmatrix}$ отримуємо із рівняння Ріккаті (2.3), яке у нашій задачі має вигляд матричного рівняння:

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}s^2 & ss_1\\ ss_1 & s_2^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2s & s+s_1\\ -2s_2 & s+s_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2s & -2s_2\\ s+s_1 & s+s_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 13\\ 13 & 41\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо систему рівнянь з трьома невідомими s_1, s_2, s_3:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}s^2 - 4s + 9 = 0, \\ -\frac{1}{4}ss_2 + s + s_1 - 2s_2 + 13 = 0, \\ -\frac{1}{4}s_2^2 + 2s + 2s_2 + 41 = 0. \end{cases}$$

Із системи знаходимо: $S = \begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix}$.

Тоді $K = \Theta^{-1}B^T S = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ й оптимальне керування $u = -Kx = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_2$, або для початкового рівняння $u = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}\dot{x}$. Підставивши знайдену функцію u в (3.1), дістаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами $\ddot{x} + \frac{7}{2}\dot{x} + \frac{5}{2}x = 0$. Його розв'язок, що задовольняє умову (3.2), $x(t) = e^{-t}$, а шукана функція керування $u(t) = 4e^{-t}$. Найменше значення функціонала дорівнює:

$$\min I[u] = \langle Sx_0, x_0 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 30\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot(-1) + 18\cdot(-1)^2 = 44.$$

4. Задача мінімізації функціонала з векторною функцією керування і змінними коефіцієнтами.

Розглянемо диференціальне рівняння із векторною функцією керування

$$\dot{x} = a(t)x + b_1(t)u_1 + b_2(t)u_2 + \ldots + b_m(t)u_m, \tag{4.1}$$

де $a(t)$ і $b(t)$ — деякі скалярні функції, неперервні й обмежені на півосі $[0, +\infty)$, початкова умова $x(t_0) = x_0$. Розглянемо функціонал вигляду:

$$I[u] = \int_0^{+\infty} \left(r_1(t)u_1^2(t) + r_2(t)u_2^2(t) + \ldots + r_m(t)u_m^2(t) + q(t)x^2(t) \right) dt, \tag{4.2}$$

де скалярні функції $r_i(t), q(t) \in C^0(R_+)$ задовольняють умови:

$$r_i(t) \ge r_0,\ i = \overline{1,m}\ r_0 = const > 0,\ q(t) \ge 0\ \forall t \in R_+. \qquad (4.3)$$

Аналогічно, як і раніше, розглянемо скалярну функцію:

$$V(t) = s(t) \cdot x^2(t), \qquad (4.4)$$

де $s(t)$ є поки що невизначеною скалярною функцією, неперервно диференційовною і обмеженою на R_+. Диференціюючи рівність (4.4), дістанемо:

$$\dot{V}(t) = \dot{s}(t)x^2(t) + 2s(t)x(t)\dot{x}(t) =$$

$$= \dot{s}(t)x^2(t) + 2s(t)x(t)\left[a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)u(t)\right].$$

Отриману рівність інтегруємо від 0 до T і переходимо до границі при $T \to \infty$, отримуємо:

$$0 = V(0) + \int_0^{+\infty} \left\{ \dot{s}(t)x^2(t) + 2s(t)x(t)\left[a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)u(t)\right]\right\} dt. \qquad (4.5)$$

Праву частину рівності (4.5) додамо до правої частини (4.2), отримуємо запис функціонала (4.2) в іншому вигляді:

$$I[u] = V(0) + \int_0^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} r_i u_i^2 + 2s\sum_{i=1}^{m} b_i u_i x + \dot{s}x^2 + 2sax^2 + qx^2 \right] dt =$$

$$= s(0)x_0^2 + \int_0^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} r_i \left(u_i + \frac{sb_i}{r_i} x \right)^2 + \left(\dot{s} + 2as + q - \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2}{r_i} s^2 \right) x^2 \right] dt. \qquad (4.6)$$

При цьому $s(t)$ є довільно вибраною неперервно диференційовною і обмеженою на півосі R_+ скалярною функцією. Доцільно вибрати цю функцію так, щоб другий доданок у підінтегральній функції (4.6) дорівнював нулю, тобто щоб виконувалася рівність:

$$\dot{s} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2(t)}{r_i(t)} \right) s^2 - 2a(t)s - q(t). \tag{4.7}$$

Нехай це є можливим, тобто диференціальне рівняння Ріккаті (4.7) має розв'язок $s = s_0(t)$, обмежений на півосі R_+, який задовольняє нерівність:

$$s_0(t) \geq 0 \;\; \forall t \in R_+. \tag{4.8}$$

(Питання існування обмежених розв'язків рівняння Ріккаті розглянемо в п. 5.)

Підставляючи в рівність (4.6) $s = s_0(t)$, отримуємо:

$$I[u] = s_0(0)x_0^2 + \int_0^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} r_i(t) \left(u_i(t) + \frac{s_0(t)b_i(t)}{r_i(t)} x(t) \right)^2 \right] dt. \tag{4.9}$$

Враховуючи нерівності (4.3), бачимо, що функціонал (4.9) набуває найменшого значення $s_0(t)x_0^2$ при виконанні таких співвідношень:

$$u_i(t) = -\frac{s_0(t)b_i(t)}{r_i(t)} x(t), \;\; i = \overline{1,m}. \tag{4.10}$$

Підставляючи (4.10) у рівняння (4.1), запишемо його розв'язок, що задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$:

$$x = x_0 \exp\left\{ \int_0^t \left[a(\sigma) - s_0(\sigma) \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2(\sigma)}{r_i(\sigma)} \right] d\sigma \right\}.$$

Тоді відповідна оптимальна вектор-функція керування набуває вигляду:

$$u = (u_1(t), ..., u_m(t)) =$$

$$= -s_0(t) \cdot \left(\frac{b_1(t)}{r_1(t)}, ..., \frac{b_m(t)}{r_m(t)} \right) \cdot x_0 \exp\left\{ \int_0^t \left[a(\sigma) - s_0(\sigma) \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2(\sigma)}{r_i(\sigma)} \right] d\sigma \right\}.$$

5. Обмежені розв'язки рівняння Ріккаті.

Розглянемо рівняння Ріккаті:

$$\dot{z} = M(t)z^2 + N(t)z + L(t), \tag{5.1}$$

де функції $M(t), N(t), L(t)$ визначені, неперервні й обмежені на всій дійсній осі.

Поряд з рівнянням (5.1) розглянемо інше рівняння:

$$\dot{y} = -M(t) - N(t)y - L(t)y^2, \tag{5.2}$$

яке дістаємо з рівняння (5.1) за допомогою заміни змінної $z = y^{-1}$.

Має місце таке твердження.

Теорема 1. Нехай для всіх $t \in R$ виконується нерівність

$$|N(t)| - |M(t) + L(t)| \geq \alpha, \tag{5.3}$$

де α — додатна стала. Тоді рівняння (5.1) і (5.2) мають єдині розв'язки $z = z^*(t)$, $y = y^*(t)$, для яких виконуються нерівності

$$|z^*(t)| < 1, |y^*(t)| < 1 \; \forall t \in R. \tag{5.4}$$

Доведення. Розглянемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{N(t)}{2}x_1 - M(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = L(t)x_1 + \dfrac{N(t)}{2}x_2 \end{cases} \tag{5.5}$$

і звернемо увагу на те, що, якщо позначити $z = \dfrac{x_2}{x_1}$, то дістанемо рівняння (5.1). Справді, записуючи похідну, маємо:

$$\dot{z} = \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2} = \frac{\left(L(t)x_1 + \dfrac{N(t)}{2}x_2\right)x_1 - x_2\left(-\dfrac{N(t)}{2}x_1 - M(t)x_2\right)}{x_1^2} =$$

$$= L(t) + N(t)\frac{x_2}{x_1} + M(t)\frac{x_2^2}{x_1^2} = M(t)z^2 + N(t)z + L(t).$$

Аналогічно переконуємось, що при позначенні $y = \frac{x_1}{x_2}$ із системи (5.5) дістанемо рівняння (5.2).

Із нерівності (5.3) випливає, що або

$$N(t) \geq \alpha, \tag{5.6}$$

або

$$N(t) \leq -\alpha. \tag{5.7}$$

Переконаємось, що у випадку (5.6), наприклад, для кожного розв'язку

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

системи (5.5) виконується умова:

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) \leq -\varepsilon\left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right), \ \forall t \in R, \tag{5.9}$$

де $\varepsilon = \inf\limits_{t \in R}\left(N(t) - \left|M(t) + L(t)\right|\right) = const > 0.$

Похідну лівої частини нерівності (5.9) запишемо в такому вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left[x_1^2(t) - x_2^2(t)\right] = 2x_1(t)\dot{x}_1(t) - 2x_2(t)\dot{x}_2(t) = 2x_1\left[-\frac{N}{2}x_1 - Mx_2\right] -$$

$$-2x_2\left[Lx_1 + \frac{N}{2}x_2\right] = -Nx_1^2 - 2\left(M + L\right)x_1x_2 - Nx_2^2 = \Phi(x_1, x_2).$$

Тепер знайдемо найбільше значення квадратичної форми $\Phi\left(x_1, x_2\right)$ на одиничному колі: $x_1 = \cos\varphi, x_2 = \sin\varphi.$ Дістанемо:

$$\Phi(\cos\varphi, \sin\varphi) = -N\cos^2\varphi - 2\left(M + L\right)\cos\varphi\sin\varphi - N\sin^2\varphi =$$

$$= -N - \left(M + L\right)\sin 2\varphi \leq \left|M(t) + L(t)\right| - N(t) \leq$$

$$\leq -\inf_{t \in R}\left(N(t) - \left|M(t) + L(t)\right|\right) = -\varepsilon$$

Виконання нерівності $\Phi\left(x_1, x_2\right) \leq -\varepsilon\left(x_1^2 + x_2^2\right) \forall x_1, x_2 \in R$ доводить справедливість співвідношення (5.9).

Переконаємося, що будь-який ненульовий розв'язок (5.8) системи (5.5), координати якого при початковому значенні $t = 0$ задовольняють нерівність

$$x_1^2(0) - x_2^2(0) \le 0, \tag{5.10}$$

зростає на $+\infty$. Із умови (5.9) бачимо, що різниця квадратів $x_1^2(t) - x_2^2(t)$ є спадною функцією, тому $\forall t \in (0,+\infty)$ має місце строга нерівність:

$$x_2^2(t) - x_1^2(t) > 0. \tag{5.11}$$

Із нерівності (5.9) випливає, що $\forall t \in (0,+\infty)$

$$\frac{d}{dt}\left[x_2^2(t) - x_1^2(t)\right] \ge \varepsilon\left[x_1^2(t) + x_2^2(t)\right] \ge \varepsilon\left[x_2^2(t) - x_1^2(t)\right].$$

Звідси з урахуванням (5.11) отримаємо:

$$\frac{d\left[x_2^2(t) - x_1^2(t)\right]}{x_2^2(t) - x_1^2(t)} \ge \varepsilon dt.$$

Інтегруючи в межах від t_0 до $t\ (0 < t_0 < t)$ обидві частини цієї нерівності, дістанемо:

$$x_2^2(t) - x_1^2(t) \ge \left(x_2^2(t_o) - x_1^2(t_o)\right)\exp\left\{\varepsilon(t - t_o)\right\}, \tag{5.12}$$

що і вказує на зростання (на $+\infty$) розв'язку (5.8) системи (5.5) з початковою умовою (5.10).

Тепер доведемо, що система (5.5) має й такі розв'язки (5.8), для яких виконується нерівність

$$x_1^2(t) - x_2^2(t) > 0,\ \forall t \in (-\infty,+\infty). \tag{5.13}$$

Запишемо ліву частину нерівності (5.13) так:

$$x_1^2(t) - x_2^2(t) = x_1^2(t)\left[1 - \left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right)^2\right].$$

Тепер бачимо, що нерівність (5.13) виконується тоді, коли рівняння Ріккаті (5.1) має розв'язок $z = z^*(t)$, для якого виконується перша із оцінок (5.4). Виявляється, якщо припустити, що система (5.5) не має розв'язків (5.8), для яких виконується нерівність (5.13), то це приведе до протиріччя. Зазначимо спочатку, якщо деякий розв'язок рівняння (5.1) виходить за межі смуги $|z| \le 1$, то вже не повертається до неї. Це видно із правої частини рівняння (5.1) $M(t)z^2 + N(t)z + L(t) = f(t,z)$, яка набуває додатних значень при $z = 1$ і від'ємних при $z = -1$ (припускається виконання нерівностей (5.3) і (5.6)).

Припустимо, що рівняння (5.1) не має розв'язків $z = z^*(t)$, для яких виконується перша із нерівностей (5.4). Це означає, що всі розв'язки рівняння (5.1) виходять за межі смуги $|z| \le 1$. Позначимо точки: $(0,-1) = A_0$, а $(0,1) = B_0$. Розглянемо розв'язок рівняння (5.1), який починається при $t = 0$ в точці $z = 0$. Цей розв'язок згідно з припущенням має вийти за межі смуги $|z| \le 1$. Нехай його графік перетинає пряму $z = 1$. Тоді позначимо початкову точку $(0,0) = B_1$ і розглянемо розв'язок, який починається при $t = 0$ із середини відрізка $[A_0, B_1]$, тобто з точки $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Нехай графік цього розв'язку перетинає пряму $z = -1$, тоді позначимо початкову точку $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = A_1$ і т. д. Дістанемо стяжну послідовність вкладених відрізків $[A_n, B_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ таких, що графіки розв'язків рівняння (5.1), які починаються при $t = 0$ в точках A_n, перетинають пряму $z = -1$, а графіки розв'язків, що беруть початок в точках B_n, перетинають пряму $z = 1$. Тепер розглянемо розв'язок $z = \tilde{z}(t)$ рівняння (5.1), який починається при $t = 0$ в точці $\tilde{A} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [A_n, B_n]$.

Графік цього розв'язку згідно з припущенням має перетинати одну із прямих $z = \pm 1$. Нехай, наприклад, перетинає пряму $z = -1$ при значенні $t = T > 0$. Тоді розглянемо на відрізку $[0, T+1]$ розв'язок $z = \bar{z}(t)$ рівняння (5.1) з умовою на кінці цього відрізка:

$$\bar{z}(t)\big|_{t=T+1} = -1 .$$

Початкова точка цього розв'язку $\overline{z}(0)$ не може лежати ні вище, ні нижче від точки $\tilde{A}$, оскільки розв'язки рівняння (5.1) не можуть перетинатися (виконується умова єдиності розв'язку задачі Коші). Отримане протиріччя доводить, що існують розв'язки $z = z^*(t)$ рівняння (5.1), для яких виконується перша з оцінок (5.4).

Тепер розглянемо розв'язок (5.8) лінійної системи (5.5) з початковою умовою:

$$\left.\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ z^*(0) \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

і покажемо, що цей розв'язок $x = x^+(t) = \begin{bmatrix} x_1^+(t) \\ x_2^+(t) \end{bmatrix}$ прямує до нуля при $t \to +\infty$. Це одразу свідчитиме про те, що розв'язок $z = z^*(t)$, який задовольняє першу з нерівностей (5.4), буде єдиний, оскільки інакше це б означало, що існують два лінійно незалежних розв'язки лінійної системи (5.5), які прямують до нуля на $+\infty$, а значить, і всі розв'язки прямують до нуля, що суперечить оцінці (5.12).

Розглянемо квадратичну форму з додатним параметром δ:

$$V_\delta(x) = x_1^2 - x_2^2 + \delta\left(x_1^2 + x_2^2\right). \tag{5.15}$$

Запишемо й оцінимо її похідну в силу системи (5.5). Отримаємо:

$$\frac{d}{dt}V_\delta\left(x(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) + \delta\frac{d}{dt}\left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) \le -\varepsilon\left(x_1^2 + x_2^2\right) +$$

$$+\delta\left(2x_1\left(-\frac{N(t)}{2}x_1 - M(t)x_2\right) + 2x_2\left(L(t)x_1 + \frac{N(t)}{2}x_2\right)\right) \le$$

$$\le -\left(\varepsilon - \delta\left(|N| + |M - L|\right)\right)\left(x_1^2 + x_1^2\right) \le -\overline{\varepsilon}\left(x_1^2 + x_1^2\right). \tag{5.16}$$

Оскільки функції $M(t), N(t), L(t)$ обмежені на R, то завжди знайдеться таке значення $\delta > 0$, що в нерівності (5.16) $\overline{\varepsilon} > 0$. Оскільки для розв'язку $x = x^+(t) = \begin{bmatrix} x_1^+(t) \\ x_2^+(t) \end{bmatrix}$ виконується нерівність (5.11), то також буде виконуватись і така нерівність:

$$V_\delta\left(x^+(t)\right) > 0 \ \forall t \in R, \delta = \text{const} > 0. \tag{5.17}$$

З іншого боку, для будь-яких x_1, x_2 виконується нерівність:

$$x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{1+\delta} V_\delta(x). \tag{5.18}$$

Із оцінки (5.16) з урахуванням нерівності (5.18) отримуємо:

$$\frac{d}{dt} V_\delta\left(x^+(t)\right) \leq -\frac{\overline{\varepsilon}}{1+\delta} \cdot V_\delta\left(x^+(t)\right). \tag{5.19}$$

Ураховуючи нерівність (5.17), поділимо обидві частини (5.19) на додатну функцію $V_\delta\left(x^+(t)\right)$ і проінтегруємо в межах від τ до t $(\tau \leq t)$. Отримаємо:

$$V_\delta\left(x^+(t)\right) \leq V_\delta\left(x^+(\tau)\right) \cdot \exp\left\{-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)\right\}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\overline{\varepsilon}}{1+\delta} = \text{const} > 0\,.$$

Із останньої нерівності з урахуванням (5.15) дістанемо:

$$\left[\left(x_1^+(t)\right)^2 + \left(x_2^+(t)\right)^2\right] = \frac{V_\delta\left(x^+(t)\right) - V_0\left(x^+(t)\right)}{\delta} \leq$$

$$\leq \frac{V_\delta\left(x^+(t)\right)}{\delta} \leq \frac{1}{\delta} V_\delta\left(x^+(\tau)\right) \cdot \exp\left\{-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1+\delta}{\delta} \cdot \left[\left(x_1^+(\tau)\right)^2 + \left(x_2^+(\tau)\right)^2\right] \exp\left\{-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)\right\} \qquad \forall t, \tau \in R, \tau \leq t\,.$$

Це означає, що розв'язки $x = x^+(t)$ системи (5.5) з початковою умовою (5.14) прямують до нуля при $t \to +\infty$.

Аналогічно доводиться, що рівняння (5.2) має єдиний розв'язок $y = y^*(t)$, для якого виконується друга з нерівностей (5.4).

Висновки. У заданій постановці задачі визначено умови, за яких функціонал мінімізується, знайдено відповідні оптимізаційні керування, наведено ілюстративний приклад. Запропоновано метод знаходження оптимальних розв'язків і відповідного керування в нестаціонарному випадку. Тобто, коли коефіцієнти у правій частині рівняння залежать від часу.

Пропоновану математичну модель і метод її дослідження можна включити до змісту дисциплін на теми математичного моделювання, теорії керування для магістрів математичних спеціальностей університетів.

Зазначимо також, що при розв'язуванні подібних задач доводиться мати справу з рівнянням Ріккаті. Знаходження його розв'язків — завдання складне саме по собі, розв'язати яке вдається далеко не завжди. Тому перспективними є пошуки в напрямі знаходження та дослідження розв'язків цього класу рівнянь. Зокрема, у межах статті вивчено питання існування обмежених розв'язків рівняння Ріккаті.

ДЖЕРЕЛА

1. Астаф'єва М.М. Задача мінімізації функціонала в теорії керування. *Фізико-математична освіта:* наук. журнал. 2017. Вип. 4 (14). С. 143–148.

2. Митропольський Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. К.: Наук. думка, 1990. 270 с.

3. Миненко А.С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца. *Український мат. журн.* 2006. Т. 58, № 10. С. 1385–1394.

4. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. К.: ТВіМС, 2004. 384 с.

5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1983. 393 с.

6. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Москва: Наука, 1987. 302 с.

7. Tadeusz Kaczorek. Teoria sterowania i systemów. Warszawa: PWN, 1999. 801 с.

8. Zdzisław Wyderka. Teoria sterowania optymalnego: (skrypt przeznaczony dla studentów IV i V roku matematyki, nr. 397). Katowice: Uniwersytet Śląski, 1987.