

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ БОРИСА ГРІНЧЕНКА
Факультет інформаційних технологій та управління
Кафедра комп'ютерних наук і математики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з науково-методичної
та навчальної роботи
О.Б. Жильцов
«21» 2021 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ 2

для студентів

спеціальності 111 Математика

освітнього рівня першого (бакалаврського)

освітньої програми 111.00.01 Математика


Київ – 2021



Розробник: Астаф'єва М. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук і математики

Викладачі: Астаф'єва М. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук і математики

**Робочу програму розглянуто і затверджено на засіданні кафедри
комп'ютерних наук і математики**
Протокол від 26.08.2021 року, №10
Завідувач кафедри

 О. С. Литвин

**Робочу програму погоджено з гарантом освітньої програми 111.00.01
Математика**

26.08.2021 р.

Керівник освітньої програми

 М. М. Астаф'єва

Робочу програму перевірено

___ . ___ . 20___ р.

Заступник декана

 І. Ю. Мельник

Пролонговано:

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), «___» 20__ р., протокол № _____

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), «___» 20__ р., протокол № _____

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), «___» 20__ р., протокол № _____

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), «___» 20__ р., протокол № _____

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання		
	денна		заочна
Вид дисципліни	обов'язкова		
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська		
Загальний обсяг кредитів / годин	11/330		
Курс	2		–
Семестр	3	4	–
Кількість змістових модулів з розподілом:	3	2	–
Обсяг кредитів	5	6	–
Обсяг годин, в тому числі:	150	180	–
Аудиторні	70	84	–
Модульний контроль	10	12	–
Семестровий контроль	–	30	–
Самостійна робота	70	54	–
Форма семестрового контролю	залік	екзамен	–

Передумови вивчення: математичний аналіз 1, аналітична геометрія.

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Обов'язкова навчальна дисципліна «Математичний аналіз 2» циклу формування фахових компетентностей є важливою складовою професійної підготовки здобувачів вищої освіти за спеціальністю 111 «Математика» першого (бакалаврського) освітнього рівня, продовжує навчальну дисципліну «Математичний аналіз 1» і є базовою для вивчення фахових дисциплін: диференціальні рівняння та динамічні системи, диференціальна геометрія і топологія, комплексний аналіз та операційне числення, функціональний аналіз та варіаційне числення, рівняння математичної фізики.

Метою навчальної дисципліни є надання студентам системних знань з основ класичного аналізу дійсних функцій багатьох змінних.

Головними завданнями курсу є домогтися, щоб студенти оволоділи класичними методами математичного аналізу, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичного аналізу функції багатьох змінних в різноманітних задачах математики й механіки, їх використання в подальших курсах з математики та механіки, сприяти розвитку логічного та аналітичного

мислення студентів, дослідницьких умінь, формувати в них такі загальні та спеціальні компетентності¹:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК-1);
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях (ЗК-2);
- знання й розуміння предметної області та професійної діяльності (ЗК-3);
- здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово (ЗК-4);
- здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями (ЗК-7);
- здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел (ЗК-8);
- здатність приймати обґрунтовані рішення (ЗК-9);
- здатність працювати в команді (ЗК-10);
- здатність працювати автономно (ЗК-12);
- визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК-13);
- здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання (СК-1);
- здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі (СК-2);
- здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок (СК-3);
- здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих (СК-4);
- здатність до кількісного мислення (СК-5);
- здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем (СК-6);
- здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів (СК-8);
- здатність застосовувати математичні факти, теореми, методи й алгоритми, пакети програмного забезпечення до розв'язування прикладних задач із різних сфер життєдіяльності людини й суспільства (СК-11).

З метою формування практичних умінь і навичок комплексного використання знань з різних тем навчальної дисципліни й суміжних дисциплін та застосування методів математичного аналізу до розв'язування прикладних задач з різних галузей, в тому числі й нематематичних, практичні заняття в обсязі 8 годин (4

¹ Відповідно до нової редакції Освітньої програми 111.00.01 Математика першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, затвердженої Вченою радою Університету 27.08.2020 р., протокол №7, і введеною в дію з 01.09.2020 р. (наказ від 27.08.2020 р., № 434)

години – у третьому семестрі і 4 години – в четвертому семестрі) проводяться у формі **лабораторних робіт в Центрі живої математики** (див. наступну таблицю).

Тематика лабораторних занять

Тема заняття	Дата проведення	Форма проведення	Результати
Оптимізаційні задачі практичного змісту	15-й тиждень третього семестру	лабораторна робота (4 год.)	Компетентності: ЗК-1–3, 8, 10, 12; СК-1, 2,6, 8, 11. Практичні уміння: - уміння використовувати апарат диференціального числення функції багатьох змінних до розв'язування задач на найбільше та найменше значення та умовний екстремум
Застосування методів інтегрального числення багатьох змінних до розв'язування прикладних задач	14-й тиждень четвертого семестру	лабораторна робота (4 год.)	Компетентності: ЗК-1–3, 8, 10, 12; СК-1, 2,6, 8, 11, 12.

3. Результати навчання за дисципліною

Результати навчання. За підсумками вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз 2» студент має **оволодіти**:

- знаннями про метричні простори, зокрема, простір R^n , збіжність послідовності точок метричного простору, повний метричний простір, відкриті та замкнені множини, компакт, функцію багатьох змінних, її границю й неперервність, диференціальне числення функції багатьох змінних, кратні та криволінійні інтеграли, їх застосування; поняттям про ортогональну систему функцій, загальний ряд Фур'є та ряд Фур'є за тригонометричною системою функцій;

- уміннями доводити збіжність (розбіжність), знаходити границі послідовності точок простору R^n , границі функцій багатьох змінних, досліджувати функцію на неперервність, знаходити і зображати область визначення функції двох змінних, лінії рівня, розв'язувати задачі диференціального числення функції багатьох змінних та застосовувати апарат диференціального числення до практичних задач (наближені обчислення, дослідження властивостей функцій, дослідження на екстремум, умовний екстремум, знаходження найбільших та найменших значень функції), обчислювати подвійні, потрійні, криволінійні та (у найпростіших

випадках) поверхневі інтеграли, застосовувати інтеграли в задачах геометрії та фізики, користуватися формулами Гріна, Остроградського-Гаусса, Стокса, обчислювати градієнт, потік векторного поля, дивергенцію, циркуляцію і ротор, знаходити розвинення функції в ряд Фур'є за тригонометричною системою;

- здатністю використовувати раціональні способи пошуку та використання інформації, включаючи засоби електронних інформаційних мереж, використовувати інформаційні ресурси, у тому числі електронні, для побудови і розв'язання математичних моделей.

Таким чином вивчення дисципліни «Математичний аналіз 2», разом з іншими математичними дисциплінами освітньої програми, забезпечує досягнення студентами таких програмних **результатів навчання**:

- знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці (PH-1);

- знати принципи *modus ponens* (правило виведення логічних висловлювань) та *modus tollens* (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень (PH-3);

- розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми (PH-4);

- пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефакхівців у галузі математики (PH-7);

- здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською мовою та однією з іноземних мов (PH-8);

- розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями (PH-10);

- розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей (PH-11);

- знати теоретичні основи і застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних (PH-13);

- уміти формалізувати задачі певної предметної галузі, формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод та алгоритм вирішення (PH-21).

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів, тем		Усього	Розподіл годин між видами робіт		
			Аудиторна		Самостійна роб.
			Лекцій	Практичних/ лабораторних	
<i>1</i>		<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
Семестр 3					
ЗМ 1. Ряди Фур'є					
Тема 1.	Функціональні ряди. Степеневі ряди (повторення)	8	0	4	4
Тема 2.	Ряди Фур'є	24	6	6	12
Модульний контроль		3			
<i>Разом</i>		35	6	10	16
ЗМ 2. Границя і неперервність функції багатьох змінних					
Тема 3.	Метричні простори. Простір R^n . Збіжні послідовності у метричних просторах. Збіжність в R^n	16	4	4	8
Тема 4.	Типи множин і точок метричного простору	8	2	2	4
Тема 5.	Границя і неперервність функції багатьох змінних	16	4	4	8
Модульний контроль		3			
<i>Разом</i>		43	10	10	20
ЗМ 3. Диференціальне числення функції багатьох змінних					
Тема 6.	Частинні похідні функції багатьох змінних. Диференційовність і повний диференціал функції багатьох змінних. Диференціювання складної функції. Неявні функції.	24	6	6	12
Тема 7.	Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора	16	4	4	8
Тема 8.	Екстремуми функції двох змінних. Умовний екстремум	28	4	6/4*	14
Модульний контроль		4			
<i>Разом</i>		72	14	20	34
<i>Разом за Семестр 3</i>		150	30	40	70

Семестр 4					
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>
ЗМ 4. Кратні інтеграли					
Тема 9.	Подвійний інтеграл та його застосування	28	10	8	10
Тема 10.	Потрійний інтеграл та його застосування	30	10	10	10
<i>1</i>		<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
Модульний контроль		6			
<i>Разом</i>		64	20	18	20
ЗМ 5. Криволінійні та поверхневі інтеграли					
Тема 11.	Криволінійні інтеграли першого та другого роду. Зв'язок із подвійним інтегралом	32	10	8	14
Тема 12.	Задачі на застосування кратних та криволінійних інтегралів	26	2	6/4*	12
Тема 13.	Поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля	22	10	6	8
Модульний контроль		6			
<i>Разом</i>		86	22	24	34
Семестровий контроль		30			
<i>Разом за Семестр 4</i>		180	42	42	54
<i>Усього за навчальним планом</i>		330	72	82	124

* По 4 години практичних занять у кожному семестрі проводяться у формі лабораторних робіт у Центрі живої математики.

5. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Ряди Фур'є

Тема 1. Функціональні ряди. Степеневі ряди (повторення)

Поняття функціонального ряду, точок та множини збіжності / розбіжності, суми ряду; поняття абсолютної та рівномірної збіжності. Ознака Вейерштрасса. Степеневі ряди. Ряд Тейлора. Застосування степеневих рядів.

Тема 2. Ряди Фур'є

Ортогональна система функцій. Ряд Фур'є для ортогональної системи функцій. Середнє квадратичне відхилення. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. Достатня умова подання функції рядом Фур'є. Ряд Фур'є за тригонометричною системою (тригонометричний ряд Фур'є). Ряд Фур'є для парних і непарних функцій, для $2l$ -періодичних функцій, для функцій, заданих на проміжку $[0, l]$.

Змістовий модуль 2. Границя і неперервність функції багатьох змінних

Тема 3. Метричні простори. Простір R^n . Збіжні послідовності у метричних просторах. Збіжність в R^n

Поняття метричного простору, метрики, аксіом метрики. Приклади метричних просторів. Послідовність точок метричного простору. Поняття обмеженої послідовності. Збіжні послідовності: означення, властивості. Збіжність у просторі R^n . Фундаментальні послідовності, зв'язок зі збіжністю. Повні метричні простори.

Тема 4. Типи множин і точок метричного простору

Поняття кулі, сфери метричного простору, околу, проколеного околу точки, внутрішньої, межової, граничної, ізольованої точок множини. Відкриті і замкнені множини, їх властивості. Поняття компакта. Компакт як повний метричний простір. Поняття зв'язної множини та області.

Тема 5. Границя і неперервність функції багатьох змінних

Поняття функції багатьох змінних. Графік функції двох змінних. Лінії та поверхні рівня. Границя функції багатьох змінних, повторні границі. Неперервність функції багатьох змінних. Властивості неперервних в точці функцій. Властивості функцій, неперервних на компактi.

Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функції багатьох змінних

Тема 6. Частинні похідні функції багатьох змінних. Диференційовність і повний диференціал функції багатьох змінних. Диференціювання складної функції. Неявні функції

Частинні похідні функції багатьох змінних. Поняття диференційованості, необхідні умови диференційовності. Достатня умова диференційовності. Повний диференціал функції, його застосування. Диференціювання складної функції. Інваріантність форми диференціала.

Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.

Неявні функції. Теореми про існування і єдність неявної функції однієї та двох змінних. Частинні похідні в задачах геометрії.

Тема 7. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Умова рівності мішаних частинних похідних. Формула Тейлора для функції двох змінних.

Тема 8. Екстремуми функції двох змінних. Умовний екстремум

Локальні та глобальні екстремуми функції двох змінних: необхідні та достатні умови. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.

Змістовий модуль 4. Кратні інтеграли

Тема 9. Подвійний інтеграл та його застосування

Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла. Означення подвійного інтеграла, умови існування, властивості, геометричний та фізичний зміст. Поняття про повторний інтеграл. Обчислення подвійного інтеграла по прямокутній та криволінійній областях. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Перехід до полярних координат. Застосування подвійного інтеграла в геометрії та фізиці.

Тема 10. Потрійний інтеграл та його застосування

Задачі, що приводять до поняття потрійного інтеграла. Означення потрійного інтеграла, умови існування, властивості. Обчислення потрійного інтеграла по прямокутному паралелепіпеду та області, яка не є прямокутним паралелепіпедом. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Перехід до циліндричних та сферичних координат. Застосування потрійного інтеграла в геометрії та фізиці.

Змістовий модуль 5. Криволінійні та поверхневі інтеграли

Теми 11, 12. Криволінійні інтеграли першого та другого роду. Зв'язок із подвійним інтегралом. Задачі на застосування кратних та криволінійних інтегралів

Задача про масу кривої. Означення криволінійного інтеграла першого роду, його властивості. Диференціал довжини дуги. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду.

Задача про роботу змінної сили на криволінійному шляху. Означення криволінійного інтеграла другого роду, умови його існування, властивості, обчислення. Зв'язок криволінійного інтеграла другого роду по замкненій кривій із подвійним інтегралом, по області, цією кривою обмеженої (формула Гріна). Незалежність криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.

Застосування криволінійних інтегралів до задач геометрії і фізики.

Тема 13. Поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля

Поверхневі інтеграли першого та другого роду: означення, умови існування, обчислення. Формула Остроградського-Гаусса. Формула Стокса.

Поняття векторного поля. Приклади векторних полів. Векторні лінії. Потік векторного поля через поверхню. Дивергенція, її властивості. Соленоїдалне векторне поле. Циркуляція і ротор. Потенціальне векторне поле. Гармонічне векторне поле. Властивості ротора.

Векторні форми формул Остроградського-Гаусса та Стокса.

6. Контроль навчальних досягнень

6.1. Система оцінювання навчальних досягнень студентів

Третій семестр

Вид діяльності студента	Максимальна к-сть балів за одиницю	ЗМ 1		ЗМ 2		ЗМ 3	
		Кількість одиниць	Максимальна кількість балів	Кількість одиниць	Максимальна кількість балів	Кількість одиниць	Максимальна кількість балів
Відвідування лекцій	1	3	3	5	5	7	7
Відвідування практичних занять	1	5	5	5	5	10	10
Робота на практичному занятті	10	1*	10	1*	10	1*	10
Практичне заняття у формі лабораторної роботи (в тому числі допуск, виконання, захист)	10	-	-	-	-	2	20
Домашня розрахунково-графічна робота (ІНДЗ)	30	-	-	-	-	1	30
Виконання модульної роботи	25	1	25	1	25	1	25
Колоквіум	30	-	-	1	30	-	-
Разом		-	43	-	75		102
Максимальна кількість балів		220					
Розрахунок коефіцієнта: $100:220=0,455$		$220 \times 0,455 = 100$ балів					

* На практичному занятті оцінюється усна або / та письмова відповідь, ураховується також виконання домашнього завдання. За кожний змістовий модуль студент може отримати максимально 10 балів і це число балів є середнім арифметичним (округленим до цілого) балів, отриманих на тих практичних заняттях даного змістового модуля, де він був опитаний і оцінений. Якщо цей середній арифметичний показник менший, ніж 6 балів, студент має відповідні теми модуля опрацювати і в індивідуальному порядку здати викладачу; іншими видами робіт бали не компенсуються.

Четвертий семестр

Вид діяльності студента	Максимальна к-сть балів за одиницю	ЗМ 4		ЗМ 5	
		Кількість одиниць	Максимальна кількість балів	Кількість одиниць	Максимальна кількість балів
Відвідування лекцій	1	10	10	11	11
Відвідування практичних занять	1	9	9	12	12
Робота на практичному занятті	10	1*	10	1*	10
Практичне заняття у формі лабораторної роботи (в тому числі допуск, виконання, захист)	10	2	20	-	-
Домашня розрахунково-графічна робота (ІНДЗ)	30	-	-	1	30
Виконання модульної роботи	25	1	25	1	25
Разом		-	74	-	88
Максимальна кількість балів		162			
Розрахунок коефіцієнта: $60:162=0,37$		$162 \times 0,37 + 40 = 100$ балів			

* На практичному занятті оцінюється усна або / та письмова відповідь, ураховується також виконання домашнього завдання. За кожний змістовий модуль студент може отримати максимально 10 балів і це число балів є середнім арифметичним (округленим до цілого) балів, отриманих на тих практичних заняттях даного змістового модуля, де він був опитаний і оцінений. Якщо цей середній арифметичний показник менший, ніж 6 балів, студент має відповідні теми модуля опрацювати і в індивідуальному порядку здати викладачу; іншими видами робіт бали не компенсуються.

6.2. Завдання для самостійної роботи та критерії її оцінювання

Завдання для самостійної роботи в позааудиторний час даються студентам на кожному практичному занятті і складаються з двох частин: теоретична підготовка та розв'язування задач.

Теоретична підготовка передбачає опрацювання конспекту лекцій та рекомендованої лектором літератури, унаслідок чого студент має усвідомити, можливо, з'ясувати геометричний (фізичний, економічний тощо) зміст, і запам'ятати основні поняття, факти та твердження, навчитися доводити ті факти (твердження), доведення яких є обов'язковим, самостійно відтворити наведені розв'язання задач, виконати (можливі) інші рекомендації та завдання лектора щодо опрацювання теоретичного матеріалу (наприклад, самостійно за підручником опрацювати певний матеріал і зробити конспект; повторити за шкільний курс математики елементарні функції тощо).

Пропоновані на домашнє завдання задачі і вправи призначені для закріплення набутих на практичному занятті з даної теми умінь і навичок. При розв'язуванні задач і вправ можна користуватися друкованими посібниками, матеріалами лекції, попереднього практичного заняття, обговорювати розв'язання з одногрупниками, а, у разі необхідності, звернутися за консультацією до викладача.

Виконання домашнього завдання, як правило, окремо не оцінюється, а перевіряється на черговому практичному занятті і оцінка за його виконання може бути врахована при виставленні оцінки за роботу на практичному занятті.

Завдання позааудиторних **розрахунково-графічних робіт** (по одній у кожному семестрі) є індивідуалізованими; їх виконання оцінюється 30 балами (максимальна кількість балів за кожну задачу вказана у завданні). Завдання РГР видає студентам викладач на першому в семестрі практичному занятті. За умови отримання менше, ніж 18 балів, розрахунково-графічна робота має бути виконана повторно за іншими завданнями.

У третьому семестрі передбачений **колоквіум** за теоретичним матеріалом перших двох змістових модулів. На колоквіумі студент має продемонструвати знання й розуміння понять, фактів та умінь доводити передбачені програмою теореми. Максимально можлива кількість балів за відповідь на колоквіумі – 30: знання понять (уміння сформулювати означення, розуміння змісту поняття) – 10 балів; знання фактів (уміння формулювати теореми, записати формули; здатність пояснити їх суть: дати геометричну інтерпретацію, навести контрприклад тощо) – 10 балів; умінь довести запропоновану теорему – 10 балів. За умови отримання менше, ніж 18 балів, колоквіум має бути складений повторно.

Примірні варіанти завдань розрахунково-графічних робіт

Третій семестр

1. (2 бали) Довести, що множина точок $X = (x_1, x_2)$, тобто множина упорядкованих пар дійсних чисел є метричним простором, якщо метрику увести за правилом:

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Як позначається і називається цей метричний простір?

2. (1 бал) Знайти і зобразити область визначення функції $z = \ln(y - 2x^2)$.

3. (1 бал) Знайти і зобразити лінії рівня поверхні $z = x^2 + y^2$.

4. (1 бал) Знайти границю послідовності точок (x_n, y_n) , де $x_n = \frac{(3n+1)(2-5n)}{n^2}$,

$$y_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+1}.$$

5. (1 бал) Охарактеризувати множину точок, знайдену в п.2, а саме, чи є ця множина: а) відкритою; б) замкненою; в) обмеженою; г) зв'язною?

6. (2 бали) Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$z = \frac{x}{y} + \cos \frac{y}{x} \text{ у точці } \left(2; \pi; \frac{2}{\pi} \right).$$

7. (1 бал) Знайти частинні похідні складної функції

$$z = 3x^2y - 5xy^2, \text{ де } x = u + \cos v; y = u^2 \sin v.$$

8. (1 бал) Знайти кут між градієнтами функцій $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ та $f_2(x, y) = 2xy$ в точці $M_0(-1, 2)$.

9. (1 бал) Користуючись достатньою умовою диференційовності функції, довести, що функція $z = x^2 - 4y + xy^2$ диференційована в кожній точці простору R^2 .

10. (2 бали) Обчислити наближено $\sqrt{2,98^2 + 4,04^2}$.

11. (1 бал) Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = 3x^3 - y^3 + 2x^2y + y^2 - 5$.

12. (2 бали) Знайти $d^2z(1; -1)$, де $z = 3x^3 - y^3 + 2x^2y + y^2 - 5$.

13. (3 бали) Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

14. (3 бали) Знайти найбільше і найменше значення функції z в замкненій області \bar{D} .

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \bar{D}: x = 3, y = 0, y = x + 1.$$

15. (4 бали) Дослідити на умовний екстремум функції $z = xy$ при умові $2x + 3y - 5 = 0$.

16. (4 бали) Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію $y = x + 1$ на проміжку $[0; \pi]$.

Четвертий семестр

1. (3 бали) Зобразити область інтегрування та змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

2. (3 бали) Обчислити подвійний інтеграл по області D , обмеженій вказаними лініями:

$$\iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy; \quad D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$$

3. (3 бали) Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x.$$

4. (3 бали) Обчислити криволінійний інтеграл:

а) $\int_{AB} \frac{y ds}{\sqrt{x}}$, AB – дуга кривої $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ між точками $A(3; 2\sqrt{3})$, $B\left(8; \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$;

б) $\int_C y dx - (y + x^2) dy$, C – дуга кривої $y = 2x - x^2$, що лежить над віссю Ox .

5. (3 бали) Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж перерізу гіперболоїда $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$ площиною $y = x$ від точки $A(1; 1; 0)$ до точки $B(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1)$.

6. (3 бали) Знайти циркуляцію градієнта скалярного поля $u = xy$ по відрітку прямої, яка з'єднує точки $A(1; 1)$ та $B(2; 2)$.

7. (3 бали) Знайти ротор векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{i} - 2xz\vec{j} - x^2\vec{k}$.

8. (3 бали) Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{f}(x, y) = 4xy\vec{i} - y^2\vec{j}$ у довільній точці. Чи є це поле соленоїдним?

9. (3 бали) Знайти площу поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вирізаної поверхнею $x^2 + y^2 = ax$.

10. (3 бали) Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Теми / питання, що виносяться на Колоквіум (третій семестр)

1. Поняття метричного простору, метрики, аксіом метрики. Приклади метричних просторів.

2. Послідовність точок метричного простору. Обмежені, збіжні послідовності.

3. Збіжність у просторі R^n .

4. Фундаментальні послідовності, зв'язок зі збіжністю. Повні метричні простори.

5. Поняття кулі, сфери метричного простору, околу, проколеного околу точки, внутрішньої, межової, граничної, ізольованої точок множини.

6. Відкриті і замкнені множини, їх властивості. Поняття компакта. Компакт як повний метричний простір. Поняття зв'язної множини та області.

7. Функція багатьох змінних: основні поняття. Графік функції двох змінних. Лінії та поверхні рівня.

8. Границя функції багатьох змінних, повторні границі.
9. Неперервність функції багатьох змінних. Властивості неперервних в точці функцій.
10. Властивості функцій, неперервних на компактi.
11. Тригонометричний ряд Фур'є. Достатня умова подання функції рядом Фур'є. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій, для $2l$ -періодичних функцій, для функцій, заданих на проміжку $[0, l]$.

6.3. Форми проведення модульного контролю та критерії оцінювання

Модульний контроль проводиться у формі контрольної роботи та / або тестування в системі Moodle і оцінюється 25 балами. Кількість балів за кожну задачу (вправу, питання) вказана безпосередньо у завданні. За умови отримання менше, ніж 15 балів, контрольна робота виконується повторно.

6.4. Форми проведення семестрового контролю та критерії оцінювання

Формою підсумкового контролю у третьому семестрі є залік. Залік не передбачає окремого контрольного заходу і виставляється на останньому практичному занятті за підсумками поточного контролю при умові, що студент виконав усі передбачені види робіт (невиконання будь-якого виду робіт або оцінка його меншою від допустимої мінімальної кількості балів іншим видом роботи не компенсується).

Формою підсумкового контролю у четвертому семестрі є екзамен, який проводиться у письмовій формі. Екзаменаційна оцінка в балах (максимально 100 балів) є сумою результату поточного контролю за семестр (60 балів) та відповіді на екзамені (40 балів). Екзаменаційний білет містить 4 питання (завдання). Теоретичних питань у білеті два, одне із яких передбачає з'ясування змісту певного поняття, а друге – доведення певного факту. Практичні завдання – задачі (вправи), по одній із кожного з двох змістових модулів. Відповідь на кожне із запитань / завдань білета яких оцінюється за 10-бальною шкалою (див. нижче).

10-бальна шкала оцінювання

Кількість балів	Значення оцінки (характеристика відповіді)
10	Відмінний рівень знань (умінь), відповідь повна, вичерпна й достатньо обґрунтована з, можливими, незначними недоліками
9	Достатньо високий рівень знань (умінь), відповідь без суттєвих (грубих) помилок, але не містить повних обґрунтувань

8	В цілому добрий рівень знань (умінь), відповідь містить незначну кількість несуттєвих помилок
7	Посередній рівень знань (умінь), відповідь містить багато недоліків та / або незначну кількість помилок
5–6	Мінімально допустимий рівень знань (умінь), що характеризується недостатньою обґрунтованістю, фрагментарністю; відповідь неповна, містить недоліки та помилки
3–4	Незадовільний рівень знань, що виявляється у формальному запам'ятанні деяких понять і фактів, без належного їх розуміння, нездатності застосувати такі знання при розв'язанні задач.
0–2	Незадовільний рівень знань (умінь), що виявляється у неспроможності відтворити означення понять та формулювання теорем, невмінні розв'язувати задачі або відповідь взагалі відсутня.

6.5. Орієнтовний перелік теоретичних запитань / завдань для семестрового контролю (екзамену)

1. Які задачі приводять до поняття подвійного інтеграла? Дати означення подвійного інтеграла.

2. Сформулювати властивості подвійних інтегралів. Довести теорему про середнє значення та ще одну властивість на власний вибір.

3. Записати та обґрунтувати формулу обчислення подвійного інтеграла по прямокутній області.

4. Зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку криволінійної області: сформулювати та довести відповідні твердження; навести приклади.

5. Як виконують заміну змінних у подвійному інтегралі? Пояснити перехід до полярних координат; проілюструвати на прикладі.

6. Які геометричні задачі розв'язують за допомогою подвійного інтеграла?

7. Які задачі фізики розв'язують за допомогою подвійного інтеграла?

8. Навести задачу, що приводить до поняття потрійного інтеграла. Дати означення потрійного інтеграла.

9. Сформулювати властивості потрійних інтегралів. Довести дві з них на власний вибір.

10. Як обчислюють потрійний інтеграл по прямокутному паралелепіпеду? Відповідь обґрунтувати. Проілюструвати на прикладі.

11. Як обчислюють потрійний інтеграл по циліндричному тілу, що не є прямокутним паралелепіпедом?

12. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Як здійснюється перехід до циліндричних координат?

13. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Як здійснюється перехід до сферичних координат?
14. Які геометричні задачі розв'язують за допомогою потрійного інтеграла?
15. Які задачі фізики розв'язують за допомогою потрійного інтеграла?
16. Яка задача приводить до криволінійного інтеграла першого роду? Дати його означення.
17. Як обчислюють криволінійний інтеграл першого роду? Відповідь обґрунтувати. Навести приклади.
18. Сформулювати властивості криволінійного інтеграла першого роду. Довести дві з них на власний вибір.
19. Застосування криволінійних інтегралів першого роду в геометричних та фізичних задачах.
20. Який зв'язок між задачею про роботу змінної сили на криволінійному шляху і криволінійним інтегралом?
21. Дати означення криволінійного інтеграла другого роду. Сформулювати його властивості. Довести будь-які дві з них.
22. Як обчислюють криволінійний інтеграл другого роду? Відповідь обґрунтувати. Проілюструвати на прикладах.
23. Довести формулу Гріна. Яке її застосування?
24. Сформулювати і довести умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми кривої інтегрування.
25. Поняття поверхневого інтеграла першого роду. Його існування та обчислення.
26. Поняття про орієнтовні поверхні та поверхневий інтеграл другого роду.
27. Як обчислюють поверхневий інтеграл другого роду?
28. Який зв'язок між потрійним інтегралом по замкненій просторовій області і поверхневим інтегралом по зовнішній стороні поверхні, яка цю область обмежує (формула Остроградського–Гаусса)?
29. Який зв'язок між поверхневим та криволінійним інтегралом (формула Стокса)?
30. Що таке потік векторного поля через поверхню? Як він обчислюється?
31. Що таке дивергенція векторного поля? Як вона обчислюється?
32. Що таке циркуляція векторного поля? Як вона обчислюється? Яке поле називають потенціальним?
33. Що таке ротор векторного поля? Його властивості та обчислення.

Практичні завдання екзамену передбачають перевірку умінь:

- 1) з'ясувати, чи є метричним простором певна множина із введеною метрикою; знаходити границі точок простору \mathbb{R}^n ; знаходити і зображати область визначення та лінії рівня функції двох змінних, обчислювати границі функції двох

змінних, досліджувати їх на неперервність; знаходити частинні похідні першого та вищих порядків функції багатьох змінних, досліджувати диференційованість функції, знаходити диференціали першого та вищих порядків, диференціювати складну функцію; застосовувати диференціал до наближених обчислень; писати рівняння дотичних та нормалей до поверхні; досліджувати функцію двох змінних на екстремум та умовний екстремуми, знаходити найбільше та найменше значення функції двох змінних в заданій області, застосовувати диференціальне числення до розв'язування оптимізаційних задач;

2) обчислювати подвійні, потрійні, криволінійні та поверхневі інтеграли, використовувати формули Гріна, Остроградського–Гаусса, Стокса, застосовувати інтегральне числення до розв'язування задач геометрії та фізики; обчислювати потік векторного поля через поверхню, дивергенцію, циркуляцію та ротор.

6.6. Шкала відповідності оцінок

Рейтингова оцінка	Оцінка за стобальною шкалою	Значення оцінки
A	90 – 100 балів	Відмінно – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу з можливими незначними недоліками
B	82-89 балів	Дуже добре – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок
C	75-81 балів	Добре – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок
D	69-74 балів	Задовільно – посередній рівень знань (умінь) із значною кількістю недоліків, достатній для подальшого навчання або професійної діяльності
E	60-68 балів	Достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь)
FX	35-59 балів	Незадовільно з можливістю повторного складання – незадовільний рівень знань, з можливістю повторного перескладання за умови належного самостійного доопрацювання
F	1-34 балів	Незадовільно з обов'язковим повторним вивченням курсу – досить низький рівень знань (умінь), що вимагає повторного вивчення дисципліни

Увага! При виконанні усіх видів самостійних робіт і на контрольних заходах необхідно дотримуватися принципів академічної доброчесності. У разі виявлення фактів академічної недоброчесності виконана робота (частково чи повністю) не зараховується і студент зобов'язаний виконати та захистити / здати її повторно.

7. Навчально-методична карта дисципліни (семестр 3-й)

Всього: 150 год., з них лекції – 30 год., практичні заняття – 40 год., модульний контроль – 10 год., самостійна робота – 70 год., підсумковий контроль – залі

Змістові модулі	ЗМ 1. Ряди Фур'є		ЗМ 2. Границя і неперервність функції багатьох змінних			ЗМ 3. Диференціальне числення функції багатьох змінних		
	1	2	3	4	5	6	7	8
Лекції (номер, тема)		1, 2, 3. Ряди Фур'є	4,5. Метричні простори. Простір R^n . Збіжні послідовності у метричних просторах. Збіжність в R^n	6. Типи множин і точок метричного простору	7,8. Границя і неперервність функції багатьох змінних	9,10,11. Частинні похідні функції багатьох змінних. Диференційовність і повний диференціал функції багатьох змінних. Диференціювання складної функції.	12,13. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора	14,15. Екстремуми функції двох змінних. Умовний екстремум
Практичні заняття (номер, тема)	Функціональні ряди. Степеневі ряди (повторення)	3,4, 5. Ряди Фур'є	6,7. Метричні простори. Обчислення границь послідовностей точок простору R^n	8. Типи множин і точок метричного простору	9,10. Границя і неперервність функції багатьох змінних	11. Частинні похідні функції 12. Диференційовність функції і повний диференціал 13. Диференціювання складної функції. Неявні функції.	14,15. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора	16. Дослідження функції двох змінних на екстремум 17, 18. Умовний екстремум (метод множників Лагранжа). 19.20. Задачі на найбільше і найменше значення (лабораторна робота)
Поточний контроль (вид)	МК 1		МК 2			МК 3		
	-		Колоквіум			-		
	-		-			Розрахунково-графічна робота		
Підсумковий контроль	Залік							

Навчально-методична карта дисципліни (семестр 4-й)

Всього: 180 год., з них лекції – 42 год., практичні заняття – 42 год., модульний контроль – 12 год., самостійна робота – 54 год., підсумковий контроль – 30 год. (екзамен)

Змістові модулі	ЗМ 4. Кратні інтеграли						ЗМ 5. Криволінійні та поверхневі інтеграли							
Теми	9			10			11			12		13		
Лекції (номер, тема)	1, 2. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла. Означення подвійного інтеграла. Умови існування	3. Властивості та обчислення подвійного інтеграла	4. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Перехід до подвійних	5. Застосування подвійного інтеграла в геометрії та фізиці	6,7. Потрійний інтеграл: означення, умови існування, властивості, обчислення	8,9. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Циліндричні та сферичні	10. Застосування потрійного інтеграла в геометрії та фізиці	11. Криволінійний інтеграл першого роду: означення, умови існування, властивості, обчислення	12, 13. Криволінійний інтеграл другого роду: означ., механічний зміст, власт., обчислення	14, 15. Формула Гріна. Незалежність від форми шляху інтегрування	16. Огляд задач на застосування кратних та криволінійних інтегралів		17, 18, 19. Поняття про поверхневі інтеграли I та II родів. Їх обчислення. Формули О.-Г. та Стокса	20, 21. Елементи теорії поля
Практичні заняття (номер, тема)	1, Означення та властивості подвійного інтеграла. Повторні інтеграли, їх обчислення	2,3. Обчислення подвійних інтегралів, в т.ч. й за допомогою заміни змінних	4. Застосування подвійного інтеграла в геометрії та фізиці	5,6. Обчислення потрійних інтегралів зведенням до повторних	7. Перехід у потрійному інтегралі до циліндричних та сферичних координат	8,9. Застосування потрійного інтеграла в геометрії та фізиці	10. Властивості та обчислення криволінійного інтеграла першого роду	11, 12. Властивості та обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Задачі на застосування в фізиці	13. Застосування формули Гріна та умов незалежності інт. від форми шляху інтегрування	14, 15, 16. Розв'язування різних задач на застосування інтегралів	17, 18. Лабораторна робота		19, 20. Поверхневі інтеграли. Обчислення, деякі застосування	21. Елементи теорії поля
Поточний контроль (вид)	МК 1 (25 балів)						МК 2 (25 балів)							
Підсумковий контроль	-						Розрахунково-графічна робота (25 балів)							
	Екзамен													

8. Рекомендовані джерела

Основні

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 2. – К.: Вища шк., 1990.
2. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Книга 2. – К: Либідь, 2010. **(бібліотека)**
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. – М.: Наука, 1968.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука, 1971.
5. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч.: Навчальний посібник для студентів вузів / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник та ін. – К: Вища школа, 2003. – Ч. 2. **(бібліотека)**

Додаткові

6. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.
7. Дороговцев А.Я., Математичний аналіз, т.ІІ, Київ, Либідь, 1993.
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1969.
9. Задачник по курсу математического анализа. Ч. II / Под ред. Виленкина Н.Я. – М., 1971.

9. Додаткові ресурси

ЕНК «Математичний аналіз 2» (МАТ_2)

<https://elearning.kubg.edu.ua/course/view.php?id=15063>