Міністерство освіти і науки України
Київський університет імені Бориса Грінченка

О. Б. Жильцов

Теорія ймовірностей
та
математична статистика
у прикладах і задачах

Навчальний посібник
для студентів нематематичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Київ-2015

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.7 Я73
Ж72

Рекомендовано до друку
Вченою радою Київського університету імені Бориса Грінченка
(протокол № 2 від 27 лютого 2014 року)

Автор:
О.Б. Жильцов, проректор з науково-методичної та навчальної роботи Київського університету імені Бориса Грінченка, кандидат педагогічних наук, доцент.

Рецензенти:
Г.М. Торбін, завідувач кафедри математичного аналізу Національного педагогічного університету імені М. Драгоманова, доктор фізико-математичних наук, професор;
О.О. Юнькова, доцент кафедри економіко-математичного моделювання Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана, кандидат фізико-математичних наук;
О.Ю. Дюженкова, доцент кафедри вищої математики Національного університету біоресурсів і природокористування України, кандидат фізико-математичних наук.

Жильцов О.Б.
Ж72 Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.
ISBN 978-966-7548-99-5

Навчальний посібник призначений для навчання студентів нематематичних спеціальностей, а також для всіх, хто опановує цей матеріал самостійно, у тому числі і з метою проходження тестування, наприклад, GMAT.

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.7 Я73

ISBN 978-966-7548-99-5

Частина І
Випадкові події та їх ймовірності

Теорія ймовірностей вивчає математичні моделі реальних випадкових явищ (подій), які називають *ймовірнісними моделями*. Такі моделі дозволяють зрозуміти математичну сутність реальних випадкових подій та надають можливість прогнозувати перебіг досліджуваних випадкових подій. Як приклад можна привести зростання чи спадання курсів валют, темпів виробництва, попиту на товари та послуги, прогнозування результатів виборів, результатів спортивних змагань тощо.

Розділ 1. Випадкові події та операції над ними. Означення ймовірності

1.1. Випадкові події

Експериментом (або *випадковим експериментом*) називають певний комплекс умов, що забезпечують спостереження за певним реальним випадковим явищем (певною реальною випадковою подією).

Кожне окреме проведення експерименту (тобто забезпечення певних умов) називають *випробуванням*, а відповідний результат випробування називають *наслідком,* або *елементарним наслідком* або *елементарною подією*. Елементарну подію, як правило, позначають символом ω, або ω_i, або іншими символами.

Сукупність усіх елементарних подій, пов'язаних з конкретним експериментом, позначають Ω і називають *множиною* (або *простором*) *елементарних подій*.

Приклад 1. Проводиться експеримент: підкидається монета і фіксується грань, якою монета падає догори. Кожне окреме підкидання монети є випробуванням, а випадання «герба» або «номіналу» є можливими наслідками (елементарними подіями). Простір елементарних подій для даного експерименту має вигляд Ω = {«герб», «номінал»}. За іншою домовленістю можна вважати, що $\Omega = \{Ц, Г\}$ або $\Omega = \{0, 1\}$, де Ц та 0 означає випадання цифри-номіналу, а Г та 1 — випадання герба.

Кожну реальну випадкову подію, пов'язану з даним експериментом, ототожнюють з її математичною моделлю — певною сукупністю результатів цього експерименту. Такі моделі називають *подіями* (або *випадковими подіями*) і позначають великими латинськими літерами A, B, C,... Отже, кожна подія $A \subset \Omega$ є підмножиною простору Ω елементарних подій.

Кажуть, що *подія A відбулася* (не відбулася) в результаті випробування, якщо результатом цього випробування є наслідок $\omega \in A$ (наслідок $\omega \notin A$).

Дві події мають спеціальну назву: $A = \Omega$ *вірогідна* (або *достовірна*) подія, яка відбувається в результаті кожного випробування, пов'язаного з даним експериментом, та $B = \varnothing$ — *неможлива* подія, яка не відбувається в результаті кожного випробування, пов'язаного з даним експериментом.

Якщо $\omega \in A$, то кажуть, що *елементарна подія* ω *сприяє події* A. В іншому разі кажуть, що ω *не сприяє події* A.

Випадкові події словесно можна задати багатьма різними способами, але як підмножини простору Ω вони визначаються однозначно. Тому потрібно вміти порівнювати події за їх перебігом: відбулась подія чи ні.

Якщо подія A відбувається завжди, коли відбувається подія B, то кажуть, що *подія A спричинюється подією B* або *подія B спричинює подію A,* і пишуть $B \subset A$.

Події A і B називають *однаковими* або *рівними* і пишуть $A = B$, якщо кожна з них спричинює іншу з них.

Приклад 2. При підкиданні грального кубика простір елементарних подій може мати вигляд $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Розглянемо події A — «випадання парної кількості очок», B — «випадання не менше семи очок», C — «випадання не більше семи очок», D — «випадання одного з трьох чисел, добуток яких дорівнює 48».

Тоді $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \varnothing$ — неможлива подія, $C = \Omega$ — вірогідна подія, $D = \{2, 4, 6\}$. Таким чином $B \subset A = D \subset C = \Omega$.

Приклад 3. Монету підкидають двічі і фіксують результат кожного підкидання. Побудувати простір елементарних подій і з'ясувати, з яких елементарних подій складаються події: A — «принаймні один раз випав герб», B — «результат другого підкидання не такий, як результат першого підкидання», C — «герб випав один раз», D — «герб не випав жодного разу».

Які з подій A, B, C, D спричинюють інші? Чи є серед цих подій рівні (однакові)? Чи є серед подій такі, що не спричинюються іншими з даних подій?

Розв'язання. При двократному підкиданні монети можливі чотири елементарних наслідки: (a, a), (a, p), (p, a), (p, p), де a — випадання аверсу (випадання «герба»), p — випадання реверсу (випадання «номіналу»). Очевидно, що зазначені наслідки утворюють сукупність усіх можливих наслідків. Отже, множина

$$\Omega = \{(a, a), (a, p), (p, a), (p, p)\}$$

є простором елементарних подій даного експерименту.

Зрозуміло, що $A = \{(a, a);(a, p);(p, a)\}$, $B = \{(a, p);(p, a)\} = C$, $D = \{(p, p)\}$. Тому події B і C рівні, тобто спричинюють одна одну, і, окрім цього, обидві вони спричинюють подію A. Подія D не спричинюється жодною з даних подій.

1.2. Операції над подіями

Розглянемо події, що є підмножинами деякого простору Ω, пов'язаного з певним експериментом.

Сумою $A + B$ подій A і B називають таку подію, що відбувається лише і тільки лише за умови появи хоча б однієї з подій A або B. Суму $A + B$ позначають також $A \bigcup B$.

Сумою $\sum_i A_i$ подій $A_1, A_2, \ldots$ називають таку подію, поява якої рівносильна до появи принаймні однієї з подій A_i, $i = 1, 2, \ldots$. Суму $\sum_i A_i$

позначають також $\bigcup_i A_i$. У випадку, коли $i = 1, 2, \ldots, n$, суму подій A_i позначають також $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, або $\sum_{i=1}^{n} A_i$, або $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Якщо $i \in N$, суму подій A_i позначають $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ або $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Добутком $A \cdot B$ подій A і *B* називають таку подію, поява якої рівносильна до появи обох подій A і B. Добуток $A \cdot B$ позначають також $A \cap B$.

Події A і *B* називають *несумісними*, коли $A \cdot B = \varnothing$, тобто коли вони не можуть відбутися одночасно у будь-якому випробуванні, пов'язаному з даним експериментом. В іншому разі *події A* і *B* називаються *сумісними*.

Добутком $\prod_i A_i$ подій $A_1, A_2, \ldots$ називають таку подію, поява якої рівносильна до появи кожної з даних подій A_i, $i = 1, 2, \ldots$. Добуток $\prod_i A_i$ позначають також $\bigcap_i A_i$. У випадку коли $i = 1, 2, \ldots, n$, добуток подій A_i позначають $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$, або $\prod_{i=1}^{n} A_i$, або $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. А коли $i \in N$, добуток подій A_i позначають або $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, або $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Події A_i, $i = 1, 2, \ldots$ називають *попарно несумісними*, якщо будь-які дві з них A_k та A_j є несумісними, при $k \neq j$.

Різницею $A - B$ подій A і *B* називають таку подію, що відбувається лише і тільки лише за умови появи події A і не появи події B. Різницю $A - B$ позначають також $A \setminus B$.

Подію $\overline{A} = \Omega - A$ називають *протилежною до події A*. Оскільки $\overline{(\overline{A})} = A$, то події A і $\overline{A}$ називають *взаємно протилежними*.

Інколи для ілюстрації виконання операції над подіями використовують діаграми Ейлера-Венна.

Сукупність (*простір*) *S подій* завжди утворюють так, щоб ці події були підмножинами даного простору Ω елементарних подій, причому S обов'язково містить вірогідну подію Ω, а також означені вище суми, добутки та різниці подій, що входять до сукупності S. Для забезпечення таких умов достатньо задовольнити **основні властивості подій**:

1_S. Вірогідна подія Ω завжди є подією з S.
2_S. Якщо A — подія з S, то протилежна до неї подія $\overline{A}$ також належить до S.
3_S. Якщо A_i, $i = 1, 2, \ldots$, — події з S, то $\sum_i A_i$ також є подією з простору S.

Приклад 1. З ящику, що містить кульки білого та чорного кольору, навмання виймають одну кульку. Подія A = «вийнято кульку білого кольору», подія B = «вийнято кульку чорного кольору». Сумісні чи несумісні ці події? Утворити двома способами простір подій S, до якого входять події A і B.

Розв'язання. Події A і B несумісні, тому що поява події A виключає можливість появи події B, і навпаки. У даному випадку події A і B є взаємно протилежними:

$$A = \overline{B} = \Omega - B; \; B = \overline{A} = \Omega - A.$$

Якщо $S_1 = \{A, B, \varnothing, \Omega\}$, то S_1 задовольняє умови 1_S – 3_S, і тому S — найвужчий простір подій, що містить події A і B.

Якщо S_2 містить усілякі підмножини простору Ω елементарних подій, то це найширший простір подій, що містить події A і B.

Простори S_1 і S_2 можуть бути як рівними, так і не рівними залежно від простору Ω.

Приклад 2. Підкидають два гральних кубики. Нехай події A_i = «випаде i очок на першому кубику», i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, B_j = «випаде j очок на другому кубику», j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Виразити через A_i, B_j такі події:

а) сума очок на двох кубиках дорівнює п'яти;
б) випаде в сумі не менше десяти очок;
в) випаде в сумі не більше трьох очок.

Розв'язання. а) Нехай подія C_1 = «сума очок на двох кубиках дорівнює п'яти». Ця подія можлива тоді і лише тоді, коли на першому кубику випаде i очок, а на другому — j очок так, щоб $i + j = 5$, тобто $i = 1$, $j = 4$, або $i = 2$, $j = 3$, або $i = 3$, $j = 2$, або $i = 4$, $j = 1$. Отже,

$$C_1 = A_1 \cdot B_4 + A_2 \cdot B_3 + A_3 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_1.$$

б) Позначимо подію C_2 = «випаде в сумі не менше десяти очок». Подія C_2 відбудеться тоді і тільки тоді, коли на двох кубиках у сумі випаде або 10, або 11, або 12 очок, тобто $i = 4$, $j = 6$, або $i = 5$, $j = 5$, або $i = 5$, $j = 6$, або $i = 6$, $j = 4$, або $i = 6$, $j = 5$, або $i = 6$, $j = 6$. Тому

$$C_2 = A_4 \cdot B_6 + A_5 \cdot B_5 + A_5 \cdot B_6 + A_6 \cdot B_4 + A_6 \cdot B_5 + A_6 \cdot B_6.$$

в) Нехай подія C_3 = «випаде в сумі не більше трьох очок». Оскільки найменша кількість очок, яка може випасти на кожному кубику, дорівнює одиниці, то подія C_3 можлива лише тоді і тільки тоді, коли сума очок на двох кубиках дорівнюватиме або двом, або трьом. Тому

$$C_3 = A_1 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1.$$

Приклад 3. Два стрільці виконують по одному пострілу у мішень. Подія A = «у мішень влучив перший стрілець», подія B = «у мішень влучив другий стрілець». Виразити через A і B такі події: C = «два влучення в мішень»; D = «жодного влучення в мішень»; E = «хоча б одне влучення в мішень»; F = «лише одне влучення в мішень».

Розв'язання. Поява події C означає, що обидва стрільці влучать у мішень. Тому подія є добутком подій A і B. Отже,

$$C = A \cdot B.$$

Подія D полягає в тому, що в мішень не влучить жодний стрілець, тобто не влучить ні перший $(\overline{A})$, ні другий $(\overline{B})$. Тому

$$D = \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Подія E відбудеться тоді і тільки тоді, коли в мішені влучить хоча б один із стрільців. Це може бути, коли обидва стрільці влучать у мішень, або перший влучить, другий не влучить, або перший не влучить, а другий влучить. Тому

$$E = AB + \overline{A}B + A\overline{B},$$

тобто відбудеться принаймні одна з подій A або B. Отже,

$$E = A + B.$$

Подія F полягає в тому, що перший стрілець влучить у мішень, а другий не влучить, або другий влучить, а перший не влучить. Тому

$$F = A\overline{B} + \overline{A}B .$$

1.3. Статистична ймовірність

Розглянемо простір Ω елементарних подій, що відповідає певному експерименту, і подію $A \subset \Omega$. Нехай проведено n випробувань, пов'язаних з даним експериментом, в результаті яких подія A відбулася $m = m_n(A)$ разів. Тоді *відносною частотою* події A називають число $P_n^*(A) = \dfrac{m}{n}$.

Відносна частота — це *середня можливість появи події A у* кожному з n проведених випробувань. Якщо виявляється, що для події A відносна частота $P_n^*(A) = \dfrac{m_n(A)}{n}$ досить добре характеризує середню можливість появи події A з простору подій S у більшості інших серій випробувань, то тоді $P_n^*(A)$ називають *статистичними ймовірностями* подій $A \subset \Omega$ з простору подій S.

Статистичні ймовірності $P_n^*(A)$, $A \in S$, задовольняють такі **основні властивості**:

1$_p$. $P_n^*(A) \geq 0$ для будь-якої події $A \in S$.
2$_p$. $P_n^*\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P_n^*(A_i)$, коли події $A_i \in S$ попарно несумісні.
3$_p$. $P_n^*(\Omega) = 1$.

Ці властивості нагадують відомі властивості довжини, площі, об'єму, маси, які мають спільну назву — *міра*. Отже, *статистична ймовірність — це міра можливості появи події A у кожному випробуванні*.

Оскільки кожна подія $A \subset \Omega$ — це математична модель певної реальної випадкової події, пов'язаної з даним експериментом, то статистична ймовірність $P_n^*(A)$ — це математична модель можливості появи цієї реальної випадкової події в результаті випробування, коли забезпечені усі умови відповідного експерименту. Тому сукупність простору Ω елементарних подій, простору S подій та статистичних ймовірностей $P_n^*(A), A \in S$, називають *статистичною моделлю даного експерименту* (даного випадкового явища) і позначають (Ω, S, P_n^*).

Приклад 1. При перевірці готової продукції було виявлено 5 бракованих одиниць товару з 200 перевірених. Знайти відносну частоту бракованих одиниць товару.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що виявлено браковану одиницю товару. Тоді відносна частота події A

$$P_n^*(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{200} = 0{,}025 .$$

Приклад 2. Проведено 100 пострілів по мішені. Було виявлено, що відносна частота влучень дорівнює 0,85. Скільки пострілів були влучними?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що постріл був влучним. Тоді з формули для відносної частоти події A маємо, що кількість влучних пострілів

$$m = n \cdot P_n^*(A) = 100 \cdot 0{,}85 = 85 .$$

1.4. Означення ймовірності

Статистичні ймовірності надають лише один з багатьох способів прогнозування появи реальних випадкових подій. Спільним у всіх способів прогнозування є те, що кожній випадковій події $A \subset \Omega$ (з простору подій S) відповідає єдине число $P(A)$ — *ймовірність події A*. При цьому числа $P(A)$, $A \in S$, задовольняють **основні властивості ймовірності**:

1_p. $P(A) \geq 0$ (ймовірність будь-якої події невід'ємна).

2_p. $P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$, якщо події $A_i \in S$ попарно несумісні.

3_p. $P(\Omega) = 1$ (ймовірність вірогідної події дорівнює 1).

Сукупність простору Ω елементарних подій, простору S подій та ймовірностей $P(A)$, $A \in S$, називають *імовірнісною моделлю* або *ймовірнісним простором* даного експерименту (пов'язаного з певним реальним випадковим явищем) і позначають (Ω, S, P).

Наприклад, може статися, що статистичні ймовірності дозволять досить добре прогнозувати появу реальних подій після їх певного корегування: одні статистичні ймовірності необхідно трохи збільшити, інші — зменшити, треті — залишити без змін.

Зокрема, в результаті такого коригування у випадку скінченого простору елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ може виявитися, що кожній одноелементній події $\{\omega_i\}$ відповідає одна й та сама ймовірність $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В такому разі кажуть, що *наслідки* ω_i відповідного експерименту є *рівноможливими* (рівноймовірними), і тоді так звану класичну ймовірність $P(A)$ будь-якої події A обчислюють за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

де m — кількість елементарних подій простору Ω, що сприяють події A, а n — кількість елементарних подій простору Ω. *Спосіб обчислення ймовірностей* за формулою (1) часто називають *класичним*. Цей спосіб є коректним лише тоді, коли є підстави вважати рівноможливими елементарні події, пов'язані з даним експериментом.

З основних властивостей імовірності 1_p–3_p випливає багато інших властивостей.

Приклад 1. 1. Оскільки $A + \bar{A} = \Omega$ і події A та $\bar{A}$ несумісні, то за властивістю 2_p і 3_p маємо $1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Отже, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Зокрема, $P(\varnothing) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

2. Якщо $B \subset A$, то $A - B = C$ і $A = B + C$, причому події B і $C = A - B$ несумісні. Тому за властивістю 2_p маємо $P(A) = P(B) + P(C) = P(B) + P(A - B)$, тобто $P(A - B) = P(A) - P(B)$, причому $P(B) \le P(A)$. Зокрема, для будь-якої події A маємо $\varnothing \subset A \subset \Omega$. Отже, $P(\varnothing) \le P(A) \le P(\Omega)$, тобто $0 \le P(A) \le 1$.

Приклад 2. В урні міститься 5 білих, 3 чорних та 4 червоних кульки. Навмання виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята кулька є червоною.

Розв'язання. Нехай подія A = «вийнята з урни червона кулька». Загальна кількість кульок в урні $5 + 3 + 4 = 12$. Вважатимемо, що вийняти будь-яку кульку можна з однаковою ймовірністю. Тому в експерименті задачі є 12 рівноможливих наслідків, тобто $n = 12$. Кількість елементарних подій, що сприяють події A, визначається кількістю червоних кульок в урні, тобто $m = 4$. Отже, за формулою (1)

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 3. Знайти ймовірність того, що вибране випадковим чином двозначне число ділиться на:

а) 3; б) 5.

Розв'язання. Експеримент полягає в тому, що випадковим чином вибирається двозначне число. Наслідком такого випробування є одне з чисел від 10 до 99. Оскільки двозначних чисел 90, то $n = 90$, причому вибір кожного числа можна вважати рівноможливим.

а) Нехай подія A = «вибране двозначне число ділиться на 3». Оскільки кожне третє з 90 двозначних чисел ділиться на 3, то сприятливими для події A є 30 наслідків, тобто $m = 30$. Тоді за формулою (1) ймовірність події A

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

б) Нехай подія B = «вибране двозначне число ділиться на 5». Загальна кількість наслідків експерименту, як і в попередньому випадку, $n = 90$. Визначимо кількість чисел, які діляться на 5. Очевидно, що таких чисел буде $m = 18$. Отже,

$$P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

Приклад 4. В результаті великої кількості підкидань грального кубика було визначено, що «1» з'являється у середньому 30 разів зі 100 підкидань, а «6» з'являється у середньому 20 разів зі 100 підкидань. Побудувати відповідну ймовірнісну модель. Ймовірності яких подій дозволить обчислити ця модель?

Розв'язання. Для проведеного експерименту простір елементарних подій може мати вигляд $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ або $\Omega = \{1, 6, «ні 1, ні 6»\}$, а подіями можуть бути лише $A = \{1\}$ — випадання одиниці, $B = \{6\}$ — випадання шістки, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\varnothing$ і Ω, тобто $S = \{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}, B, \overline{B}, A \cup B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$. Оскільки події $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$ $A \cap \overline{B}$ і $\overline{A} \cap B$ відповідно співпадають з $\overline{B}$, $\overline{A}$, A і B, то в S включено усі можливі події.

Проведений експеримент дає підстави вважати, що $P(A) = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$; $P(B) = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}7$; $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}8$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$; $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$. Ніякі інші події в даному експерименті не досліджувалися. Тому не можна вести мову про ймовірність випадання, наприклад, двійки в рамках даного експерименту.

1.5. Геометричне означення ймовірності

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа та об'єм відповідної геометричної фігури.

Нехай множина всіх наслідків даного експерименту утворює деяку множину Ω, що має додатну скінченну міру $m(\Omega) > 0$ (довжину, площу, об'єм тощо). При цьому подіями вважають ті частини $A \subset \Omega$, що також мають міру. Тоді ймовірність $P(A)$ кожної такої події $A \subset \Omega$ можна визначати відношенням міри множини A до міри множини Ω, тобто

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \qquad (2)$$

Зауважимо, що формула (1) є частинним випадком формули (2), оскільки *кількість елементів також є мірою*, яка визначена для будь-якої підмножини A скінченної множини Ω : $m(A) = m$, $m(\Omega) = n$.

Приклад 1. З проміжку [0; 5] випадковим чином вибирають два дійсних числа. Яка ймовірність того, що:

а) сума чисел менша за 4;

б) добуток вибраних чисел більший за 5;

в) модуль різниці вибраних чисел менший за 2, а їх добуток більший за 3.

Розв'язання. Позначимо через x перше число, а через y — друге число, які вибрані випадковим чином з проміжку [0; 5]. Тоді $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 5$. Результатом кожного випробування є пара чисел (x, y). Отже, геометричним представленням множини Ω всіх можливих наслідків експерименту є квадрат (*рис. 1—3*) зі стороною 5, площа якого дорівнює 25, тобто

$$m(\Omega) = 25.$$

а) Нехай подія A = «сума вибраних чисел менша за 4». Тоді

$$A = \{(x, y) \in \Omega \colon x + y < 4\}$$

або

$$A = \{(x, y) \in \Omega \colon y < 4 - x\}.$$

Отже, елементарні наслідки експерименту, що сприяють події A, утворюють заштриховану фігуру (*рис. 1*), площа якої

$$m(A) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Застосовуючи формулу (2),

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{8}{25}.$$

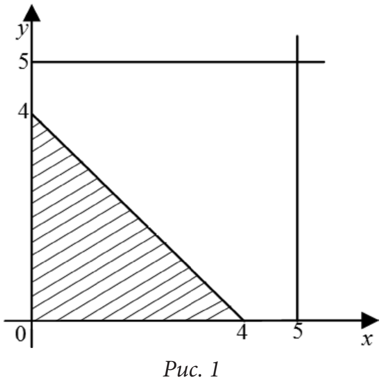


Рис. 1

б) Нехай подія B = «добуток вибраних чисел більший за 5». Тоді

$$B=\{(x, y)\in\Omega\colon x\,y>4\}$$

або

$$B=\left\{(x, y)\in\Omega : y>\frac{5}{x}\right\}.$$

Множиною наслідків, що сприяють події B, є фігура ABC, заштрихована на *рис. 2*, де лінія AC — частина графіка функції $y=\frac{5}{x}$. Обчислимо площу цієї фігури за допомого визначеного інтеграла:

$$m(B)=\int_1^5\left(5-\frac{5}{x}\right)dx=(5x-5\ln x)\Big|_1^5=20-5\ln 5\,.$$

Отже,

$$P(B)=\frac{m(B)}{m(\Omega)}=\frac{20-5\ln 5}{25}\approx 0,478.$$

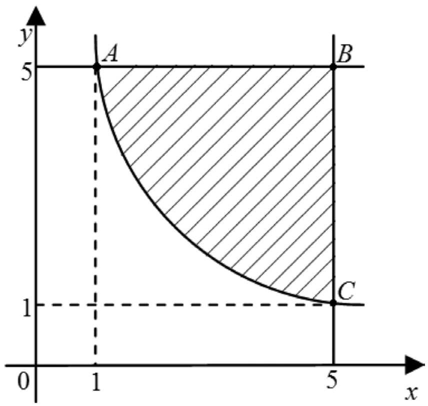


Рис. 2

в) Нехай подія C = «модуль різниці вибраних чисел менший 2, а їх добуток більший 3», тоді

$$C=\{(x, y)\in\Omega\colon |x-y|<2,\ xy>3\},$$

звідки отримуємо систему нерівностей

$$0<x\le 5,\ 0<y\le 5,\ y<x+2,\ y>x-2,\ \ y>\frac{3}{x}\,.$$

Множина точок, координати яких задовольняють зазначені нерівності, утворює фігуру *ABCDE* (*рис. 3*). Пряма *AE* задається рівнянням $y = x + 2$, пряма *CD* — рівнянням $y = x - 2$, а лінія *MEDN* — графіком функції $y = \frac{3}{x}$. Абсциса точки *M* визначається з рівності $\frac{3}{x} = 5$, тобто $x = \frac{3}{5}$. Аналогічно знаходимо ординату точки *N*: $y = \frac{3}{5}$. Абсцису точки *E*, як точки перетину двох ліній $y = \frac{3}{x}$ і $y = x + 2$, визначаємо з рівняння $\frac{3}{x} = x + 2$, звідки маємо $x = 1$. Аналогічно визначаємо абсцису точки *D*, як точки перетину двох ліній $y = x - 2$ і $y = \frac{3}{x}$, тобто $x = 3$.

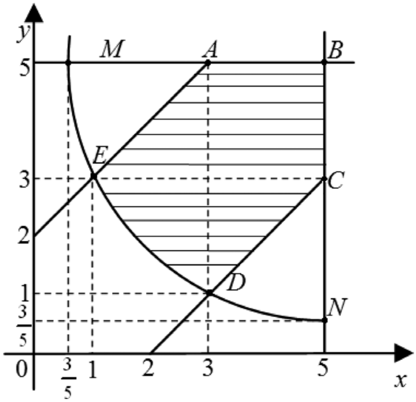


Рис. 3

Для визначення ймовірності події *C* обчислимо площу фігури *ABCDE*. Очевидно, що

$$S_{ABCDE} = S_{MBN} - S_{MAE} - S_{NCD} = S_{MBN} - 2S_{CND},$$

оскільки $S_{MAE} = S_{NCD}$. Тоді

$$S_{MBN} = \int_{\frac{3}{5}}^{5} \left(5 - \frac{3}{x}\right) dx = \left(5x - 3\ln x\right) \Big|_{\frac{3}{5}}^{5} = 25 - 3\ln 5 - \left(3 - 3\ln\frac{3}{5}\right) =$$

$$= 22 + 3\ln 3 - 6\ln 5;$$

$$S_{NCD} = \int_3^5 \left(x - 2 - \frac{3}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x - 3\ln x \right) \Bigg|_3^5 =$$

$$= \frac{25}{2} - 10 - 3\ln 5 - \left(\frac{9}{2} - 6 - 3\ln 3 \right) = 4 + 3\ln 3 - 3\ln 5.$$

Отже,

$$m(C) = 22 + 3\ln 3 - 6\ln 5 - 8 - 6\ln 3 + 6\ln 5 = 14 - 3\ln 3,$$

а

$$P(C) = \frac{14 - 3\ln 3}{25} \approx 0,428.$$

Приклад 2 (задача про зустріч). Два студенти призначили зустріч у певному місці між третьою та четвертою годинами дня. Той, хто прийде перший, чекає іншого впродовж 15 хв, після чого йде з місця зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язання. Позначимо через x час (у годинах) приходу на місце зустрічі першого студента, а через y — другого. Очевидно, що година, під час якої має відбутися зустріч, несуттєва, тобто студенти мають зустрітися протягом однієї години. Тоді для x і y виконуються умови

$$0 \le x \le 1 \text{ і } 0 \le y \le 1,$$

і геометричним зображенням простору Ω є одиничний квадрат *OMBN* (*рис. 4*).

Нехай подія *A* полягає в тому, що зустріч відбулася. Це можливо лише тоді, коли різниця між часом приходу на місце зустрічі першого та другого студентів не більша за 15 хв, або $\frac{1}{4}$ год, тобто

$$|x - y| \le \frac{1}{4}. \qquad (*)$$

Звідси отримуємо систему нерівностей

$$y \le x + \frac{1}{4}, \ y \ge x - \frac{1}{4}.$$

Множина точок, координати яких задовольняють нерівності (*), утворює фігуру *ABCDOE* (*рис. 4*).

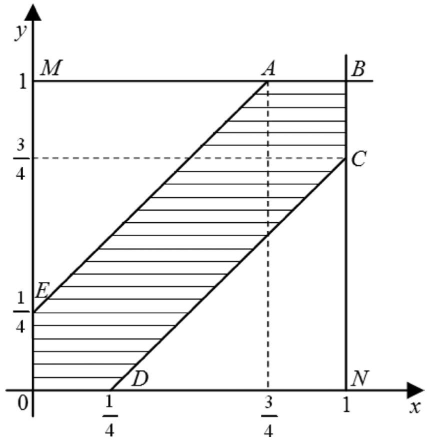


Рис. 4

Оскільки

$$S_{ABCDOE} = S_{MBNO} - 2S_{EMA},$$

причому

$$_{MBNO} \qquad , \; S_{EMA} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{32},$$

то

$$S_{ABCDOE} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Отже, ймовірність того, що зустріч відбудеться,

$$P(A) = \frac{7}{16}.$$

Задачі до розділу 1

Задача 1. Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Сумісні чи несумісні події A і B, якщо A = «перший стрілець влучив у мішень», B = «другий стрілець влучив у мішень».

Відповідь. Сумісні.

Задача 2. Кажуть, що дані події A_i, $i = 1, 2, \ldots$ утворюють повну групу, якщо вони попарно несумісні і в сумі дають простір Ω елементарних подій. Перевірити, чи утворюють повну групу задані події, і знайти серед них взаємно протилежні:

а) A = «випадання не менше трьох очок», B = «випадання не більше трьох очок» в експерименті — підкиданні грального кубика;

б) A = «один промах», B = «одне влучення», C = «два влучення» в експерименті, який полягає в тому, що два стрільці роблять по одному пострілу в мішень;

в) A = «випадання двох аверсів», B = «випадання хоча б одного реверсу» в експерименті — підкиданні двох монет.

Відповідь. У випадках а) і б) події не утворюють повної групи; у випадку в) події взаємно протилежні, а тому утворюють повну групу.

Задача 3. Описати простір елементарних подій для випробування, яке полягає в підкиданні грального кубика.

Відповідь. Все залежить не тільки від підкидання, а й від того, що фіксується після підкидання. Якщо фіксується кількість очок, що випали, то $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, де кожне число означає кількість очок, що випали. Якщо фіксується тільки випала чи не випала шістка, то $\Omega = \{6, \overline{6}\}$, де 6 означає випадання 6, а $\overline{6}$ — випадання іншої кількості очок.

Задача 4. Гральний кубик підкидають двічі. Нехай A_i = «випаде i очок при першому підкиданні», B_j = «випаде j очок при другому підкиданні». Виразити через A_i, B_j такі події:

A = «обидва рази випаде парна кількість очок»;

B = «сума очок при двох підкиданнях дорівнює 6»;

C = «сума очок при двох підкиданнях більше 8»;

D = «обидва рази випаде однакова кількість очок».

Відповідь.

$A = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_5 \cdot \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_3 \cdot \overline{B}_5 = (A_2+A_4+A_6) \cdot (B_2+B_4+B_6)$;

$B = A_1B_5 + A_2B_4 + A_3B_3 + A_4B_2 + A_5B_1$;

$C = A_3B_6+A_4B_5+A_4B_6+A_5B_4+A_5B_5+A_5B_6+A_6B_3+A_6B_4+A_6B_5+A_6B_6$;

$D = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6$.

Задача 5. Студент на екзамені відповідає на білет, в якому три питання. Нехай A_i = «студент відповів на i-те питання». Виразити через події A_i такі події:

A = «студент відповів принаймні на два питання»;

B = «студент не відповів на жодне питання»;

C = «студент відповів тільки на одне питання».

Чи є рівними події $F = A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_3$ та $D = A_1 \cdot A_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$?

Відповідь.

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

$B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$; $C = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$; події F і D рівні.

Задача 6. Підкидають три монети. Записати простір елементарних подій і вирішити, з яких елементарних подій складаються події:

A = «на двох монетах випаде аверс»;

B = «на жодній монеті не випаде реверс»;

C = «хоча б на одній монеті випаде реверс».

Відповідь.

$\Omega = \{(a, a, a), (a, a, p), (a, p, a), (p, a, a), (a, p, p), (p, a, p), (p, p, a), (p, p, p)\}$;

$A = \{(a, a, p), (a, p, a), (p, a, a)\}$;

$B = \{(a, a, a)\}$;

$C = \{(a, a, p), (a, p, a), (p, a, a), (a, p, p), (p, a, p), (p, p, a), (p, p, p)\}$.

Задача 7. Стрілець виконує чотири постріли у мішень. Нехай подія A_i = «влучення в мішень при i-му пострілі», $i = 1, 2, 3, 4$. Виразити через A_i такі події:

A = «три влучення»;

B = «хоча б один промах»;

C = «не більше одного влучення»;

D = «хоча б одне влучення».

Відповідь.

$A = A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4 + A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4 + A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4 + \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4$;

$B = \overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$;

$$C = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3;$$

$$D = \overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Задача 8. Підкидають чотири рази монету. Вказати простір Ω елементарних подій і вирішити, з яких елементарних подій складаються події:

A = «два рази випаде аверс»;

B = «випаде не більше одного реверсу».

Відповідь. $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): \text{кожне } x_i \in \{a, p\}\}$;

$A = \{(a, a, p, p), (a, p, a, p), (a, p, p, a), (p, a, a, p), (p, a, p, a), (p, p, a, a)\}$;

$B = \{(a, a, a, a), (a, a, a, p), (a, a, p, a), (a, p, a, a), (p, a, a, a)\}$.

Задача 9. У класі навчається 10 хлопців і 12 дівчат. Знайти за класичним способом імовірність того, що навмання вибраний учень — хлопець.

Відповідь. $P(\text{«вибрано хлопця»}) = \dfrac{5}{11}$.

Задача 10. Знайти за класичним способом імовірність того, що при двох підкиданнях монети:

а) хоча б один раз випаде реверс;

б) жодного разу не випаде реверс.

Відповідь. а) $P = \dfrac{3}{4}$; б) $P = \dfrac{1}{4}$.

Задача 11. Побудувати ймовірнісну модель і визначити ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде:

а) парна кількість очок;

б) непарна кількість очок;

в) кількість очок більше чотирьох;

г) кількість очок менше десяти;

д) кількість очок більше шести.

Чи обов’язково при побудові потрібної ймовірнісної моделі використовувати класичний спосіб обчислення ймовірності?

Відповідь. Якщо $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ і $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, то S містить усілякі події — підмножини Ω, ймовірність яких обчислюється класичним способом: а) $P = \frac{1}{2}$; б) $P = \frac{1}{2}$; в) $P = \frac{1}{3}$; г) $P = 1$; д) $P = 0$.

Для реального грального кубика класична ймовірна модель може виявитися неадекватною. Тоді, провівши досить велику кількість підкидань можна скористатися статистичними ймовірностями і отримати, наприклад, такі результати: а) $P = \frac{2}{5}$; б) $P = \frac{3}{5}$; в) $P = \frac{2}{5}$.

Задача 12. У круг навмання кинуто точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить у квадрат, вписаний у круг?

Відповідь. $P = \frac{2}{\pi}$.

Задача 13. Абонент протягом години чекає телефонного дзвінка. Яка ймовірність того, що йому подзвонять протягом перших 15 хв?

Відповідь. $P = \frac{1}{4}$.

Задача 14. Студент і студентка домовились зустрітись в певному місці між 19 та 20 год. Якщо студент приходить перший, він чекає студентку 30 хв і йде з місця зустрічі. Якщо першою прийде студентка, вона чекає студента 10 хв і йде з місця зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Відповідь. $P = \frac{1}{4}$.

Задача 15. На площині проведено паралельні прямі на відстані 15 см одна від одної. На площину кидають монету діаметром 5 см. Знайти ймовірність того, що монета перетне одну із паралельних прямих.

Відповідь. $P = \frac{1}{3}$.

Задача 16. Два дійсних числа p і q випадковим чином вибираються з інтервалу $[-2; 2]$. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ має:

а) дійсні корені;

б) дійсні додатні корені;

в) один корінь додатний, а інший від'ємний;

г) хоча б один дійсний корінь з інтервалу $[-1; 1]$.

Відповідь. а) $P = \frac{7}{12}$; б) $P = \frac{1}{24}$; в) $P = \frac{1}{2}$; г) $P = \frac{25}{48}$.

Задача 17. При перевірці готової продукції було виявлено 7 бракованих одиниць товару із 140 перевірених. Знайти відносну частоту бракованих одиниць товару.

Відповідь. $P_n^* = 0{,}04$.

Задача 18. При стрільбі по мішені було виявлено, що відносна частота влучень дорівнює 0,9. Проведено 70 пострілів. Скільки пострілів були влучними?

Відповідь. $m = 63$.

Питання для самоконтролю до розділу 1

1. Що називають експериментом або випадковим експериментом?
2. Що називають випробуванням ?
3. Що називають наслідком (елементарним наслідком, елементарною подією)?
4. Що називають множиною (або простором) елементарних подій?
5. Що називають подіями (або випадковими подіями)?
6. Що називають вірогідною (або достовірною) подією?
7. Що називають неможливою подією?
8. Що називають однаковими або рівними подіями?
9. Що називають сумою $A + B$ подій?
10. Що називають сумою $\sum_i A_i$ подій?
11. Що називають добутком $A \cdot B$ подій?
12. Що називають добутком $\prod_i A_i$ подій?
13. Що називають різницею $A - B$ подій?

14. Що називають протилежною подією $\overline{A}$ до події A?
15. Сформулюйте основні властивості подій у просторі S.
16. Що називають відносною частотою?
17. Що називають статистичною ймовірністю?
18. Що називають рівноможливими (рівноймовірними) наслідками?
19. Якій спосіб обчислення ймовірності називають класичним?
20. Якою формулою можна обчислити ймовірність, виходячи з геометричних міркувань?
21. Чи обов'язково з умови $A + B = C$ випливає умова $A = B - C$, якщо A, B і C — події з даного простору S?
22. Чи правда, що $A - B = A\overline{B}$?
23. Що можна сказати про події:

1) $A - B$ та $A - AB$;
2) $\overline{A + B}$ та $\overline{A}\,\overline{B}$;
3) $A + B$ та $A + (B - A)$?

24. Як утворюється ймовірнісний простір для даного експерименту?
25. Чи можуть різні за формою експерименти мати однакові ймовірнісні простори?
26. Який зв'язок між відношеннями спричиненості та рівності подій?
27. Чи обов'язково для двох даних подій принаймні одна з них спричинює іншу з них?
28. Чи є у просторі подій S подія, що: 1) спричинюється будь-якою подією $A \in S$; 2) не спричинюється ніякою подією $A \in S$?

Тест 1

1. Вибери правильну геометричну інтерпретацію суми подій *A* і *B*. Сумою позначено заштриховану область (*рис. 5*).

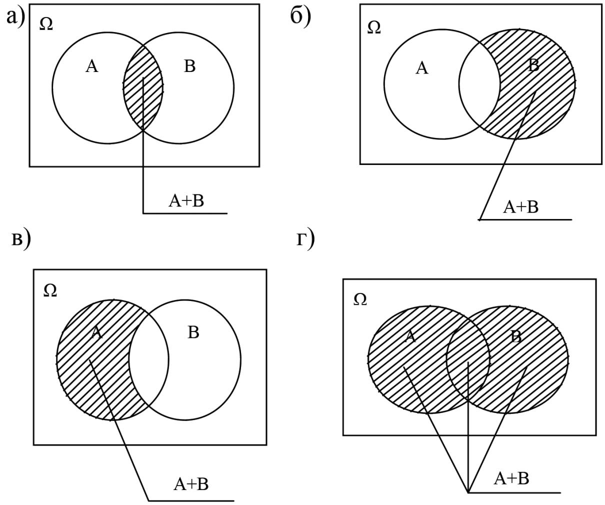


Рис. 5

2. Вибери правильну геометричну інтерпретацію добутку подій *A* і *B*. Добуток позначено заштрихованою областю (*рис. 6*).

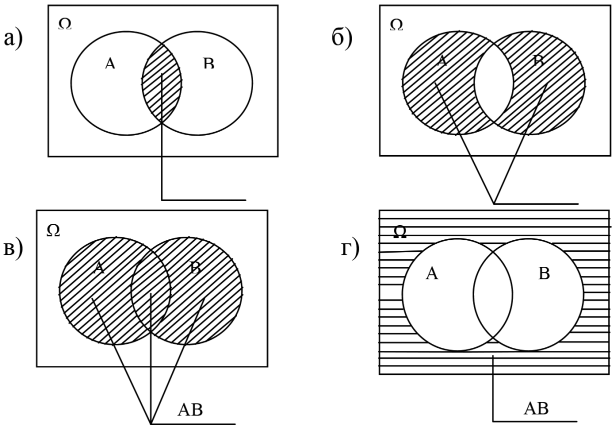


Рис. 6

3. Вибери правильну геометричну інтерпретацію різниці $A \setminus B$ подій A і B. Різниці подій відповідає заштрихована область (*рис. 7*).

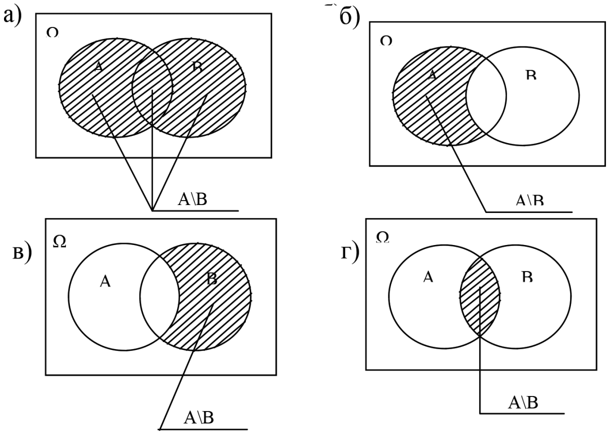


Рис. 7

4. Під час перевірки якості виготовлених 300 деталей було знайдено брак у 12 деталей. Знайти відносну частоту якісних деталей:

а) 0,04; б) 0,96; в) $\frac{1}{300}$; г) $\frac{1}{12}$; д) відповідь відсутня.

5. В класі навчається 32 учні серед яких 17 — з блакитними очима, 12 — з сірими, а інші — з карими. Навмання вибирають учня і визначають колір його очей. Яка ймовірність того, що учень не з блакитними очима?

а) $\frac{17}{32}$; б) $\frac{12}{32}$; в) $\frac{20}{32}$; г) $\frac{15}{32}$; д) відповідь відсутня.

6. Знайти ймовірність того, що вибране навмання двозначне число не є кратним 10.

а) $\frac{1}{100}$; б) 0,1; в) 0,9; г) 0,5; д) відповідь відсутня.

7. Відстань від міста *A* до міста *B* по автотрасі становить 100 км, а від міста *B* до міста *C* — 65 км. Вздовж автотраси проходить лінія електропередачі. Знайти ймовірність того, що під час негоди розрив лінії електропередачі відбудеться на ділянці від міста *B* до міста *C*.

а) 0,35; б) 0,65; в) $\frac{100}{165}$; г) $\frac{65}{165}$; д) відповідь відсутня.

8. Мішень складається із концентричних кіл радіусів 5 см, 10 см, 15 см, 20 см. Частина мішені заштрихована (*рис. 8*). Стрілець зробив один постріл і влучив у мішень. Яка ймовірність влучення у заштриховану область?

а) 0,5; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{3}{8}$; г) $\frac{3}{5}$; д) відповідь відсутня.

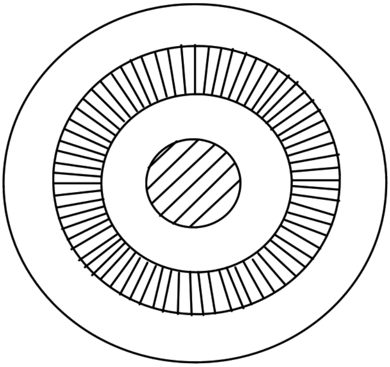


Рис. 8

9. Між 0 і 1 навмання вибирають два числа. Яка ймовірність того, що їх сума не перевищує 1, а результат різниці першого і другого числа є число від'ємне?

а) 0,5; б) 0,25; в) 0,3; г) 1; д) відповідь відсутня.

10. З відривного календаря навмання відривають листок. Яка ймовірність того, що число, яке написане на відірваному листку, дорівнює 29, якщо у році 365 днів?

а) 0,12; б) $\frac{12}{365}$; в) $\frac{11}{365}$; г) $\frac{29}{365}$; д) відповідь відсутня.

Розділ 2. Елементи комбінаторики та їх застосування при обчисленні ймовірностей

При обчисленні ймовірностей подій досить часто потрібно обчислювати кількість елементарних подій (сприятливих деякій події або всіх можливих подій). Здебільшого це зумовлює великі труднощі, подолати які допомагає комбінаторика, що вивчає способи підрахунку кількості розміщень, перестановок, сполучень тощо.

Перш ніж розглядати зазначені схеми, нагадаємо, що вираз $n!$ читається «ен-факторіал» і означає добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \tag{3}$$

причому вважають, що $0! = 1$.

Для обчислення значення $n!$ в програмі MS Excel призначена функція ФАКТОР (*рис. 9*).

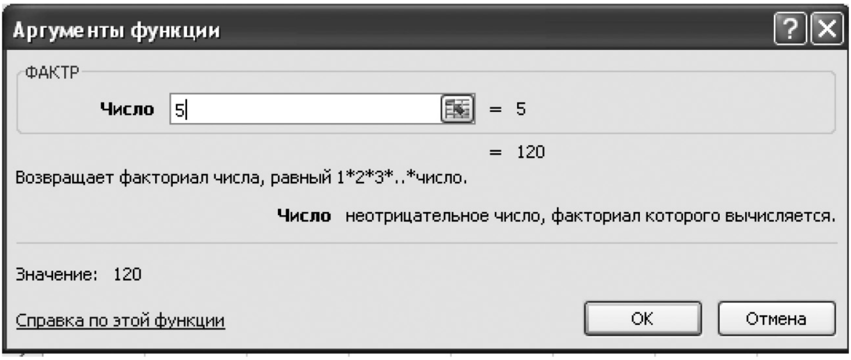


Рис. 9. MS Excel. Перестановки

Перестановками із n елементів називають впорядковані множини із даних n елементів, що відрізняються лише їх порядком. Наприклад, перестановками із трьох елементів 1, 2, 3 будуть такі множини: {1; 2; 3}, {1; 3; 2}, {2; 1; 3}, {2; 3; 1}, {3; 1; 2}, {3; 2; 1}. Кількість усіх перестановок із n елементів визначають так:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \ldots \cdot n = n! \tag{4}$$

Очевидно, що для обчислення P_n також можна використовувати функцію ФАКТОР.

Розміщеннями із n елементів по m називають впорядковані множини із *m* елементів, вибраних із даних *n* елементів, які можуть розрізнятися між собою як складом елементів, так і їх порядком. Наприклад, розміщеннями із трьох елементів 1, 2, 3 по два будуть такі множини: {1; 2}, {1; 3}, {2; 1}, {2; 3}, {3; 1}, {3; 2}. Кількість усіх розміщень із *n* елементів по *m* обчислюють за формулою

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (5)$$

Для обчислення A_n^m в програмі MS Excel призначена функція ПЕРЕСТ. Приклад обчислення A_{15}^3 відображено на *рис. 10.*

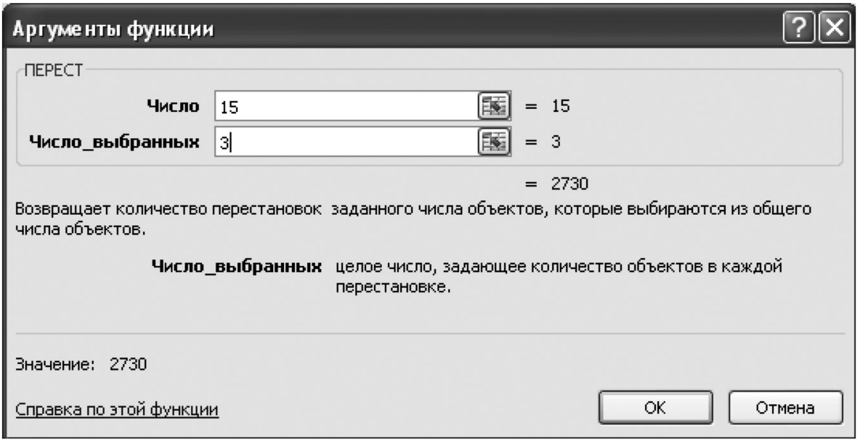


Рис. 10. MS Excel. Розміщення

Сполученнями із n елементів по m називають множини із *m* елементів, вибраних із даних *n* елементів, які розрізняються між собою тільки складом елементів. Наприклад, сполученнями із трьох елементів 1, 2, 3 по два будуть такі множини: {1; 2}, {1; 3}, {2; 3}. Кількість усіх сполучень із *n* елементів по *m* обчислюють за формулою

$$C_n^m = \frac{(n-m+1) \cdot (n-m+2) \cdot \ldots \cdot n}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}. \qquad (6)$$

Для обчислення кількості сполучень C_n^m в MS Excel призначена функція ЧИСЛКОМБ. Приклад обчислення C_{15}^3 за допомогою зазначеної функції відображено на *рис. 11*.

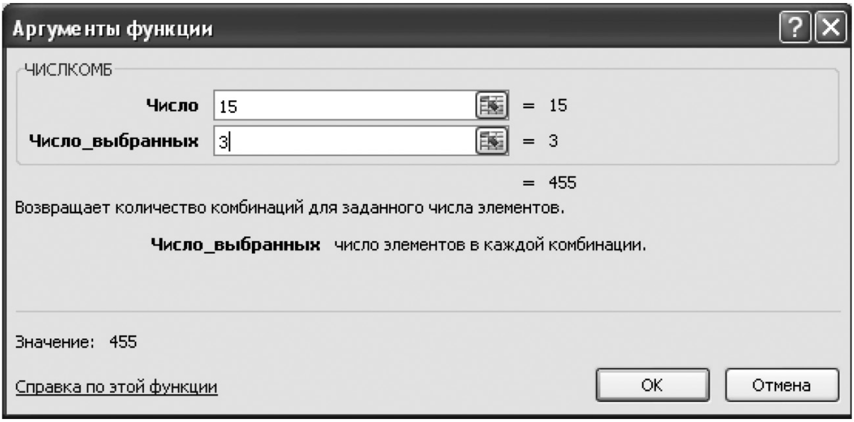


Рис. 11. MS Excel. Сполучення

Між перестановками, сполученнями і розміщеннями встановлені такі співвідношення:

$$P_n = A_n^n = n!;\ C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m};\ C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1;\ C_n^1 = n;\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Приклад 1. За навчальним планом студенти впродовж семестру вивчають 10 дисциплін. На кожен день плануються 4 пари з різних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на один день?

Розв'язання. Усі можливі розклади занять на один день — це розміщення з 10 по 4, оскільки вони можуть різнитися як дисциплінами, так і порядком. Тому кількість способів складання розкладу на один день визначається за формулою (5), тобто

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040\,.$$

Приклад 2. Скільки п'ятизначних чисел можна утворити за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожна з них у числі зустрічається лише один раз?

Розв'язання. Різнознакові п'ятизначні числа, утворені за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, можна отримати лише перестановкою цифр у числі. Їх кількість визначається кількістю перестановок з п'яти елементів. Згідно з формулою (4):

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Приклад 3. У групі налічується 15 студентів. Скількома способами можна обрати:

а) студентську раду із трьох студентів;

б) голову, заступника та секретаря студентської ради?

Розв'язання. а) Студентська рада з трьох студентів обирається із 15 студентів групи і різниться лише складом. Порядок вибраних студентів не має значення. Тому кількість можливих виборів визначається кількістю сполучень із 15 елементів по 3, яка згідно формули (6) дорівнює

$$C_{15}^{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455\,.$$

б) У даному випадку студентська рада з трьох студентів обирається із 15 студентів групи і різниться не лише складом, а й тим, хто буде головою, заступником і секретарем. Порядок вибраних студентів має значення. Тому кількість можливих виборів визначається кількістю розміщень із 15 елементів по 3, яка згідно формули (5) дорівнює

$$A_{15}^{3} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730\,.$$

Приклад 4. В урні міститься 8 чорних і 5 білих кульок. Навмання виймаються 4 кульки. Яка ймовірність того, що витягли:

а) 4 чорних кульки;

б) 2 чорних і 2 білих кульки?

Розв'язання. Експеримент полягає у виборі 4 кульок і фіксації їх кольору.

а) Кількість кульок в урні — 13. Визначимо, скількома способами можна дістати 4 кульки з 13 (без повернення їх в урну). Оскільки порядок виймання кульок не має значення, то кількість таких наборів (сполучень) визначаємо за формулою (4):

$$n = C_{13}^4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 715 .$$

Всі елементарні наслідки у даному експерименті можна вважати рівноможливими.

Нехай подія A полягає в тому, що вийнято 4 чорних кульки. Чорні кульки можна вибрати з урни лише з восьми чорних кульок. Тому кількість наслідків, сприятливих події A, визначається за формулою (6), а саме:

$$m = C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70 .$$

Отже, ймовірність того, що витягнули 4 чорних кульки,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{70}{715} = \frac{14}{143} \approx 0{,}098 .$$

б) Експеримент той самий, отже, кількість усіх можливих наслідків, як і в попередньому пункті, становить n = 715. Нехай подія B полягає в тому, що вийнято з урни 2 чорних та 2 білих кульки. Визначимо, скількома способами це можна зробити.

Дві чорних кульки, які містяться в урні, можна вийняти

$$m_1 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$$

способами, а 2 білих — із п'яти білих, що знаходяться в урні, можна вийняти

$$m_2 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

способами. Тоді 2 білих і 2 чорних кульки можна вийняти

$$m = m_1 \cdot m_2 = 28 \cdot 10 = 280$$

способами. Отже, кількість наслідків, що сприяє події B, становить m = 280.

Тоді ймовірність події B:

$$P(B)=\frac{280}{715}\approx 0,39\,.$$

Приклад 5. Шістнадцять варіантів контрольної роботи написані на окремих картках і розподіляються випадковим чином серед 14 студентів, які сидять в одному ряду. Кожний студент отримує одну картку. Знайти ймовірність того, що:

а) варіанти 1 і 2 не будуть використані;

б) варіанти 1 і 2 одержать студенти, які сидять поруч.

Розв'язання. Маємо експеримент з розподілу 16 карток серед 14 студентів. Результатами експерименту є впорядковані (за студентами) набори розданих 14 з 16 варіантів контрольних робіт. У цьому разі елементарні події відрізняються одна від одної не лише номерами варіантів, що розподіляються серед студентів, а й порядком розподілу. Тому такі елементарні події є розміщеннями, а кількість усіх розміщень (елементарних подій) визначається за формулою (5):

$$n=A_{16}^{14}=\frac{16!}{2!}\,.$$

Вважаємо, що всі елементарні події рівноможливі.

а) Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що варіанти 1 і 2 залишаться нерозподіленими. Тоді інші 14 карток розподіляться серед 14 студентів. Такі розподіли є перестановками, а їх кількість визначається за формулою (4):

$$m=P_{14}=14!\text{ —}$$

кількість елементарних подій, що сприяють події A.

Отже, за формулою (1) маємо:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{14!\cdot 2!}{16!}=1\approx 0,008\,.$$

б) Нехай подія B полягає в тому, що варіанти 1 і 2 видані студентам, які сидять поруч. У ряду із 14 місць є 13 пар сусідніх місць, причому в кожній парі варіанти можуть розподілятись двома способами:

$$m_1 = 13 \cdot 2 = 26.$$

Інші 14 варіантів карток розподіляються між 12 студентами

$$m_2 = A_{14}^{12} = \frac{14!}{2!}$$

способами. Тому події B сприяють

$$m = m_1 \cdot m_2 = 26 \cdot \frac{14!}{2!}$$

наслідків.

Отже, ймовірність події B:

$$P(B) = \frac{26 \cdot 14! \cdot 2!}{2! \cdot 16!} = \frac{13}{120} \approx 0{,}108 .$$

Приклад 6. Комплект складається із восьми різних виробів, з яких 3 вироби коштують по 4 грн, ще 3 — по 5 грн і 2 — по 3 грн. Знайти ймовірність того, що взяті навмання 2 вироби коштують 7 грн.

Розв'язання. Вибір двох виробів з восьми є сполученням, кількість яких

$$n = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 .$$

Це є загальна кількість можливих наслідків в експерименті — виборі по два вироби з восьми.

Нехай подія A полягає в тому, що вартість двох вибраних виробів становить 7 грн. Це можливо лише тоді, коли один виріб коштує 4 грн, а інший — 3 грн. Оскільки кількість виробів вартістю 4 грн дорівнює 3, а вартістю 3 грн — 2, то вибрати 2 вироби вартістю 7 грн можна $m = 3 \cdot 2 = 6$ способами. Отже, вважаючи вибір будь-якої пари виробів рівноможливим,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{28} \approx 0{,}214 .$$

Приклад 7. У групі 10 хлопців і 5 дівчат, серед яких вибирають дві особи для участі у конференції. Яка ймовірність того, що:

а) виберуть двох хлопців;

б) виберуть хлопця й дівчину?

Розв'язання. У групі 15 осіб, серед яких 10 хлопців і 5 дівчат. Вибір двох осіб із 15 є сполученням, кількість яких

$$n = C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105.$$

Це є загальна кількість наслідків в експерименті — виборі 2 осіб із 15.

а) Нехай подія A = «вибрали двох хлопців». Загальна кількість наслідків, що сприяють події A, визначається кількістю виборів 2 хлопців із 10:

$$m = C_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Отже, вважаючи вибір будь-яких двох осіб рівноможливими подіями, маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{45}{105} \approx 0,43.$$

б) Нехай B = «вибрали хлопця й дівчину». Це можливо зробити

$$m = 10 \cdot 5 = 50$$

способами.

Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{50}{105} \approx 0,48\,.$$

Задачі до розділу 2

Задача 1. У студентську раду інституту обрано 8 студентів. Скількома способами можна обрати керівну групу у складі з 3 осіб?

Відповідь. 336.

Задача 2. У бібліотеку одночасно зайшли 4 відвідувачі. Скількома способами вони можуть утворити чергу?

Відповідь. 24.

В к а з і в к а. У задачах 3–15 вважати результати відповідних випробувань рівноможливими.

Задача 3. У деканаті знаходяться 10 студентських книжок. Шестеро студентів, які зайшли до деканату, навмання беруть по 1 студентській книжці. Яка ймовірність того, що:

а) усі студенти взяли свої студентські книжки;

б) 4 студента взяли свої студентські книжки?

Відповідь. а) $P=\dfrac{1}{151200}$; б) $P=\dfrac{5}{2016}\approx 0{,}0025$.

Задача 4. З партії у 40 виробів, яка містить 20 % браку, навмання виймають 7 виробів. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих виявиться 5 бракованих виробів.

Відповідь. $P=\dfrac{C_8^5\cdot C_{32}^2}{C_{40}^7}\approx 0{,}3$.

Задача 5. У туриста є 10 однакових консервних банок, серед яких три банки — з тушкованим м'ясом, а інші — з рибою. Під час зливи етикетки відклеїлись. Яка ймовірність того, що 2 навмання відкриті банки відрізнятимуться вмістом?

Відповідь. $P=\dfrac{C_3^1\cdot C_7^1}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$.

Задача 6. У класі 25 учнів, з яких 7 цікавляться математикою, 10 — економічними дисциплінами, 8 — літературою. Знайти ймовірність того, що 2 навмання вибраних учня цікавитимуться однією дисципліною.

Відповідь. $P=\dfrac{C_7^2+C_{10}^2+C_8^2}{C_{25}^2}=\dfrac{76}{6900}=0{,}01$.

Задача 7. У вазі 5 троянд рожевого, 7 червоного та 3 білого кольору. Навмання дістають 2 троянди. Яка ймовірність того, що вони будуть:

а) одного кольору;

б) різних кольорів?

Відповідь.

а) $P = \dfrac{C_5^2 + C_7^2 + C_3^2}{C_{15}^2} = \dfrac{34}{105} \approx 0,32$;

б) $P = \dfrac{C_5^1 \cdot C_7^1 + C_5^1 \cdot C_3^1 + C_7^1 C_3^1}{C_{15}^2} = \dfrac{71}{105} \approx 0,68$.

Задача 8. У кошику лежать 8 червоних і 2 зелених яблука. Знайти ймовірність того, що серед 4 узятих яблук:

а) усі червоні;

б) 2 зелених яблука.

Відповідь. а) $P = \dfrac{1}{3}$; б) $P = \dfrac{2}{15}$.

Задача 9. Чотири білети в театр розігрують 5 хлопців і 7 дівчат. Знайти ймовірність того, що в театр підуть 2 хлопця і 2 дівчини.

Відповідь. $P = \dfrac{C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{12}^4} = \dfrac{14}{33} \approx 0,42$.

Задача 10. Із 10 лотерейних білетів книжкової лотереї, що перебувають у продажу, 2 виграшні. Визначити ймовірність того, що серед куплених 5 білетів:

а) один виграшний;

б) хоча б один виграшний.

Відповідь. а) $P = \dfrac{C_2^1 \cdot C_8^4}{C_{10}^5} \approx 0,56$; б) $P = 1 - \dfrac{C_8^5}{C_{10}^5} \approx 0,78$.

Задача 11. П’ять книжок, серед яких 2 підручники з математики, довільно розміщують на полиці. Яка ймовірність того, що ці 2 підручники стоятимуть поряд?

Відповідь. $P = \dfrac{2 \cdot 4!}{5!}$.

Задача 12. В урні 9 білих та 6 чорних кульок. З урни дістають навмання 5 кульок. Знайти ймовірність того, що 3 з них — білі, а 2 — чорні.

Відповідь. $P = \frac{C_9^3 \cdot C_6^2}{C_{15}^5} \approx 0,42$.

Задача 13. На кожній з 9 карток написано по літері: «м», «с», «к», «н», «е», «о», «і», «т», «о». Знайти ймовірність того, що, навмання викладаючи ці картки одна біля одної, ви отримаєте слово «економіст».

Відповідь. $P = \frac{1}{181440}$.

Задача 14. З урни, у якій міститься 8 кольорових і 7 білих кульок, навмання дістають одну за одною 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони кольорові, якщо:

а) першу кульку повертають в урну, після чого дістають другу;

б) першу кульку не повертають в урну.

Відповідь. а) $P = \frac{64}{225} \approx 0,28$; б) $P = \frac{4}{15}$.

Задача 15. У змаганнях з легкої атлетики беруть участь 6 учнів з восьмого класу, 7 — дев'ятого та 8 — десятого. Знайти ймовірність того, що за жеребкуванням до першої пари бігунів потраплять двоє учнів з одного класу.

Відповідь. $P = \frac{C_6^2 + C_7^2 + C_8^2}{C_{21}^2} \approx 0,3$.

Питання для самоконтролю до розділу 2

1. Що таке $n!$?
2. Як обчислити кількість перестановок з *n елементів*?
3. Як обчислити кількість розміщень з *n* по *m* елементів?
4. Як обчислити кількість сполучень з *n* по *m* елементів?
5. Якими співвідношеннями пов'язані перестановка, розміщення, сполучення?

Тест 2

1. Обчислити 5! – 2·3!
а) 120; б) 108; в) 0; г) 24; д) відповідь відсутня.

2. Обчислити P_4 (кількість перестановок з 4-х елементів).
а) 120; б) 6; в) 4; г) 24; д) відповідь відсутня.

3. Обчислити A_5^3 (кількість розміщень з 5 елементів по 3).
а) 60; б) 20; г) 100; д) відповідь відсутня.

4. Обчислити C_7^2.
а) 5040; б) 15; в) 10; г) 21; д) відповідь відсутня.

5. Скількома способами 5 осіб можуть утворити чергу?
а) 5; б) 120; в) 1; г) 24; д) відповідь відсутня.

6. В команді проходять тренування 5 захисників, 6 півзахисників, 8 нападаючих і 3 воротарі. На поле виходять 3 захисники, 4 півзахисники, 3 нападаючих і 1 воротар. Скількома способами можна утворити команду?
а) 1; б) 8400; в) 720; г) 36; д) відповідь відсутня.

7. Є полоси тканини п'яти кольорів. Потрібно пошити прапор, що складається з трьох різнокольорових горизонтальних полос. Скільки різних прапорів можна пошити?
а) 15; б) 30; в) 120; г) 60; д) відповідь відсутня.

8. До іспиту з теорії ймовірності студентові запропоновано 100 задач. При підготовці до іспиту студент розв'язав 90 задач. Яка ймовірність того, що в білеті, який містить 3 задачі, всі будуть з тих, які студентом не розв'язані?
а) $\frac{C_{90}^3}{C_{100}^3}$; б) $\frac{1}{C_{10}^3}$; в) $\frac{C_{10}^3}{C_{100}^3}$; г) 0,5; д) відповідь відсутня.

9. Знайти x з рівняння

$$C_{10}^2 + x \cdot C_{10}^8 = 90.$$

а) 0; б) 1; в) 2; г) 90; д) відповідь відсутня.

10. У деякій країні немає двох людей з однаковим набором зубів. Скільки людей мешкає в селищі, якщо вважати, що максимальна кількість зубів у людини становить 32?

а) C_{32}^2; б) A_{32}^2; в) 2^{32}; г) 32!; д) відповідь відсутня.

Розділ 3. Формули додавання, віднімання і множення ймовірностей

З основних властивостей імовірності $1_p - 3_p$ випливає багато інших властивостей ймовірностей. Розглянемо деякі з них.

Нехай A_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — події з одного простору подій S. Тоді

$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$;

$P(A_1 - A_2) = P(A_1) - P(A_1A_2)$;

$P(A_1 - A_2) = P(A_1) - P(A_2)$, коли $A_2 \subset A_1$;

$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$.

Для обчислення ймовірності добутку подій вводять поняття умовної ймовірності.

Умовною ймовірністю події A за умови появи події B називають число

$$P(A/B) = \begin{cases} \dfrac{P(AB)}{P(B)}, \text{якщо } P(B) \neq 0; \\ P(A), \text{ якщо } P(B) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

З даного означення випливає, що $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$,

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_n/(A_1 \ldots A_{n-1})).$$

Події A і *B* називають *незалежними*, якщо $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Ця рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A)$ або $P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)$, причому виконання однієї з вказаних рівностей гарантує й виконання інших з цих рівностей. Іншими словами, ймовірність появи однієї з двох незалежних подій не залежить від того, відбулася чи ні інша з цих подій.

Три події A_1, A_2 і A_3 називають *незалежними*, якщо будь-які дві з них незалежні і $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3)$.

Чотири події A_1, A_2, A_3 і A_4 називають *незалежними*, якщо будь-які три з них незалежні і $P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3)\, P(A_4)$.

Аналогічно означається *незалежність довільної кількості подій* A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні і деякі з них (або усі) замінити на протилежні події, то знову дістанемо незалежні події. При цьому ймовірність появи принаймні однієї з подій A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, обчислюється за формулою:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n). \qquad (8)$$

Приклад 1. Мішень складається з трьох областей, які попарно не перетинаються. Ймовірність влучення стрільцем у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу область — 0, 35, а у третю — 0, 15. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить:

а) у першу або в другу область;

б) не влучить у мішень?

Розв'язання. Уведемо позначення:
подія A_1 = «влучення в першу область»;
подія A_2 = «влучення в другу область»;
подія A_3 = «влучення в третю область»;
подія A_4 = «у мішень не влучив».
Тоді

$$P(A_1) = 0{,}45; \quad P(A_2) = 0{,}35; \quad P(A_3) = 0{,}15.$$

а) За умовою події A_1, A_2, A_3 попарно несумісні (оскільки області мішені не перетинаються).

Тому

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}8.$$

б) Події A_1, A_2, A_3, A_4 не тільки попарно несумісні, а й у сумі утворюють вірогідну подію Ω. Тому

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 1.$$

Отже,

$$P(A_4) = 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) = 1 - 0{,}45 - 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}05.$$

Приклад 2. Для виконання завдання замовник звернувся до двох виконавців. Ймовірність того, що перший виконавець надасть згоду виконати замовлення дорівнює 0,8, а другий — 0,9. Знайти ймовірність того, що замовлення буде прийнято принаймні одним з цих виконавців.

Розв'язання. Позначимо події: A = «завдання прийнято для виконання»; A_1 = «перший виконавець дав згоду виконати завдання»; A_2 = «другий виконавець дав згоду виконати завдання». Тоді

$$A = A_1 + A_2.$$

Оскільки згода виконати замовлення першим виконавцем не виключає згоди виконання замовлення другим, події сумісні. Тоді

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Події A_1 та A_2 доцільно вважати незалежними, тому що ймовірність згоди кожного виконавця не залежить від того, чи дав згоду інший виконавець.

Тому

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Отже,

$$P(A) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}98.$$

Приклад 3. Нехай події A і B незалежні. Чи будуть незалежними події A і $\overline{B}$?

Розв'язання. Розглянемо:

$$\begin{aligned} P(A \cdot \overline{B}) &= P(A \cdot (\Omega - B)) = P(A - AB) = \\ &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}). \end{aligned}$$

Отже, $P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$, тобто події A і $\overline{B}$ також незалежні.

Приклад 4. Нехай два стрільці роблять по одному пострілу у мішень. Ймовірність влучення першого стрільця — p_1, а другого — p_2. Чи є незалежними три події: A_i — «у мішень влучив i-ий стрілець», $i = 1, 2$ та A_3 — «одне влучення у мішень»? Якою є умовна ймовірність того, що у мішень влучив перший стрілець за умови, що маємо одне влучення у мішень?

Розв'язання. Результатами даного експерименту (пострілів у мішень) можна вважати пари (*в*, *в*), (*в*, *п*), (*п*, *в*), (*п*, *п*), де літера «*в*» означає влучення, а «*п*» — промах того стрільця, номер якого співпадає з номером літери у зазначених парах. Події A_1 і A_2 природно вважати незалежними. Тоді, враховуючи приклад 3, дістанемо

$$P(\{(в,в)\}) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1p_2,$$

$$P(\{в,п)\}) = P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) = p_1(1-p_2),$$

$$P(\{(п,в)\}) = (1-p_1)p_2, \text{ і } P(\{(п,п)\}) = (1-p_1)(1-p_2)\ .$$

За означенням умовної ймовірності маємо: $P(A_1 / A_3) = \dfrac{P(A_1A_3)}{P(A_3)}$.

Оскільки $A_1 = \{(в,\ в),\ (в,\ п)\}$, $A_2 = \{(в,\ в),\ (п,\ в)\}$, $A_3 = \{(в,\ п),\ (п,\ в)\}$, то $A_1A_3 = \{(в,\ п)\}$, $P(A_1A_3) = p_1(1-p_2)$, $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, а $P(A_3) = P\,\{(в,\ п),\ (п,\ в)\} = p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2$.

Тому $P(A_1 / A_3) = \dfrac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2}$. Звідси випливає, що події A_1 і A_3 незалежні тоді й тільки тоді, коли $\dfrac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2} = p_1$,

а це рівносильно тому, що $p_1(p_1-1)(2p_2-1) = 0$. Отже, події A_1 і A_3 незалежні тоді й тільки тоді, коли $p_1 = 0$, або $p_1 = 1$, або $p_2 = \dfrac{1}{2}$.

Аналогічно дістаємо, що події A_2 і A_3 незалежні тоді і тільки тоді, коли $p_2 = 0$, або $p_2 = 1$, або $p_1 = \dfrac{1}{2}$.

Таким чином, може бути, що події A_1, A_2 і A_3 попарно незалежні (наприклад, коли $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$). Разом з тим $A_1A_2A_3 = \varnothing$, і тому $P\ (A_1A_2A_3) = 0 \neq P\ (A_1)\ P\ (A_2)\ P\ (A_3)$, коли $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2$. Це означає, що події A_1, A_2 і A_3 можуть бути попарно незалежними, а в сукупності вони є залежними.

Задачі до розділу 3

Задача 1. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого дорівнює 0,7, для другого — 0,8, для третього — 0,9. Яка ймовірність, що:

а) хоча б один з них влучить у мішень;
б) тільки двоє влучать у мішень;
в) жоден не влучить у мішень?

Відповідь. а) $P = 0{,}994$; б) $P = 0{,}398$; в) $P = 0{,}006$.

Задача 2. У першій урні міститься 7 білих і 3 чорних кульки; у другій — 5 білих і 5 чорних кульок; у третій — 4 білих і 6 чорних кульок. З кожної урни навмання виймають по одній кульці. Знайти класичну ймовірність того, що серед вибраних кульок виявляться:

а) лише одна біла кулька;
б) дві білі кульки;
в) три білі кульки;
г) хоча б одна біла кулька?

Відповідь. а) $P = 0{,}36$; б) $P = 0{,}41$; в) $P = 0{,}14$; г) $P = 0{,}91$.

Задача 3. Знайти класичну ймовірність того, що випадковим чином вибране двозначне число ділиться:

а) на 2 або на 3;
б) на 2 і на 3.

Відповідь. а) $P = \frac{2}{3}$; б) $P = \frac{1}{6}$.

Задача 4. Групу з 30 студентів, серед яких 10 відмінників, випадковим чином розбивають на дві рівні підгрупи. Знайти класичну ймовірність того, що в кожній підгрупі буде по 5 відмінників.

Відповідь. $P = \dfrac{C_{10}^{5} \cdot C_{20}^{10}}{C_{30}^{15}} = \dfrac{1001}{3335} \approx 0{,}3$.

Задача 5. У групі 8 студентів чоловічої статі та 4 жіночої. Випадковим чином групу розбивають на чотири рівні частини. Знайти класичну ймовірність того, що в кожній частині виявиться одна студентка.

Відповідь. $P=\dfrac{C_4^1\cdot C_8^2}{C_{12}^3}=\dfrac{28}{55}\approx 0{,}51$.

Задача 6. Комплект із 20 виробів містить 40 % нестандартних. Двічі навмання із комплекту виймають по 6 виробів. Знайти класичну ймовірність того, що після цих двох виймань в комплекті залишаться лише нестандартні вироби.

Відповідь. $P=\dfrac{C_{12}^6\cdot 1}{C_{20}^6\cdot C_{14}^6}=\dfrac{1}{125970}$.

Задача 7. Перший стрілець влучає у ціль з ймовірністю 0,8, другий — з ймовірністю 0,9, а третій — з ймовірністю 0,85. Яка ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у ціль?

Відповідь. P = 0,997.

Задача 8. Робітник обслуговує одночасно 3 верстати. Ймовірність порушення роботи протягом години для першого дорівнює 0,1, для другого — 0,2, для третього — 0,2. Яка ймовірність того, що:

а) усі три верстати працюватимуть протягом години;

б) хоча б один із них вийде з ладу?

Відповідь. а) P = 0,576; б) P = 0,424.

Задача 9. Для експерименту з підкиданням грального кубика подія A означає випадання парної кількості очок, подія B — випадання більше трьох очок, подія C — випадання п'яти очок.

Вважаючи $P(\{i\})=\dfrac{1}{6}$, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, знайти двома способами ймовірності подій AB, AC, BC і ABC та перевірити чи є події A, B і C попарно незалежними та незалежними у сукупності.

Відповідь. $P(AB)=\dfrac{1}{3}$, $P\,(AC)=0$, $P(BC)=\dfrac{1}{6}$; події A, B і C не є попарно незалежними; не є незалежними у сукупності.

Питання для самоконтролю до розділу 3

1. Продовжіть формули.
$P(A_1 + A_2) =$
$P(A_1 - A_2) =$
$P(A_1 + A_2 + A_3) =$
2. Що називають умовною ймовірністю події A за умови появи події B?
3. Які дві події називають незалежними?
4. Які три події називають незалежними?
5. Які чотири події називають незалежними?
6. Поясніть на прикладі попарну незалежність і незалежність у сукупності?
7. Чи можуть бути події попарно незалежні і при цьому залежні у сукупності? Наведіть приклад.
8. Відомо, що $P(A_1 + A_2) = P(A_1 - A_2)$. Чому дорівнює $P(A_1A_2)$, $P(A_2)$, $P(A_1)$?
9. Для даного ймовірнісного простору скільки ймовірностей має подія A? А умовних ймовірностей?
10. Що можна сказати про незалежність подій A *і* B, якщо
1) $P(B) = 0$;
2) $P(B) = 1$?

Тест 3

1. $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}4$. Події A і B незалежні. Обчислити $P(AB)$.
а) 1,1; б) 0,3; в) 0,28; г) 0; д) відповідь відсутня.

2. $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}4$. Події A і B сумісні. Обчислити $P(A+B)$.
а) 0,3; б) 1,1; в) 0,28; г) 0,82; д) відповідь відсутня.

3. $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}4$. Обчислити $P(A + B)$.
а) 1,1; б) 0,3; в) 0,28; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

4. В деякому класі ймовірність обрати відмінника становить 0,1, а учня, що навчається на «добре і відмінно», — 0,4. Знайти ймовірність того, що обраний учень навчається без оцінок «задовільно» і «незадовільно».
а) 0,5; б) 0,54; в) 0,04; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

5. Двоє стрільців виконали по одному пострілу у мішень. Ймовірність влучення для першого стрільця становить 0,7, а для другого — 0,8. Яка ймовірність того, що не відбудеться жодного влучення?
а) 0,06; б) 0,56; в) 1,5; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

6. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число ділиться на 5 і на 10.

а) 0,1; б) 0,2; в) 0,3; г) 0,4; д) відповідь відсутня.

7. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число ділиться на 5 або на 10.

а) 0,1; б) 0,2; в) 0,3; г) 0,4; д) відповідь відсутня.

8. В першому класі кожен третій учень має блакитні очі, в другому класі — кожен четвертий, а в третьому — половина дітей має блакитні очі. З кожного класу навмання обирають по одній дитині. Яка ймовірність того, що всі три обрані дитини мають блакитні очі?

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{12}$; г) $\frac{1}{24}$; д) відповідь відсутня.

9. Умови завдання 8. Яка ймовірність того, що з трьох обраних дітей хоча б одна особа має блакитні очі?

а) $\frac{11}{12}$; б) $\frac{23}{24}$; в) $\frac{3}{4}$; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

10. В комплекті з 10 м'ячів є 7 нових і 3, якими вже грали. Для першої партії навмання взяли 1 м'яч, для другої — 2 м'ячі. М'ячі після першої і другої партії назад не повертались. Яка ймовірність взяти новий м'яч для третьої партії?

а) $\frac{7}{10}$; б) $\frac{1}{120}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{43}{60}$; д) відповідь відсутня.

Розділ 4. Формула повної ймовірності та формула Байєса

Нехай дано простір (Ω, S, P), випадкову подію $A \subset S$ та сукупність попарно несумісних між собою подій H_1, H_2, …, H_n, сума яких дорівнює вірогідній події Ω. Тоді ймовірність події А обчислюється за *формулою повної ймовірності*

$$P(A)=P(A\cdot\Omega)=P\left(A\left(H_1+H_2+...H_n\right)\right)=P(AH_1+AH_2+...+AH_n)=$$
$$=P(AH_1)+P(AH_2)+...+P(AH_n)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+...$$
$$...+P(H_n)\cdot P(A/H_n)=\sum_{k=1}^{n}P\left(H_k\right)\cdot P\left(A/H_k\right) \qquad (9)$$

За вказаних умов невідомо, разом з якою із несумісних подій H_1, H_2, …, H_n відбуватиметься подія A у кожному випробуванні. Тому кожну з подій H_i називають *гіпотезою*, а $P(H_k)$ — ймовірністю k-ї гіпотези.

Взагалі, умовна ймовірність $P(H_k / A)$ може не дорівнювати $P(H_k)$. Щоб знайти умовну ймовірність $P(H_k / A)$ використовують *формулу Байєса*:

$$P\left(H_k/A\right)=\frac{P\left(H_k\right)\cdot P\left(A/H_k\right)}{P(A)}=\frac{P\left(H_k\right)\cdot P\left(A/H_k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P\left(H_k\right)P\left(A/H_k\right)} \qquad (10)$$

Приклад 1. У першому ящику 30 деталей, з яких 20 стандартних. У другому — 15 деталей, з яких 10 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика.

а) Знайти за класичним способом ймовірність того, що після цього навмання взята деталь з першого ящика є стандартною.

б) Нехай відомо, що з першого ящика вийнято стандартну деталь. Знайти за класичним способом ймовірність того, що до першого ящика перекладено саме:

- стандартну деталь;
- нестандартну деталь.

Розв'язання. Уведемо до розгляду такі події: A = «з першого ящика взято стандартну деталь»; B_1 = «з другого ящика переклали до першого стандартну деталь»; B_2 = «з другого ящика переклали до першого нестандартну деталь».

а) За умовою задачі з першого ящика деталь виймається лише після того, як до нього покладуть деталь, узяту з другого ящика, тобто подія A відбуватиметься лише тоді, коли відбудеться подія B_1 або подія B_2. Події B_1 і B_2 несумісні і у сумі дають вірогідну подію, тобто B_1 і B_2 є гіпотезами. Тому для знаходження ймовірності події A можна скористатися формулою повної ймовірності (9):

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2).$$

Знайдемо необхідні ймовірності:

$$P\left(B_1\right)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3};\ P\left(B_2\right)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3};$$

$$P\left(A/B_1\right)=\frac{21}{31};\ P\left(A/B_2\right)=\frac{20}{31}.$$

Отже,

$$P\left(A\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{21}{31}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{31}=\frac{62}{93}=\frac{2}{3}.$$

б) За умови, що подія A вже відбулася, умовна ймовірність того, що до першого ящика перекладено саме стандартну деталь, така:

$$P\left(B_1/A\right)=\frac{P\left(B_1\right)\cdot P\left(A/B_1\right)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{21}{31}}{\frac{2}{3}}=\frac{21}{31},$$

а нестандартну деталь — така:

$$P\left(B_2/A\right)=\frac{P\left(B_2\right)\cdot P\left(A/B_2\right)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{31}}{\frac{2}{3}}=\frac{10}{31}.$$

Приклад 2. В урні 10 кульок — 3 білих і 7 чорних. Навмання одну за одною виймають дві кульки. Знайти за класичним способом ймовірність того, що друга кулька виявилася чорною, якщо:

а) першу кульку повертали до урни;

б) першу кульку не повертали до урни.

Розв'язання. Нехай подія A_i полягає в тому, що за i-м разом узято білу кульку, а подія B_i — за i-м разом узято чорну кульку.

а) Якщо кульку, яку взято першою, повертають до урни, то умовна ймовірність появи другої чорної кульки не залежить від того, яку кульку узято першою. Тому

$$P(B_2 / A_1) = P(B_2 / B_1) = P(B_2) = \frac{7}{10} = 0,7 .$$

б) Якщо першу кульку не повертати, то умовна ймовірність появи другої чорної кульки вже залежить від того, яку кульку було взято першою. Якщо першою взяли білу кульку, то в урні залишилося 2 білих і 7 чорних кульок. Тому

$$P(B_2 / A_1) = \frac{7}{9} .$$

Якщо першою взяли чорну кульку, то

$$P(B_2 / B_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} .$$

Ймовірність того, що першою взяли білу кульку,

$$P(A_1) = \frac{3}{10} = 0,3 ,$$

чорну кульку –

$$P(B_1) = \frac{7}{10} = 0,7 .$$

Оскільки події A_1 і B_1 несумісні і в сумі дають вірогідну подію, то за формулою повної ймовірності (9) отримуємо

$$P(B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) + P(B_1) \cdot P(B_2 / B_1) =$$

$$= 0,3 \cdot \frac{7}{9} + 0,7 \cdot \frac{2}{3} = 0,7 .$$

Приклад 3. Виготовлені в цеху деталі потрапляють для перевірки стандартності до одного із двох контролерів. Ймовірність того, що деталь потрапить до першого контролера, дорівнює 0,6 до другого — 0,4. Ймовірність того, що деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, другим — 0,98. Деталь при перевірці визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв:

- перший контролер;
- другий контролер.

Розв'язання. Уведемо до розгляду такі події:

A = «деталь признана стандартною»;

B_1 = «деталь перевіряв перший контролер»;

B_2 = «деталь перевіряв другий контролер». Події B_1 і B_2 є гіпотезами.

За умовою задачі:

$$P(B_1) = 0{,}6;\ P(B_2) = 0{,}4;$$
$$P(A\ /\ B_1) = 0{,}94;\ P(A\ /\ B_2) = 0{,}98.$$

За формулою Байєса (10) маємо:

$$P\left(B_1 / A\right) = \frac{P\left(B_1\right)\cdot P\left(A / B_1\right)}{P\left(A\right)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94 + 0{,}4\cdot 0{,}98} \approx 0{,}59\,;$$

$$P\left(B_2 / A\right) = \frac{P\left(B_2\right)\cdot P\left(A / B_2\right)}{P\left(A\right)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}98}{0{,}6\cdot 0{,}94 + 0{,}4\cdot 0{,}98} \approx 0{,}41\,.$$

Задачі до розділу 4

Задача 1. На двох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі: на першій — 30 %, на другій — 70 %. Ймовірність виготовлення стандартної деталі на першій лінії дорівнює 0,9, на другій — 0,5. Усі виготовлені на цих лініях деталі надходять на склад.

а) Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь зі складу є стандартною.

б) Навмання вибрана на складі деталь виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь виготовлена на першій лінії.

Відповідь. а) $P = 0{,}62$; б) $P = \dfrac{27}{62} \approx 0{,}44$.

Задача 2. У першій урні міститься 4 білих і 3 чорних кульки, а в другій — 3 білих і одна чорна кулька. З першої урни навмання вийняли 1 кульку і переклали її в другу. Знайти за класичним способом ймовірність того, що після перекладання навмання вийнята з другої урни кулька буде білою.

Відповідь. $P = \dfrac{5}{7}$.

Задача 3. В урні 8 кульок — 5 білих і 3 чорних. Навмання одна за одною виймаються 2 кульки. Знайти за класичним способом ймовірність того, що друга кулька виявилася чорною, якщо:

а) першу кульку повертали до урни;

б) першу кульку не повертали до урни.

Відповідь. а) $P = \dfrac{3}{8}$; б) $P = \dfrac{3}{8}$.

Задача 4. Із 30 студентів групи, що прийшли на екзамен, 8 підготовлені відмінно, 10 — добре, 8 — задовільно, а решта — незадовільно. Програма екзамену включає 50 питань. Білет містить 3 питання. Студент, підготовлений відмінно, знає всі питання; добре — 40 питань; задовільно — 25 питань і незадовільно — 10 питань.

а) Знайти ймовірність того, що навмання викликаний студент відповість на всі 3 питання білета.

б) Студент відповів на всі питання. Знайти за класичним способом ймовірність того, що студент підготовлений:

- добре;
- задовільно;
- незадовільно.

Відповідь.

$$\text{а) } P = \frac{691}{1470} \approx 0,47 \text{; б) } P\{\text{добре}\} = \frac{247}{691} \approx 0,36,$$

$$P\left\{\text{задовільно}\right\} = \frac{46}{691} \approx 0,07;\ P\{\text{незадовільно}\} = \frac{6}{691} \approx 0,01.$$

Задача 5. До центру статистичних досліджень надходять данні з трьох пунктів: з першого — 50 %, з другого — 30 %, з третього — 20 % всіх даних. Ймовірність припущення помилки при обробці статистичних даних у першому пункті дорівнює 0,1, у другому — 0,05, у третьому — 0,15. Яка ймовірність того, що отримані центром дані достовірні?

Відповідь. $P = 0{,}095$.

Задача 6. В одному класі 5 відмінників, в другому — 3 відмінники, а в третьому класі відмінників немає. З навмання взятого класу вибрали учня. Знайти за класичним способом ймовірність того, що він відмінник, якщо в кожному класі вчиться по 30 дітей.

Відповідь. $P = \frac{4}{45} \approx 0{,}09$.

Задача 7. Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність помилки для першого економіста дорівнює 0,1, для другого — 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий — 60. Під час перевірки у навмання взятому з папки документі виявили помилку. Знайти за класичним способом ймовірність того, що документ складав перший економіст.

Відповідь. $P = 0{,}25$.

Задача 8. Робітник обслуговує 3 верстати. Ймовірність виготовлення бракованої деталі на першому верстаті дорівнює 0,04, на другому — 0,01, а на третьому — 0,07. Продуктивність праці першого верстата втричі перевищує продуктивність другого, а третього — удвічі менша від продуктивності другого.

а) Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь бракована.

б) Узята навмання деталь виявилась бракованою. На якому верстаті найімовірніше вона виготовлена?

Відповідь. а) $P = \frac{11}{300} \approx 0{,}037$; б) на першому верстаті.

Задача 9. Ймовірність того, що під час роботи комп'ютера станеться збій в арифметичному пристрої, у оперативній пам'яті або в пристрої введення співвідносяться, як 2:1:3. Ймовірність зафіксувати збій у цих пристроях дорівнюють відповідно 0,9; 0,75; 0,7. Знайти ймовірність фіксування збою в роботі комп'ютера.

Відповідь. $P = 0{,}775$.

Задача 10. У кошику міститься 20 яблук зеленого та 15 червоного кольору. Навмання виймають 3 яблука з кошика і вкладають замість них 3 яблука червоного кольору. Потім навмання виймають 1 яблуко. Знайти за класичним способом ймовірність того, що вийняте яблуко червоного кольору.

Відповідь. $P \approx 0{,}4776$.

Питання для самоконтролю до розділу 4

1. Запишіть формулу повної ймовірності.
2. Як прийнято називати події $H_i (i = \overline{1,n})$ у формулі повної ймовірності?
3. Якими між собою повинні бути події $H_i (i = \overline{1,n})$ з формули повної ймовірності? (Назвіть дві властивості.)
4. Якою є подія A по відношенню до події $H_i (i = \overline{1,n})$ з формули повної ймовірності?
5. Запишіть теорему Байєса.
6. Коли $P(H_k / A) = P(H_k)$?
7. Відомо, що $P(H_k / A) = P(H_k)$. Чи обов'язково $P(A / H_k) = P(A)$?

Розділ 5. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі

5.1. Формула Бернуллі

Нехай проводиться n послідовних випробувань, ймовірність події A в кожному випробуванні одна й та сама, а випробування незалежні, тобто поява події A в i-му випробуванні не залежить від її появи в інших випробуваннях. Таку серію випробувань називають *схемою Бернуллі.* Схема Бернуллі може бути пов'язаною з будь-яким експериментом: з підкиданням монети, зі стрільбою по мішені тощо.

Якщо випадкова подія A відбувається в кожному випробуванні з ймовірністю $P(A) = p$, тоді вона не відбувається з ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що при n випробуваннях за схемою Бернуллі подія A відбудеться m разів визначається за *формулою Бернуллі*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \tag{11}$$

з якої випливають наступны наслыдки:

- Ймовірність появи події A в n випробуваннях m разів, де число m перебуває між числами k_1 та k_2, $0 \le k_1 \le k_2 \le n$, знаходиться за формулою:

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2).$$

- Ймовірність появи події A в n випробуваннях хоча б один раз

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n. \tag{12}$$

- Найімовірніша кількість m_0 появи події A в n випробуваннях визначається з нерівностей:

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p. \tag{13}$$

- Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A відбудеться хоча б один раз, знаходиться за формулою

$$n > \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - p)}. \tag{14}$$

П р и м і т к а. Події A та A_i — «поява події A в i-му випробуванні», $i = 1, 2, ..., n$, пов'язані з різними експериментами, а тому й з різними ймовірнісними просторами: A — з простором (Ω, S, P), а A_i — з простором (Ω_n, S_n, P_n).

При цьому:

1) кожне випробування, з яким пов'язаний простір (Ω_n, S_n, P_n), складене з n послідовних випробувань, кожне з яких пов'язане з простором (Ω, S, P);

2) $\Omega_n = \{(\omega_1, \ldots \omega_n): \omega_i \in \Omega,\ 1 \le i \le n\}$;

3) $A_i = \{(\omega_1, \ldots \omega_n) \in \Omega_n: \omega_i \in A\} \in S_n$, для кожної події $A \in S$;

4) $P_n(A_i) = P(A) = p$, $1 \le i \le n$;

5) події A_i, $1 \le i \le n$ є незалежними щодо P_n і саме тоді n послідовних випробувань називають незалежними.

Приклад 1. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з яких 0,8. Включення приладу означає включення усіх блоків. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного; i-те випробування полягає у включенні i-го блоку, $i = 1, 2, ...,10$. Знайти ймовірність того, що після включення усіх блоків зафіксовано:

а) відмову двох блоків;

б) відмову хоча б одного блоку;

в) відмову не менше двох блоків.

Знайти найімовірнішу кількість блоків, що можуть вийти з ладу при включенні приладу.

Розв'язання. Блоки можна не розрізняти. Позначимо подію A = «відмова блоку при включенні». Тоді

$$P(A) = p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Тому $q = 0{,}8$.

За умовою задачі одне включення приладу можна розглядати як 10 включень блоку за схемою Бернуллі, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p. Застосовуючи формулу Бернуллі (11) та наслідки із неї, матимемо:

а) $P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = 45 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^8 \approx 0{,}302$;

б) $P_{10}(1 \le m \le 10) = 1 - q^{10} = 1 - (0{,}8)^{10} \approx 0{,}893$;

в) $P_{10}\left(2 \leq m \leq 10\right) = 1 - [P_{10}(0) + P_{10}(1)] = 1 - C_{10}^{0} \cdot \left(0,2\right)^{0} \cdot \left(0,8\right)^{10} -$
$- C_{10}^{1} \cdot \left(0,2\right)^{1} \cdot \left(0,8\right)^{9} \approx 0,624.$

Найімовірнішу кількість блоків, що відмовлять при включенні приладу, знайдемо з нерівностей

$$n\ \ p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p,$$

тобто

$$10 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \leq m_0 \leq 10 \cdot 0{,}2 + 0{,}2.$$

Отже, зважаючи що $m_0 \in Z$,

$$m_0 = 2.$$

Приклад 2. Оператор за хвилину відправляє 3 повідомлення. Через скільки хвилин ймовірність відправлення оператором хоча б одного помилкового повідомлення буде не меншою 0,952, якщо для кожного повідомлення ймовірність помилки оператора дорівнює 0,02?

Розв'язання. Позначимо подію A = «відправлення помилкового повідомлення». Тоді $P(A) = p = 0{,}02$. За формулою (14) визначимо, скільки повідомлень має відправити оператор, щоб із ймовірністю 0,952 можна було стверджувати, що він відправить хоча б одне помилкове повідомлення:

$$n > \frac{\ln\left(1 - 0{,}952\right)}{\ln\left(1 - 0{,}02\right)} > 150\,.$$

Отже, оператор має відправити понад 150 повідомлень, а тому через кожні 150 : 3 = 50 хвилин ймовірність відправлення хоча б одного помилкового повідомлення буде не меншою за 0,952.

5.2. Граничні теореми у схемі Бернуллі

Нехай виконуються умови схеми Бернуллі і проводиться n послідовних випробувань. Для наближеного обчислення ймовірності появи події A у цих n випробуваннях m разів при великих n і малих p таких, що $np < 10$, доцільно використовувати *формулу Пуассона*:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}; \lambda = np. \tag{15}$$

Значення функції $P_n(m)$ з формули Пуассона наведено у **додатку 3**.

Локальною функцією Лапласа називають функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{16}$$

Інтегральною функцією Лапласа називають функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{17}$$

Значення функцій $\varphi(x)$ та $\Phi(x)$ наведено відповідно у **додатках 1** і **2**, а властивості функції $\Phi(x)$ — у ***розділі 7***.

Локальна теорема Муавра—Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події A m разів може бути наближено знайдена за формулою

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{18}$$

де $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x)$– локальна функція Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра—Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події А не менше m_1 і не більше m_2 разів можна наближено знайти за формулою

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{19}$$

де $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x)$ — інтегральна функція Лапласа.

Теорема Бернуллі. Нехай у схемі Бернуллі $p = P(A)$ — ймовірність події A, а n — кількість послідовних випробувань, в яких подія A відбувається $m = m(n)$ разів. Тоді для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) = 0, \tag{20}$$

тобто подія, для якої відхилення $\frac{m}{n}$ від p в серії з n випробувань визначається формулою

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \ge \varepsilon,$$

при великих значеннях n практично неможлива.

Отже, протилежна подія

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

при великих n практично достовірна:

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{20*}$$

Ймовірності P_n з формул (20) і (20*) можна наближено знайти за інтегральною теоремою Муавра—Лапласа

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = P\left(np - \varepsilon n \le m \le np + \varepsilon n\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{19*}$$

Примітка. Формули (18), (19), (19*) доцільно застосовувати за умови n > 100, npq > 20.

Приклад 1. Книгу надруковано тиражем 90 000 примірників. Ймовірність неправильного брошурування книги дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих книг.

Розв'язання. Брошурування книг можна розглядати як випробування, що задовольняє умови схеми Бернуллі. Кількість випробувань n велика, а ймовірність кожного випробування p незначна. В даному випадку доцільно застосувати формулу Пуассона.

Згідно умови задачі маємо:

$$n = 90000,\ p = 0{,}0001.$$

Отже, при $\lambda = np = 9$ (**д о д а т о к 3**) маємо:

$$P_{90000}(5) = \frac{9^5}{5!}e^{-9} \approx 0{,}0607\ .$$

Такий самий результат можна одержати, якщо використати функцію ПУАССОН програми *MS Excel*. Розв'язання задачі з використанням зазначеної функції подане на *рис. 12*.

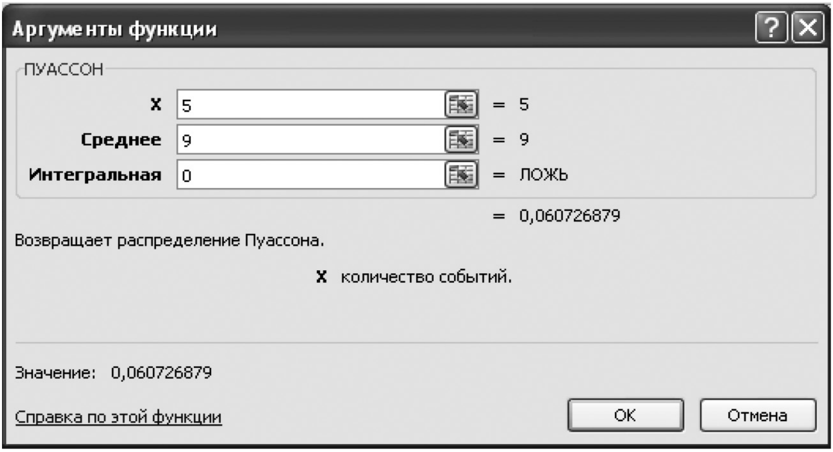


Рис. 12. MS Excel. Формула Пуассона

Зазначимо також, що, якщо при використанні функції ПУАССОН в MS Excel змінній ИНТЕГРАЛЬНОЕ надати значення «істина», то обчислюється не $P_n(m)$, а $P_n(k \le m)$. В такому випадку для останньої задачі буде обчислено $P_{90000}(k \le 5)$.

Приклад 2. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок кратна трьом, з'явиться 267 разів?

Розв'язання. У задачі число випробувань $n = 800$ досить велике. Вважаємо, що випробування (підкидання кубика) є незалежними. Ймовірність того, що при кожному підкиданні кубика випаде кількість очок кратна трьом, дорівнює $p = \frac{1}{3}$, а $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. Тому для обчислення шуканої ймовірності використовуємо локальну теорему Муавра—Лапласа. Для цього знайдемо

$$x = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = 0{,}025.$$

Отже,

$$P_{800}(267) = \frac{3}{40}\varphi(0{,}025) = \frac{3}{40} \cdot 0{,}3988 \approx 0{,}030.$$

Для розв'язання цієї задачі можна використати стандартну функцію MS Excel, а саме — НОРМРАСП і одержане значення помножити на $\frac{3}{40}$ (*рис. 13*).

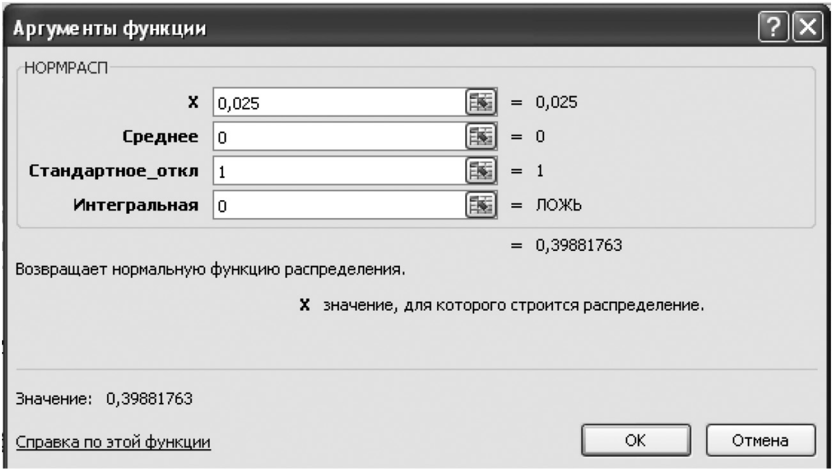


Рис. 13. MS Excel. Локальна теорема Муавра—Лапласа

Приклад 3. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться не менше 260 разів і не більше 274 разів?

Розв'язання. Для знаходження P_{800} $(260 \le m \le 274)$ застосуємо інтегральну теорему Муавра—Лапласа. Визначимо x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{260 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = -\frac{20}{40} = -0,5;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{274 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{22}{40} = 0,55.$$

Отже, використовуючи **додаток 1,** знаходимо Ф(0,55) і Ф (0,5). Оскільки $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то

$$P_{800}(260 \le m \le 274) = \Phi(0,55) - \Phi(-0,5) = 0,2088 + 0,1915 = 0,4003.$$

Якщо для розв'язання задачі скористатись вже відомою стандартною функцією MS Excel, а саме НОРМРАСП, то можна окремо обчислити Ф(0,55) та Ф(0,5). При цьому від одержаних значень потрібно відняти 0,5 (*рис. 14*) і далі провести обчислення P_{800} $(260 \le m \le 224) = \Phi\ (0,55) + \Phi\ (0,5)$.

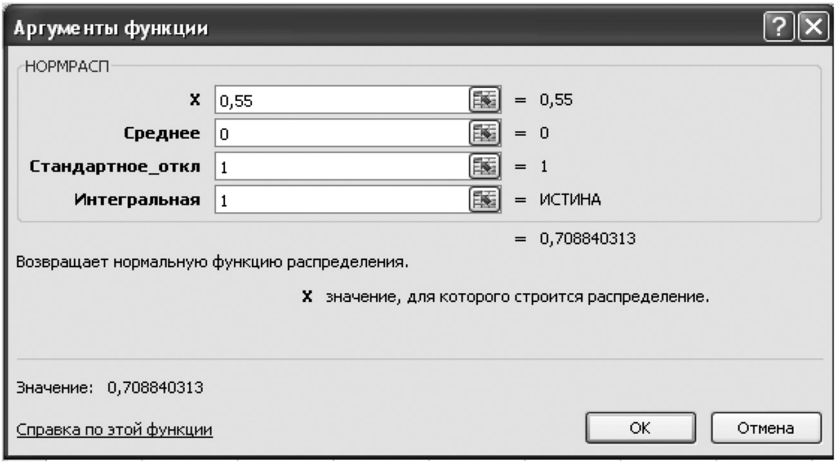


Рис. 14. MS Excel. Інтегральна теорема Муавра—Лапласа

Приклад 4. Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04.

Розв'язання. За умовою задачі

$$n = 625;\ p = 0,8;\ q = 0,2;\ \varepsilon = 0,04.$$

Потрібно знайти $P_n\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \le 0,04\right)$.

За інтегрально Теоремою Муавра – Лапласа (формула (19*))

$$P_n\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \le 0,04\right) = 2\Phi\left(0,04\sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$

$$= 2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876.$$

Приклад 5. Ймовірність появи деякої події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти кількість випробувань n, при якій з ймовірністю 0,7698 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02.

Розв'язання. За умовою задачі

$$p = 0,5;\ q = 0,5;\ \varepsilon = 0,02.$$

Потрібно знайти кількість випробувань n, для якої

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - 0,8\right| \le 0,02\right) = 0,7698.$$

За інтегрально Теоремою Муавра—Лапласа (формула (19*))

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| \le 0,02\right) = 2\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{n}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = 0,7698 \cdot$$

Звідси

$$\Phi\left(0,04\sqrt{n}\right) = 0,3843.$$

Визначивши за **додатком 1** аргумент інтегральної функції Лапласа, при якому функція Лапласа набуває значення 0,3843, маємо рівняння

$$0,04\sqrt{n} = 1,2 .$$

Отже,

$$n = \left(\frac{1,2}{0,04}\right)^2 = 900 .$$

Задачі до розділу 5

Задача 1. Оглядову лекцію мають прослухати 100 студентів. Ймовірність бути присутнім на лекції для кожного студента дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що на лекцію прийде більше половини студентів.

Відповідь. $P_{100}(m > 50) \approx 0,99998$.

Задача 2. Ймовірність вчасної реалізації зі складу однієї пари взуття дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що вчасно буде реалізовано не менше 75 пар, якщо на склад завезено 100 пар взуття. Знайти найімовірнішу кількість вчасно реалізованих пар взуття.

Відповідь. $P_{100}(m \geq 75) \approx 0,8943$; $m_0 = 80$.

Задача 3. Зі статистичних даних відомо, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної особи дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що із 100 перевірених осіб хворими виявляться від 20 до 50 осіб?

Відповідь. $P_{100}(20 \leq m \leq 50) \approx 0,00043$.

Задача 4. До магазину зайшли 8 покупців. Ймовірність того, що будь-який з них не піде з магазину без покупки, дорівнює 0,4.

а) Знайти ймовірність того, що троє з покупців дещо куплять.

б) Яка ймовірність того, що жоден з них нічого не купить?

Відповідь. а) $P_8(3) \approx 0,2787$; б) $P_8(0) \approx 0,0168$.

Задача 5. Знайти ймовірність того, що серед 100 осіб буде не більше 40 брюнетів, якщо близько 30 % населення — брюнети.

Відповідь. $P_{100}\,(m \le 40) \approx 0{,}9855$.

Задача 6. У процесі виробництва ймовірність дефектів у кожній партії продукції складає 0,1. Яка ймовірність того, що з десяти партій дефекти будуть мати менше двох партій?

Відповідь. $P_{10}\,(m < 2) \approx 0{,}7361$.

Задача 7. Знайти ймовірність того, що серед 1000 новонароджених буде 480 дівчаток, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515.

Відповідь. $P_{1000}\,(480) \approx 0{,}024$.

Задача 8. Припустимо, що ймовірності народитися у будь-який з днів року однакові. Знайти ймовірність того, що серед 500 учнів школи:

а) троє народилися 8 березня;

б) жоден не народився 1 січня.

Відповідь. а) $P_{500}\,(3) \approx 0{,}1089$; б) $P_{500}\,(0) \approx 0{,}2541$.

Задача 9. Ймовірність влучення у літак з гвинтівки при кожному пострілі дорівнює 0,001. Здійснюється 3000 пострілів. Знайти ймовірність того, що буде хоча б одне влучення.

Відповідь. $P_{3000}\,(m \ge 1) \approx 0{,}9502$.

Задача 10. Серед 5 студентів проводиться психологічний тест на визначення типу характеру людини. Ймовірність того, що за результатами тестування буде правильно визначено тип характеру кожної людини, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що буде правильно визначено тип характеру лише трьох протестованих студентів.

Відповідь. $P_5\,(3) = 0{,}0729$.

Задача 11. В одержаній партії текстильних виробів 0,6 % браку. Яка ймовірність при випадковому відборі 1000 виробів виявити:

а) шість бракованих виробів;

б) хоча б один бракований виріб?

Відповідь. а) $P_{1000}(6) \approx 0{,}1606$; б) $P_{1000}(m \geq 1) \approx 0{,}9975$.

Питання для самоконтролю до розділу 5

1. Сформулюйте дві вимоги «схеми Бернуллі».
2. Запишіть формулу Бернуллі.
3. Як обчислюється ймовірність появи події A в серії з n випробувань від k_1 до k_2 разів за умов схеми Бернуллі?
4. Яка ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях хоча б один раз за умов схеми Бернуллі?
5. Запишіть нерівність, за допомогою якої визначають найімовірнісну кількість появи події A в n випробуваннях за умов схеми Бернуллі.
6. За якою формулою можна визначити найімовірнішу кількість випробувань n, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A за умов схеми Бернуллі відбудеться хоча б один раз, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні p?
7. Запишіть формулу Пуассона.
8. Чому дорівнює параметр λ у формулі Пуассона?
9. Як можна обчислити значення функції $P_n(m)$ з формули Пуассона?
10. Яку функцію називають локальною функцією Лапласа?
11. Яку функцію називають інтегральною функцією Лапласа?
12. Як обчислюють значення локальної та інтегральної функцій Лапласа?
13. Запишіть локальну теорему Муавра—Лапласа.
14. Запишіть інтегральну теорему Муавра—Лапласа.
15. Що можна сказати про парність/непарність локальної та інтегральної функцій Лапласа?
16. Як діяти, якщо в таблицях для інтегральної функції Лапласа відсутнє значення необхідного аргументу?
17. Запишіть теорему Бернуллі.
18. Які функції програми MS Excel можна використовувати при розв'язанні задач про повторні незалежні випробування?
19. Який зв'язок між теоремою Бернуллі та інтегральною теоремою Муавра—Лапласа?

Тест 4

1. Гіпотези, які висуваються в задачі, що передбачає використання формули повної ймовірності, обов'язково мають задовольняти такі умови (обрати набір, що містить всі необхідні умови):
а) їх має бути не менше п'яти;
б) всі гіпотези попарно незалежні і в сумі складають простір елементарних подій;
в) всі гіпотези попарно незалежні;
г) гіпотези в сумі складають простір подій;
д) відповідь відсутня.

2. В групі 15 студентів. Ймовірність того, що обраний студент чоловічої статі — 0,3. Необхідно обчислити ймовірність того, що в групі 7 хлопців. Для обчислення потрібно застосувати:
а) формулу Бернуллі:

$$P_{15}(7) = C_{15}^{7} \cdot 0,3^{7} \cdot 0,7^{8};$$

б) формулу Пуассона:

$$P_{15}(7) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \lambda = n \cdot p = 15 \cdot 0,3 = 4,5$$
$$m = 7;$$

в) локальну теорему Муавра—Лапласа:

$$P_{15}(7) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), x = \frac{7 - 15 \cdot 0,3}{\sqrt{15 \cdot 0,3 \cdot 0,7}},$$
$$n = 15, p = 0,3, q = 0,7;$$

г) інтегральну теорему Муавра—Лапласа:

$$P_{15}(7) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \ x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}; \ i = 1,2;$$

д) відповідь відсутня.

3. Ймовірність зробити помилку на одній сторінці при наборі тексту становить 0,001. Перевіряється книжка, що містить 850 сторінок. Обчислюється ймовірність того, що в книжці будуть помилки на 7 сторінках. Для обчислення зазначеної ймовірності доцільно скористатись:
а) формулою Бернуллі;
б) локальною теоремою Муавра—Лапласа;
в) формулою Пуассона;
г) інтегральною теоремою Муавра—Лапласа;
д) відповідь відсутня.

4. Досліджується група із 250 осіб на наявність певної ознаки. Ймовірність того, що особа має цю ознаку, становить 0,6. Обчислюється ймовірність того, що в даній групі досліджувану ознаку мають від 130 до 150 осіб. Для обчислення зазначеної ймовірності доцільно застосувати:

а) формулу Пуассона;
б) формулу Бернуллі;
в) локальну теорему Муавра—Лапласа;
г) інтегральну теорему Муавра—Лапласа;
д) відповідь відсутня.

5. Деяка задача для обчислення ймовірності потребує використання локальної теореми Муавра—Лапласа:

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

При обчисленні значення x для функції $\varphi(x)$ одержали значення $x = -2{,}3$. Відповідна таблиця значень функції $\varphi(x)$ не містить від'ємних значень аргументу. Потрібно:

а) за таблицями обчислити $\varphi(2{,}3)$ і скористатись властивістю $\varphi(-x)=-\varphi(x)$;
б) за таблицями обчислити $\varphi(2{,}3)$ і скористатись властивістю $\varphi(-x)=\varphi(x)$;
в) шукати іншу формулу оскільки розв'язати задачу з такими значеннями не можливо;
г) скористатись формулою $\varphi(-x)=1-\varphi(x)$;
д) відповідь відсутня.

6. При розв'язанні задачі виникла потреба обчислити значення інтегральної функції Муавра—Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x_2}{2}}dx$ для $x = -0{,}4$. Потрібно:

а) використати формулу $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$;
б) скористатись властивістю $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ і обчислити $\Phi(0{,}4)$ за таблицею $\Phi(x)$;
в) скористатись властивістю $\Phi(-x) = \Phi(x)$ і обчислити $\Phi(0{,}4)$ за таблицею;
г) шукати іншу формулу (теорему) для розв'язання задачі;
д) відповідь відсутня.

7. При розв'язанні задачі виникла необхідність обчислити значення інтегральної функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x_2}{2}}dx$ для $x = 7{,}3$. Останнє значення аргументу x, що наведено в таблицях значень функції $\Phi(x)$, дорівнює $x = 5$ і $\Phi(5) = 0{,}4999$. В такій ситуації потрібно:

а) шукати інший спосіб розв'язання задачі;
б) скористатись формулою Φ (7) = Φ (5) + Φ (2);
в) замість Φ (7) взяти Φ (5) = 0,4999;
г) виконати будь-яку з дій б) чи в) правильно;
д) відповідь відсутня.

8. Для деякої задачі виконуються умови схеми Бернуллі при $n = 9$, $p = 0{,}4$. Потрібно знайти P_9 ($5 \le m \le 7$). Для обчислення зазначеної ймовірності необхідно:
а) скористатись інтегральною теоремою Муавра—Лапласа;
б) скористатись тричі локальною теоремою Муавра—Лапласа для обчислень P_9 (5), P_9 (6), P_9 (7) і одержані результати додати;
в) скористатись тричі формулою Бернуллі для обчислень P_9 (5), P_9 (6), P_9 (7) і одержані результати додати;
г) будь-яка з дій а), б), в) є правильною; д) відповідь відсутня.

9. В деякій місцевості з ймовірністю 0,2 зустрічаються особи, що мають русяве волосся і блакитні очі одночасно. Яка ймовірність того, що в групі з 10 осіб, які навмання відібрані в зазначеній місцевості, не буде жодної особи з русявим волоссям і блакитними очима одночасно?
а) 0,5; б) 0,2; в) 0,8; г) $1 - 0{,}2^{10}$; д) відповідь відсутня.

10. В кожному випробуванні подія A може відбутись з ймовірністю $p = 0{,}4$. Знайти найімовірніше число появи події A в серії з 25 випробувань за умов схеми Бернуллі:
а) 12; б) 10; в) 11; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

Частина II
Випадкові величини

Розділ 6. Поняття випадкової величини та функції розподілу. Дискретні випадкові величини

Нехай побудовано ймовірнісну модель (Ω, S, P) певного випадкового експерименту (пов'язаного з певним реальним випадковим явищем).

Випадковою величиною (стосовно (Ω, S, P)) називають функцію $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, якщо для будь-якого числа x множина розв'язків нерівності $X(\omega) < x$ є подією з простору S.

Множину $\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\}$ розв'язків нерівності $X(\omega) < x$ коротко позначають $X < x$.

Сума, різниця, добуток та частка (знаменник не дорівнює нулю) випадкових величин (стосовно заданого простору (Ω, S, P)) також є випадковою величиною.

Якщо кожна підмножина $A \subset \Omega$ є подією простору S, то кожна функція $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ є випадковою величиною. В іншому разі це не так.

Якщо $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ — випадкова величина, то для кожного числа x існує ймовірність $P(X < x)$ — ймовірність влучення значення випадкової величини $X(\omega)$ у проміжок $(-\infty; x)$. Тому кожній випадковій величині $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ відповідає функція

$$F_X(x) = P(X < x),\ \omega \in (-\infty; +\infty),$$

яка називається *функцією розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X*, або *функцією розподілу випадкової величини X*, або *функцією розподілу $F_X(x)$*.

З властивостей ймовірностей випливають **основні властивості функції розподілу $F_X(x)$:**

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$

2. $F_X(x)$ неспадна функція, тобто $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$.

3. $\lim\limits_{x \to x_0 -} F_X(x) = F(x_0)$, тобто $F_X(x)$ неперервна зліва у кожній точці $x_0 \in (-\infty; +\infty)$.

Якщо $X(\omega)$, $\omega\in\Omega$ — випадкова величина, то для будь-яких чисел a і b існують ймовірності

$$P(a \le X < b) = P(\{\omega\in\Omega : a \le X(\omega) < b\}) = F_X(b) - F_X(a);$$

$$P(a \le X \le b) = P(\{\omega\in\Omega : a \le X(\omega) \le b\}) = F_X(b+0) - F_X(a);$$

$$P(a < X \le b) = P(\{\omega\in\Omega : a < X(\omega) \le b\}) = F_X(b+0) - F_X(a+0);$$

$$P(a < X < b) = P(\{\omega\in\Omega : a < X(\omega) < b\}) = F_X(b) - F_X(a+0);$$

$$P(X = a) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = a\}) = F_X(a+0) - F_X(a).$$

Випадкова величина $X(\omega)$, $\omega\in\Omega$ називається *дискретною*, якщо існують такі її значення x_k, $k = 1, 2, \ldots$, що $P(X = x_k) = p_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ і $\sum_k p_k = 1$. При цьому кажуть про *дискретний розподіл ймовірностей* на множині значень випадкової величини X або коротко *випадкова величина X має дискретний розподіл*. Якщо $x_1 < x_2 < \ldots$, то такий розподіл часто задають у вигляді таблиці (*табл. 6.1*).

Таблиця 6.1

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Таку таблицю називають *рядом розподілу* ймовірностей на множині значень випадкової величини X або коротко *рядом розподілу випадкової величини X*. Якщо на площині XOY сполучити послідовно точки (x_1, p_1), (x_1, p_1), $\ldots$, то дістанемо ламану, яку називають *многокутником розподілу* випадкової величини X.

Для дискретної випадкової величини $X(\omega)$, $\omega\in\Omega$ зі значеннями x_k, для яких $P(X = x_k) = p_k > 0$ і $\sum_k p_k = 1$, функція розподілу — $F_X(x) = \sum_{x_k<x} p_k$, де обчислення суми здійснюється за тими номерами k, для яких $x_k < x$.

Якщо $x_1 < x_2 < \ldots$, тобто числа x_k впорядковані за величиною, то графік функції розподілу є кусково-сталим (*рис. 15*):

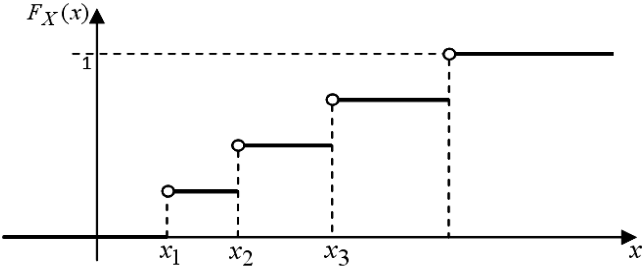


Рис. 15

Для побудови дискретних розподілів ймовірностей, многокутників розподілу та графіка функції розподілу доцільно використовувати комп'ютерні засоби (наприклад, програмний засіб GRAN1).

Для дискретної випадкової величини $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ важливими є не всі значення, а лише ті числа x_k, $k = 1, 2, \ldots$ для яких $P\ (X = x_k) = p_k > 0$ і $\sum\limits_k p_k = 1$. Тому часто випадкову величину X вважають заданою, коли відомі саме такі значення x_k, $k = 1, 2, \ldots$ При цьому відповідна ймовірнісна модель (Ω, S, P) може бути й невідомою.

Приклад 1. Експеримент полягає у підкиданні однорідного грального кубика.

Нехай величина X дорівнює кількості очок, що випали при одному підкиданні, а величина Y — кількості шісток при одному підкиданні.

а) Побудувати ймовірнісну модель (Ω, S, P), стосовно якої X і Y є випадковими величинами.

б) Побудувати ряди розподілу, многокутники розподілу, функції розподілу випадкових величин X *і* Y.

в) Побудувати ймовірнісну модель (Ω, S, P), стосовно якої X і Y не є випадковими величинами.

Розв'язання. а) Вважаємо, що $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, кожна множина $\{i\}$ є подією простору S і $P(\{i\}) = P(X = i) = \dfrac{1}{6}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$.

б) Випадкова величина X може набувати значень 1, 2, 3, 4, 5 і 6 з однаковими ймовірностями $p = \frac{1}{6}$. Отже, ряд розподілу випадкової величини X має такий вигляд (*табл. 6.2*):

Таблиця 6.2

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

,

а многокутник розподілу зображено на *рис. 16.*

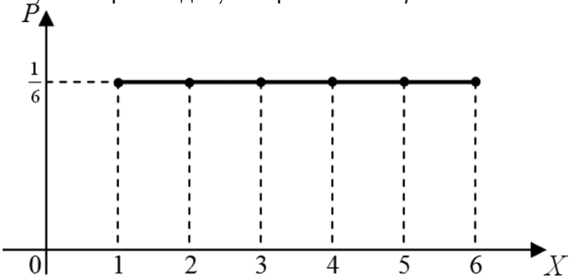


Рис. 16

Скориставшись формулою для $F(x)$, отримаємо

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{1}{6}, & 1 \le x < 2; \\ \frac{2}{6}, & 2 \le x < 3; \\ \frac{3}{6}, & 3 \le x < 4; \\ \frac{4}{6}, & 4 \le x < 5; \\ \frac{5}{6}, & 5 \le x < 6; \\ 1, & x \ge 6. \end{cases}$$

Графік функції розподілу $F_X(x)$ зображено на *рис. 17.*

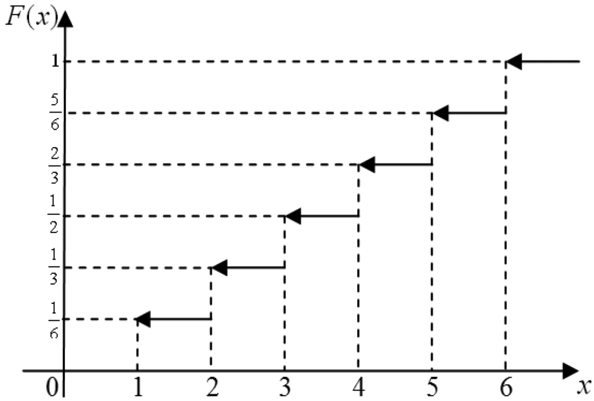


Рис. 17

Щодо випадкової величини *Y*, маємо $\{\omega \in \Omega \ : \ Y(\omega) = 1\} = \{6\}$, $P(Y=1)=P(\{6\})=\dfrac{1}{6}$, а $P(Y=0) = 1 - P(Y \neq 0) = 1 - P(Y = 1) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Ряд розподілу випадкової величини *Y* є таким:

Таблиця 6.3

y_i	0	1
p_i	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Многокутник розподілу випадкової величини *Y* зображено на *рис. 18.*

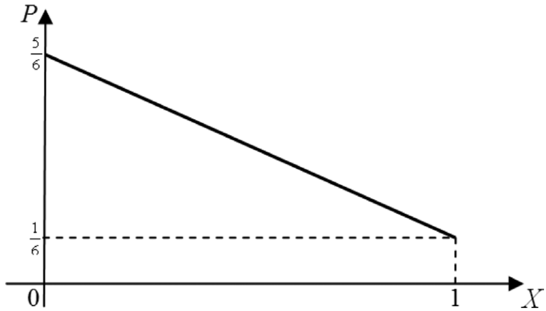


Рис. 18

Функція розподілу випадкової величини *Y* має вигляд:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{5}{6}, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Графік функції $F_Y(x)$ зображено на *рис. 19.*

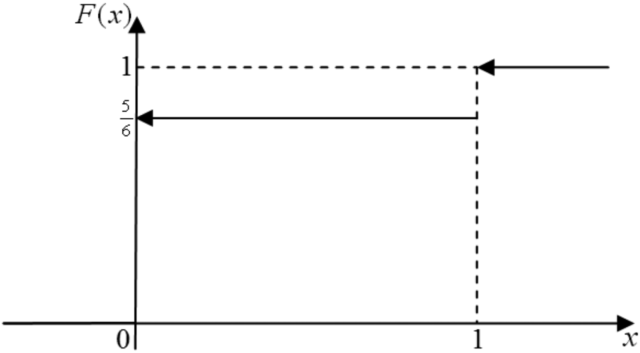


Рис. 19

в) Якщо $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а серед подій простору *S* немає множини $\{6\}$, то і *X*, і *Y* не є випадковими величинами, оскільки множини $X < 6$ та $Y < 1$ не є випадковими подіями.

Найважливішими є такі типи дискретних розподілів: рівномірний, біноміальний, показниковий, геометричний, гіпергеометричний.

Біноміальний розподіл (*розподіл Бернуллі*) — це розподіл випадкової величини, яка набуває значення $i \in \{0, 1, ..., n\}$ з ймовірностями

$$p_i = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}, \tag{21}$$

де число $p \in (0;1)$ — фіксоване. Біноміальний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості «успіхів» у серії з *n* незалежних випробувань, у кожному з яких «успіх» відбувається з ймовірністю $p \in (0;1)$.

Рівномірний розподіл — це розподіл випадкової величини, яка набуває *n* різних значень x_i з однаковими ймовірностями

$$p = \frac{1}{n}, \text{ i} = 1, 2, \ldots, n. \quad (22)$$

Показниковий розподіл (*розподіл Пуассона*) — це розподіл випадкової величини, яка набуває значень $k \in \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ з ймовірностями

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (23)$$

де число $\lambda > 0$ — фіксоване.

Геометричний розподіл — це розподіл випадкової величини, що набуває значень $k \in N$ з ймовірностями $p_k = q^{k-1} \cdot p$, $k = 1, 2, \ldots$, де число $p \in (0;1)$ — фіксоване, а $q = 1 - p$. Геометричний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості спроб до першого «успіху» в серії незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p.

Гіпергеометричний розподіл — це розподіл випадкової величини, яка набуває значень $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ з ймовірностями

$$p_k = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}, \quad (24)$$

де $n \geq m$, $N \geq n$.

Гіпергеометричний розподіл має, наприклад, така випадкова величина. Нехай у ящику міститься N однакових за фізичними властивостями кульок, серед яких S білих і $(N - S)$ чорних. З ящика навмання виймається m кульок. Тоді випадкова величина X, яка дорівнює кількості білих кульок серед m вийнятих, має гіпергеометричний розподіл (*рис. 20*) за умови рівноймовірності вийняти будь-яку з наявних кульок:

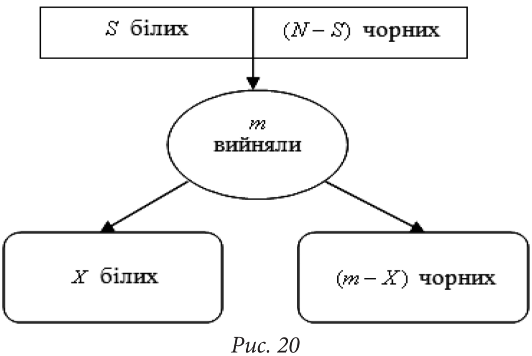


Рис. 20

Приклад 2. Нехай випадкова величина X дорівнює кількості номерів, угаданих гравцем у лотереї «6 із 39». Побудувати ряд розподілу випадкової величини X. Знайти значення функції розподілу в точці $x = 3$.

Розв'язання. Випадкова величина X має гіпергеометричний розподіл. Процес розіграшу можна змоделювати так: у лототроні (ящику) міститься $N = 39$ однакових за фізичними властивостями кульок, серед яких $S = 6$ «білих» (так можна називати кульки, з виграшними номерами) і $N - S = 33$ «чорних». Вважатимемо, що кульки добре перемішані, тобто рівномірно витягнути будь-яку з наявних кульок. Тому можна вважати, що із 39 кульок навмання виймається $m = 6$ шт. Тоді X — це кількість «білих» кульок серед шести вибраних (номерів, які загадані гравцем).

Очевидно, випадкова величина X набуває значень від 0 до 6, причому

$$P(X = i) = \frac{C_6^i \cdot C_{33}^{6-i}}{C_{39}^6}.$$

Виконавши підрахунки для $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, отримаємо (*табл. 6.4*):

Таблиця 6.4

i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1107568}{3262623}$	$\frac{1424016}{3262623}$	$\frac{613800}{3262623}$	$\frac{109120}{3262623}$	$\frac{7920}{3262623}$	$\frac{198}{3262623}$	$\frac{1}{3262623}$

Значення функції розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X у точці $x = 3$.

$$F_X(3) = P\{X < 3\} = P\{X = 0 \text{ або } X = 1 \text{ або } X = 2\} =$$
$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}.$$

Оскільки виграшними вважають лотерейні квитки, у яких не менше 3 вгаданих номерів, то ймовірність нічого не виграти, заповнивши один лотерейний квиток, дорівнює

$$\frac{1107568}{3262623} + \frac{1424016}{3262623} + \frac{613800}{3262623} = \frac{3145384}{3262623} \approx 0{,}9641.$$

Задачі до розділу 6

Задача 1. Нехай X — випадкова величина, що дорівнює кількості хлопців у навмання вибраній сім'ї з трьома дітьми. Вважаючи народження хлопця й дівчини рівноймовірними подіями, побудувати ряд розподілу та многокутник розподілу ймовірності випадкової величини X, а також обчислити ймовірність того, що в сім'ї буде більше хлопчиків, ніж дівчаток.

Таблиця 6.5

Відповідь.

X_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

;

$$P(\text{«хлопчиків більше»}) = \frac{1}{2}.$$

Задача 2. Нехай X — випадкова величина, яка дорівнює кількості випадань грані «6» при двох підкиданнях кубика. Побудувати ряд розподілу, многокутник розподілу та функцію розподілу випадкової величини X, а також графік цієї функції, вважати випадання кожної цифри рівноймовірним.

Таблиця 6.6

Відповідь.

X_i	0	1	2
p_i	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{25}{36}, & 0 < x \le 1; \\ \dfrac{35}{36}, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2, \end{cases}$$

графік функції розподілу зображено на *рис. 21*.

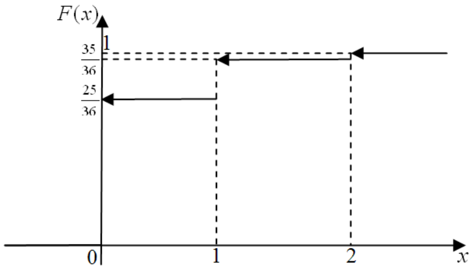


Рис. 21

Задача 3. Стрілець робить чотири постріли по мішені. Випадкова величина X — кількість влучень. Вважаючи, що ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7, знайти ряд розподілу і многокутник розподілу випадкової величини X та ймовірність того, що влучень буде більше, ніж промахів.

Таблиця 6.7

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

P («влучень більше») = 0,6517.

Задача 4. Два стрільці роблять по одному незалежному пострілу в одну мішень. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, а для другого — 0,5. Знайти ряд розподілу і многокутник розподілу випадкової величини X — кількості влучень у мішень, а також ймовірність того, що кількість влучень дорівнюватиме кількості промахів.

Таблиця 6.8

Відповідь.

x_i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

P («кількість влучень дорівнює кількості промахів») = 0,5.

Задача 5. Студент підкидає монету до першого випадання аверсу, ймовірність випадання якого дорівнює $\frac{1}{2}$ для кожного підкидання. Випадкова величина X — кількість підкидань. Знайти розподіл випадкової величини X. Яка ймовірність того, що студент змушений буде зробити більше 10 підкидань?

Відповідь. $P(X=k)=\frac{1}{2^k}$, $k=1, 2, \dots$; $P(X>10)=\frac{1}{1024}$.

Задача 6. Гральний кубик підкидається до першої появи п’ятірки. Випадкова величина X — кількість підкидань кубика. Знайти ряд розподілу випадкової величини X і найімовірнішу кількість підкидань за умови рівноймовірності випадання кожної цифри.

Відповідь. $P(X=k)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$, $k=1, 2, \dots$; $m_0=1$.

Задача 7. Студент вивчив 10 білетів з 25 і намагається скласти іспит. Випадкова величина X — кількість спроб для успішного складання. Знайти ряд розподілу випадкової величини X та ймовірність того, що студента відрахують за академзаборгованість (іспит дозволяється перескладати двічі) за умови рівноймовіності вибрати кожен з білетів.

Відповідь. $P(X=k)=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$, $k=1, 2, \dots$; $P\ (X>3)=0{,}216$.

Задача 8. Гравець в казино ставить «на червоне» доти, доки не виграє. Випадкова величина X — кількість спроб. Знайти ряд розподілу випадкової величини X, найімовірнішу кількість спроб і ту кількість спроб x, при якій виконується умова $P\ (X \le x) \ge 0{,}999$.

Вказівка. Вважати, що рулетка має 37 рівноймовіних полів (від 0 до 36), серед них 18 червоних.

Відповідь. $P(X=k)=\frac{18}{37}\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^{k-1}$, $k=1, 2, \dots$; $m_0=1$; $x \ge 11$.

Задача 9. Студент знає відповідь на 20 питань з 25. Навмання вибирається 5 питань. Випадкова величина X — кількість питань, на які студент знає відповідь. Знайти ряд розподілу випадкової величини X та ймовірність складання іспиту (іспит вважається складеним, якщо студент дає відповідь більше ніж на половину питань) за умови рівноймовірності вибору кожного з питань.

Таблиця 6.9

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{3125}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{1024}{3125}$

$$P\,(\text{«іспит складено»}) = \frac{2944}{3125} = 0{,}94208\,.$$

Задача 10. У партії з 10 деталей 2 браковані. Навмання виймається 3 деталі. Нехай X — випадкова величина, що дорівнює кількості бракованих деталей серед вибраних. Знайти ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини X.

Таблиця 6.10

Відповідь.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{7}{15}, & 0 < x \le 1; \\ \frac{14}{15}, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Задача 11. Нехай X — випадкова величина, яка дорівнює кількості вгаданих номерів у лотереї «5 із 36». Знайти ряд розподілу випадкової величини X і ймовірність хоча б що-небудь виграти (виграші починаються з трьох угаданих номерів) за умови, що у розиграшу рівноймовірні випадання кожного з наявних номерів.

Таблиця 6.11

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,45	0,42	0,12	0,01	0,0004	0,000003

P («виграш») ≈ 0,013.

Задача 12. Після тестування виявилося, що серед 15 студентів — 1 меланхолік, 5 флегматиків, 6 сангвініків і 3 холерики. З цієї групи рівноймовірно щодо кожного з наявних студентів вибирають чотирьох студентів. Нехай X — випадкова величина, яка дорівнює кількості сангвініків серед вибраних студентів. Знайти ряд розподілу, многокутник розподілу і функцію розподілу даної випадкової величини.

Таблиця 6.12

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{C_6^0 \cdot C_9^4}{C_{15}^4}$	$\frac{C_6^1 \cdot C_9^3}{C_{15}^4}$	$\frac{C_6^2 \cdot C_9^2}{C_{15}^4}$	$\frac{C_6^3 \cdot C_9^1}{C_{15}^4}$	$\frac{C_6^4 \cdot C_9^0}{C_{15}^4}$

Задача 13. Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка розіб'ється, дорівнює 0,0004. Знайти ряд розподілу випадкової величини X, що характеризує кількість розбитих пляшок, і ймовірність того, що розбитих пляшок буде більше трьох.

Відповідь. $P(X=k)=\frac{4^k}{k!}\cdot e^{-4}$, $k = 1, 2, \ldots$; $P\ (X \geq 4) \approx 0{,}5665$.

Задача 14. Підручник видано тиражем 10000 екземплярів. Ймовірність того, що зброшурований екземпляр виявиться неякісним, дорівнює 0,001. Знайти ряд розподілу випадкової величини X, що характеризує кількість неякісно зброшурованих екземплярів, і ймовірність того, що бракованих екземплярів буде більше двох.

Відповідь. $P(X=k)=\frac{10^k}{k!}\cdot e^{-10}$, $k = 1, 2, \ldots$; $P\ (X > 2) \approx 0{,}9972$.

Задача 15. При наборі тексту друкарка набирає неправильний символ з ймовірністю 0,001. Знайти ймовірність того, що при наборі сторінки тексту (3000 символів) буде зроблено більше трьох помилок.

Відповідь. $P_{3000}(X > 3) \approx 0{,}3528$.

Задача 16. Ймовірність влучення у мішені, що рухаються, з пістолета дорівнює 0,001. Виконується 2000 пострілів. Випадкова величина X дорівнює кількості влучень. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X і знайти ймовірність того, що буде збито менше чотирьох мішеней.

Відповідь. $P(X = k) = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2}$, $k = 1, 2, \dots$; $P(X < 4) \approx 0{,}8571$.

Задача 17. Автоматична телефонна станція обслуговує 10000 телефонних номерів. Ймовірність того, що впродовж 1 хвилини до АТС надійде виклик абонента, дорівнює 0,0004. Знайти ряд розподілу випадкової величини X, яка дорівнює кількості викликів, які надійшли до АТС впродовж 1 хв, та ймовірність того, що за цей час надійде хоча б один виклик.

Відповідь. $P(X = k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4}$, $k = 1, 2, \dots$; $P(X \geq 1) \approx 0{,}9817$.

Питання для самоконтролю до розділу 6

1. Що називають випадковою величиною?
2. Що називають функцією розподілу ймовірності випадкової величини $F(x)$?
3. Назвіть основні властивості функції розподілу ймовірностей $F(x)$?
4. Яка випадкова величина називається дискретною?
5. Яким чином можна задати дискретний розподіл випадкової величини?
6. Як побудувати многокутник розподілу випадкової величини?
7. Чому має дорівнювати сума всіх значень ймовірностей p_i дискретного розподілу випадкової величини?
8. В яку чверть декартової системи координат графіки функцій розподілу ймовірностей випадкової величини ніколи не попадають?
9. Які є основні види дискретних розподілів ймовірностей?
10. За якою формулою обчислюється ймовірність p_i гіпергеометричного розподілу ймовірностей випадкової величини?

Тест 5

1. Деяка випадкова величина X задана рядом розподілу ймовірностей (*табл. 6.13*). Знайти значення a.

Таблиця 6.13

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_i	a	$2a$	$3a$	$2a$	$2a$

а) 0,2; б) 0,1; в) 0,3; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

2. Деяка випадкова величина X задана рядом розподілу ймовірностей (*табл. 6.14*). Знайти ймовірність $p_4 = P\ (X = x_4)$.

Таблиця 6.14

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
p_i	0,4	0,1	0,3	p_4

а) 0,1; б) 0,3; в) 0,2; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

3. Випадкова величина X може набувати 5 різних значень з однаковою ймовірністю кожне. Ряд розподілу ймовірностей має вигляд (*табл. 6.15):*

а)

Таблиця 6.15, а

x_i	x_1	x_1	x_3	x_4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

б)

Таблиця 6.15, б

x_i	x_1	x_1	x_2	x_4	x_5
p_i	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21

в)

Таблиця 6.15, в

x_i	x_1	x_1	x_3	x_4	x_5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

г)

Таблиця 6.15, г

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

д) відповідь відсутня.

4. Який з наведених рисунків (*рис. 22*) може бути зображенням многокутника розподілу випадкової величини *X*?

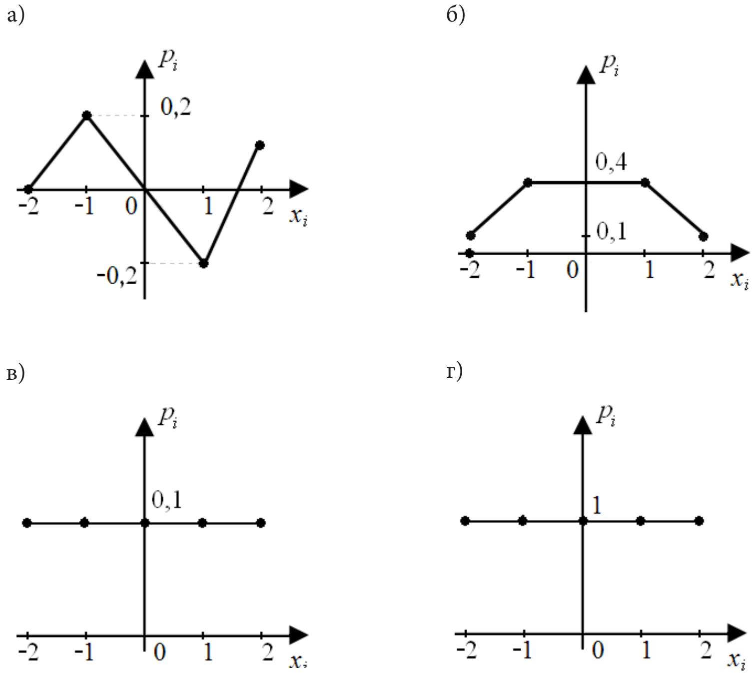


Рис. 22

д) всі рисунки можуть бути зображеннями многокутника розподілу.

5. На *рис. 23* зображено многокутник розподілу ймовірностей деякої випадкової величини X. Знайти значення a.

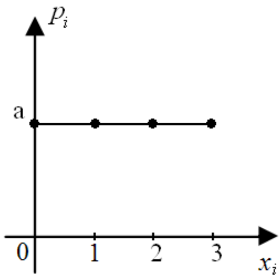


Рис. 23

а) 0,1; б) 0,25; в) 0,2; г) 0,3; д) відповідь відсутня.

6. Задано ряд розподілу випадкової величини X *(табл. 6.16)*. Обчислити $P(X < 0)$.

Таблиця 6.16

x_i	–3	–2	–1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2

а) 0,1; б) 0,2; в) 0,3; г) 0,4; д) відповідь відсутня.

7. Випадкова величина X задана рядом розподілу ймовірностей *(табл. 6.17)*. Обчислити $P(2 \le X \le 4)$.

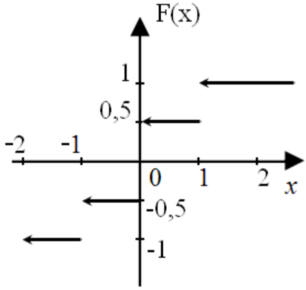
Таблиця 6.17

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,15	0,05	0,3	0,2	0,1	0,2

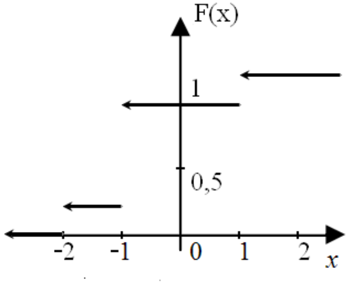
а) 0,35; б) 0,55; в) 0,3; г) обчислить неможливо; д) відповідь відсутня.

8. Який з наведених графіків (*рис. 24*) може бути графіком функції розподілу ймовірностей $F(x)$?

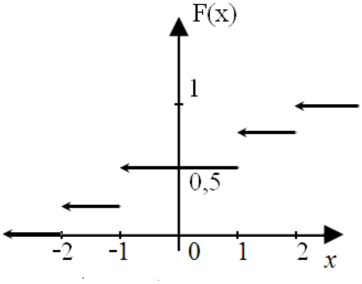
а)



б)



в)



г)

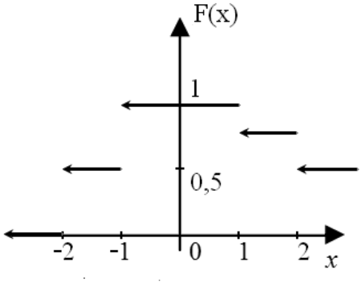


Рис. 24

д) всі зображення можуть відображати графіки $F(x)$.

9. Деяка задана таблиця не може бути рядом розподілу ймовірностей деякої випадкової величини X, оскільки:

а) значення x_i не рівновіддалені одне від одного;

б) є від'ємні значення випадкової величини;

в) сума p_i ($i = 1, \ldots, 6$) перевищує 1;

г) є два значення випадкової величини, яким відповідають однакові ймовірності;

д) відповідь відсутня.

10. Випадкова величина *X* задана рядом розподілу ймовірностей (*табл. 6.18*).

Таблиця 6.18

x_i	2	4	6	8
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Графік функції розподілу (*рис. 25*) ймовірностей має вигляд :

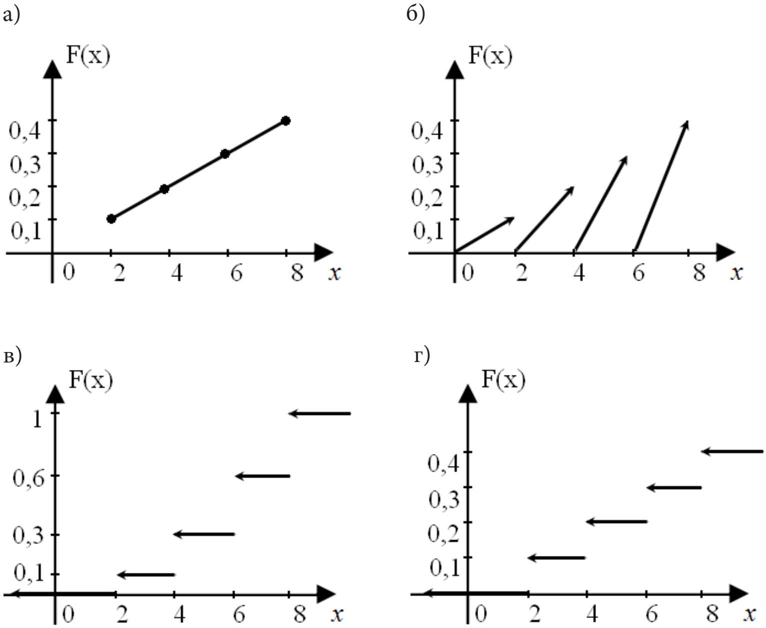


Рис. 25

д) відповідь відсутня.

Розділ 7. Неперервні випадкові величини

Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо її функція розподілу $F_X(x)$ є неперервною.

Якщо X — неперервна випадкова величина, то ймовірність того, що X набуде довільного фіксованого значення x, дорівнює 0 ($P(X = x) = 0$, $x \in R$). Тому на відміну від дискретної випадкової величини розподіл неперервної випадкової величини неможливо задати, зазначивши певні значення, яких вона набуває, та відповідні їм ймовірності. Зрозуміло також, що множина можливих значень неперервної випадкової величини незліченна.

Найпростішим і найпоширенішим способом задання розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини є задання функції розподілу $F_X(x)$. Тоді для будь-якого проміжку $[a;\ b)$ можна обчислити ймовірність того, що випадкова величина X набуває значень з цього проміжку:

$$P(X \in [a;b)) = F_X(b) - F_X(a).$$

Неперервні випадкові величини поділяються на два класи: *абсолютно неперервні* та *сингулярні*.

Випадкова величина X з функцією розподілу $F_X(x)$ називається *абсолютно неперервною*, якщо існує невід'ємна функція $f_X(x)$, для якої виконується рівність

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt,\ x \in (-\infty; +\infty). \qquad (25)$$

При цьому функція $f_X(x)$ називається *щільністю розподілу випадкової величини X* (або *диференціальною функцією розподілу*).

Очевидно, що:

1) $f_X(x) \ge 0$;

2) $F'_X(x) = f_X(x)$ у кожній точці неперервності функції $f_X(x)$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$;

4) $P(X \in [a;b)) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,dx =$

$= P(X \in [a;b]) = P(X \in (a;b)) = P(X \in (a;b]).$

Іншими словами, ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a; b)$, $[a; b]$, $(a; b)$, $(a; b]$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f_X(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$ та $x = b$.

Сингулярні випадкові величини, на відміну від абсолютно неперервних, неможливо задати за допомогою щільності розподілу.

Найважливішими є такі типи абсолютно неперервних розподілів: рівномірний, нормальний, експоненційний.

Розподіл випадкової величини X називається *рівномірним* на відрізку $[a; b]$, якщо його щільність має вигляд

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a;b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b]. \end{cases} \qquad (26)$$

Функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (27)$$

Графіки щільності та функції розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини зображено відповідно на *рис. 26* і *27*.

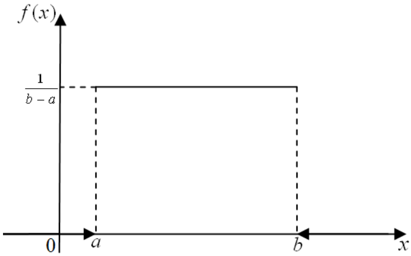


Рис. 26

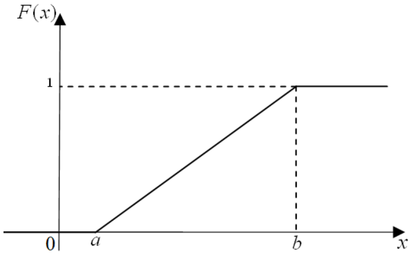


Рис. 27

Розподіл випадкової величини X називається *нормальним* з параметрами $a > 0$ і $\sigma > 0$, якщо його щільність має вигляд

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (28)$$

Функція $y = f_X(x)$ швидко прямує до нуля при $x \to \pm\infty$. Площа фігури, обмеженої графіком функції $y = f_X(x)$ і віссю O_x, дорівнює одиниці. Площі криволінійних трапецій над проміжками

$$[a - \sigma; a + \sigma], [a - 2\sigma; a + 2\sigma], [a - 3\sigma; a + 3\sigma]$$

не залежать від a та σ і дорівнюють відповідно 0,6827; 0,9545; 0,9973.

Отже, ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення з відрізка $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, дорівнює 0,9973. У цьому разі говорять, що всі значення нормально розподіленої випадкової величини X потрапляють в *«трисигмовий» проміжок* $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$ з *практичною достовірністю*. На *рис. 28* зображено графік функції щільності нормального розподілу з параметром $a = 0$.

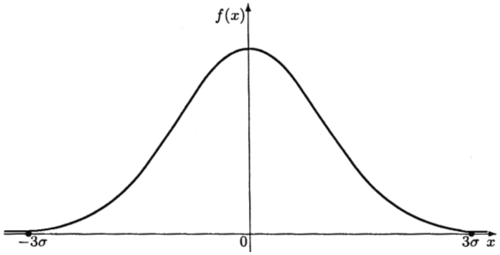


Рис. 28

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини має вигляд:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (29)$$

Ця функція не є елементарною. Її значення табульовані за допомогою функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \; x \in (-\infty; +\infty). \qquad (30)$$

Функція $F_X(x)$ і $\Phi(x)$ пов'язані співвідношенням

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (31)$$

Таблиці значень функції Φ(x) наведено у **додатку 1**. **Функція Лапласа Φ (x) має такі властивості**:

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x),\ x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Φ(x) зростає від $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$, коли x зростає від −∞ до +∞.

3. При $x > 5$ можна вважати, що $\Phi(x) \approx 0{,}500000$ з точністю до $\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення, яке належить відрізку [α; β] обчислюються за формулою:

$$P(X \in [\alpha;\beta]) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (32)$$

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значень з проміжку [a – δ; a + δ] обчислюються за формулою:

$$P(|X - a| \le \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (33)$$

Нормальний розподіл відіграє надзвичайно важливу роль у теорії ймовірностей та її застосуваннях. Наприклад, випадкова похибка вимірювання, як правило, нормально розподілена.

Розподіл випадкової величини X називається *експоненційним* (*показниковим*) з параметром λ > 0, якщо його щільність має вигляд

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \qquad (34)$$

Графік функції щільності експоненційного закону зображено на *рис. 29*.

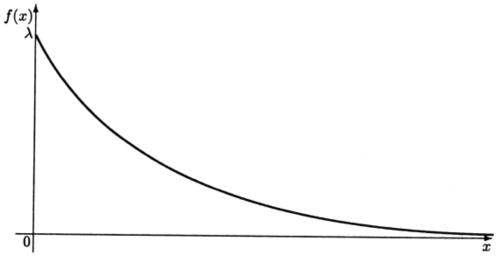


Рис. 29

Функція розподілу випадкової величини з експоненційним розподілом має вигляд:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \qquad (35)$$

Якщо $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, то

$$P(X\in[\alpha;\beta])=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}. \qquad (36)$$

Якщо $\alpha \le 0$ і $\beta > 0$, то

$$P(X\in[\alpha;\beta])=P(X\in[0;\beta])=1-e^{-\lambda\beta}. \qquad (37)$$

Показниковий розподіл часто зустрічається в теорії масового обслуговування (зокрема, при описі роботи телефонних станцій).

Приклад 1. Випадкову величину *X* задано функцією розподілу

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x\le \frac{1}{4};\\ 8x^2, & \frac{1}{4}<x\le \frac{\sqrt{2}}{4};\\ 1, & x>\frac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$$

Переконайтеся, що *X* має щільність розподілу ймовірностей, і знайдіть її.

Розв'язання. У точках $x=0; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}$ правосторонні та лівосторонні границі функції $F_X(x)$ збігаються, з чого випливає, що $F_X(x)$ неперервна всюди. Похідна $F_X'(x)=f_X(x)$ існує і неперервна всюди, за винятком точок $x=0; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}$. При цьому $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} F_X'(t)\,dt$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Оскільки значення $f_X(x)$ у точках $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{4}$ і $x_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ніяк не впливають на значення функції розподілу $F_X(x)$, можна вважати $f(x_i) = a_i$ довільними, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Таким чином,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \le \dfrac{1}{4}; \\ 16x, & \dfrac{1}{4} < x \le \dfrac{\sqrt{2}}{4}; \\ 0, & x > \dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Приклад 2. Дано функцію $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \alpha e^{-\beta x}, & x > 0. \end{cases}$

При яких значеннях α і β функція $f(x) = f_X(x)$ є щільністю розподілу ймовірностей деякої випадкової величини X? Знайти функцію розподілу $F_X(x)$ величини X. Обчислити ймовірність того, що значення випадкової величини X потрапить у проміжок [0; 1] двома способами: за допомогою щільності розподілу ймовірностей $f_X(x)$ і за допомогою функції розподілу $F_X(x)$.

Розв'язання. Передусім параметр α має бути додатнім: $\alpha > 0$. Для виявлення інших умов щодо α і β використаємо характеристичну властивість будь-якої функції щільності, а саме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 .$$

Отже:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \alpha\int_{0}^{\infty} e^{-\beta x}dx = -\frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta x}\Big|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{\beta} = 1 ,$$

а тому, $\alpha = \beta > 0$ і функція $f_X(x)$ має вигляд:

$$f_x(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \alpha > 0. \end{cases} \qquad (38)$$

Знайдемо функцію розподілу $F_X(x)$ за формулою

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

Якщо $x \le 0$, то

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0,$$

а якщо $x > 0$, то

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \alpha e^{-\alpha t}dt = 1 - e^{-\alpha x}.$$

Отже,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \alpha > 0. \end{cases} \tag{39}$$

За формулою

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

обчислимо ймовірність $P(0 \le X \le 1)$:

$$P(0 \le X \le 1) = \int_0^1 f_X(x)dx = \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x}dx = \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha e^{\alpha}}.$$

Отже, $P(0 \le x \le 1) = 1 - \frac{1}{e^{\alpha}}$.

Формула

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F_X(x_2) — F_X(x_1)$$

за умови $\alpha = \beta$ дає той самий результат:

$$P(0 \le X \le 1) = F_X(1) - F_X(1) = 1 - \frac{1}{e^{\alpha}}.$$

Випадкові величини зі щільністю (38) чи з функцією розподілу (39) досить часто зустрічаються на практиці (показниковий закон розподілу).

Приклад 3. Випадкова величина X має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами $a = 7$ і $\sigma = 2$. Порівняти ймовірності влучення значень випадкової величини X у проміжки [3; 7] і [–100; 1]. Зазначити інтервал, у який випадкова величина X влучає з практичною достовірністю.

Розв'язання. Якщо випадкова величина X має нормальний розподіл, то

$$P(X \in [\alpha;\beta]) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Тому

$$P(X \in [3;7]) = \Phi\left(\frac{7-7}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3-7}{2}\right) = \Phi(0) - \Phi(-2).$$

За таблицею значень функції $\Phi(x)$ (**д о д а т о к 1**), використовуючи властивість $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, знаходимо:

$$\Phi(0) = 0;\ \Phi(-2) = -\Phi(2) \approx -0{,}4772.$$

Тому

$$P(X \in [3;7]) \approx 0{,}4772.$$

Аналогічно,

$$P(X \in [-100;1]) = \Phi\left(\frac{1-7}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-100-7}{2}\right) = \Phi(-3) - \Phi(-53{,}5) =$$

$$= -\Phi(3) + \Phi(53{,}5).$$

За **д о д а т к о м 1** отримуємо:

$$\Phi(3) \approx 0{,}49865.$$

Значення $\Phi(53{,}5)$ у **д о д а т к у 1** знайти не можна. Оскільки $53{,}5 > 5$, то з точністю до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ (насправді значно вищою) можна вважати, що

$$\Phi(53{,}5) \approx 0{,}500000.$$

Отже,

$$P(X \in [-100;1]) \approx -0{,}49865 + 0{,}5 = 0{,}00135.$$

Нормально розподілена величина з практичною достовірністю влучає в так званий трисигмовий інтервал

$$[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$$

Отже,

$$P(X \in [1;12]) = 0,9973\,.$$

П р и м і т к а. Пропонуємо читачеві самостійно пересвідчитись у правильності останньої рівності.

Задачі до розділу 7

Задача 1. Випадкова величина *X* має функцію розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ \dfrac{a(x+4)^2}{16}, & -4 < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти параметр *a* для якого: а) *X* є абсолютно неперервною, а також знайти аналітичний вираз для щільності розподілу та ймовірність влучення значень випадкової величини *X* в інтервал (–2; 5); б) *X* не є абсолютно неперервною, а також знайти $P(X \in (-2;5))$

Відповідь. а) $a = 1$; $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{8}, & x \in (-4;0); \\ 0, & x \notin (-4;0), \end{cases}$ $P\big(X \in (-2;5)\big) = \dfrac{3}{4}$;

$$\text{б) } 0 \le a \le 1, P(X \in (-2;5)) = 1 - \frac{a}{4}\,.$$

Задача 2. Випадкова величина *X* має функцію розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a\sqrt{2x}, & 0 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Знайти параметр a, аналітичний вираз для щільності розподілу та ймовірність влучення значень випадкової величини X в інтервал (1; 6).

Відповідь. $a = \frac{1}{4}$; $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{2x}}, & x \in (0;8); \\ 0, & x \notin (0;8), \end{cases}$

$$P\big(X \in (1;6)\big) = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}51\,.$$

Задача 3. При яких значеннях параметрів a і b функція

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \sin x, & a < x \le b; \\ 1, & x > b \end{cases}$$

буде функцією розподілу деякої абсолютно неперервної випадкової величини? Знайти щільність розподілу даної випадкової величини.

Відповідь. $a = 2\pi k$; $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Якщо, наприклад, $k = 0$, то

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \\ \cos x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Задача 4. При яких значеннях параметрів a і b функція

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \operatorname{tg} x, & a < x \le b; \\ 1, & x > b \end{cases}$$

буде функцією розподілу деякої абсолютно неперервної випадкової величини? Знайти щільність розподілу цієї випадкової величини.

Відповідь. $a = \pi k$; $b = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. Якщо, наприклад, $k = 0$, то

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right);\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right).\end{cases}$$

Задача 5. Щільність розподілу випадкової величини X задано графічно (*рис. 30*).

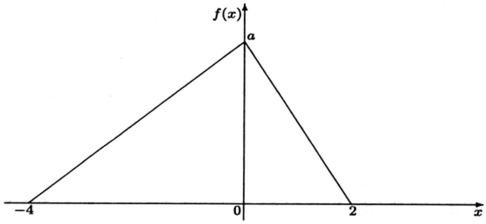


Рис. 30

Визначити значення параметра a та аналітичні вирази для $f_X(x)$ і $F_X(x)$. Знайти $P\left(X\in[0;2]\right)$; $P\left(X\in[-2;1]\right)$.

Відповідь. $a=\dfrac{1}{3}$; $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-4;2);\\ \dfrac{1}{12}(x+4), & x\in[-4;0];\\ \dfrac{1}{6}(2-x), & x\in[0;2],\end{cases}$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{(x+4)^2}{24}, & -4\le x\le 0;\\ 1-\dfrac{(2-x)^2}{12}, & 0\le x\le 2;\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}$$

$$P\left(X\in[0;2]\right)=\frac{1}{3};\ P\left(X\in[-2;1]\right)=\frac{3}{4}.$$

Задача 6. Щільність розподілу випадкової величини *X* задано графічно (*рис. 31*).

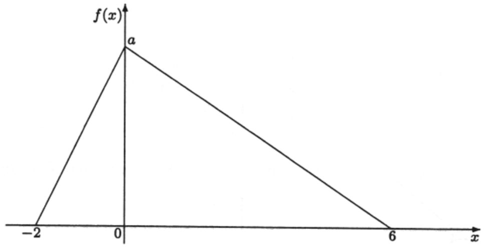


Рис. 31

Визначити значення параметра *a* та аналітичні вирази для $f_X(x)$ і $F_X(x)$. Знайти $P\big(X\in[6;8]\big)$, $P\big(X\in[-2;2]\big)$.

Відповідь. $a=\dfrac{1}{4}$, $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-2;6);\\ \dfrac{1}{8}(x+2), & x\in[-2;0];\\ \dfrac{1}{24}(6-x), & x\in[0;6],\end{cases}$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{(x+2)^2}{16}, & -2\le x\le 0;\\ 1-\dfrac{(6-x)^2}{48}, & 0\le x\le 6;\\ 1, & x>6,\end{cases}$$

$$P\big(X\in[6;8]\big)=0,\ P\big(X\in[-2;2]\big)=\frac{2}{3}.$$

Задача 7. При яких значеннях параметрів *a* та *b* функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \sin x, & a<x\le b;\\ 0, & x>b\end{cases}$$

може бути щільністю розподілу деякої випадкової величини *X*? Знайти функцію розподілу даної випадкової величини та ймовірність влучення значень цієї випадкової величини в проміжок $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$.

Відповідь. Числа a і b можна вибрати з проміжку $\left[2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$, так, щоб було $a < b$ та $\cos a - \cos b = 1$.

Якщо $a = 0$, то $b=\frac{\pi}{2}$.

Тоді $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\cos x, & x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];\\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $P\left(X\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 8. При яких значеннях параметрів *a* та *b* функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \operatorname{tg}x, & a<x\le b;\\ 1, & x>b\end{cases}$$

може бути щільністю розподілу деякої випадкової величини *X*? Знайти функцію розподілу даної випадкової величини та ймовірність влучення значень цієї випадкової величини в проміжок $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$.

Відповідь. Числа a і b можна вибрати з проміжку $\left[\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$, так, щоб було $a < b$ та $\frac{\cos a}{\cos b}=e$. Якщо $a = 0$, то $b=\arccos\frac{1}{e}$.

Тоді $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ -\ln(\cos x), & x\in\left[0;\arccos\frac{1}{e}\right];\\ 1, & x\ge\arccos\frac{1}{e},\end{cases}$

$$P\left(X\in\left[0;\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{e}\right]\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{2e}\right)\approx 0,19\,.$$

Задача 9. Випадкову величину X задано щільністю розподілу

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\\ a\cos x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Знайти параметр a, функцію розподілу $F_X\,(x)$ та ймовірність влучення значень випадкової величини X в проміжок $\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Відповідь. $a=\frac{1}{2}$; $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le-\frac{\pi}{2};\\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$

$$P\left(X\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Задача 10. Випадкову величину X задано щільністю розподілу

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le-2;\\ a, & -2<x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Знайти параметр a, функцію розподілу $F_X\,(x)$ та ймовірність влучення значень випадкової величини X в інтервалі (0; 3].

Відповідь. $a=\frac{1}{7}$; $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le-2;\\ \frac{x+2}{7}, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5,\end{cases}$ $P\left(X\in\left(0;3\right]\right)=\frac{3}{7}$.

Задача 11. Випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на відрізку [2; 5]. Знайти аналітичні вирази для щільності та функції розподілу цієї випадкової величини. Побудувати їх графіки. Знайти ймовірність влучення значень випадкової величини в інтервал (0; 3].

Відповідь. $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [2;5]; \\ \dfrac{1}{3}, & x \in [2;5], \end{cases}$ $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \dfrac{x-2}{3}, & 2 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$

Графіки щільності та функції розподілу зображено на *рис. 32* і *33*.

$P(X \in [0;3]) = \dfrac{1}{3}$.

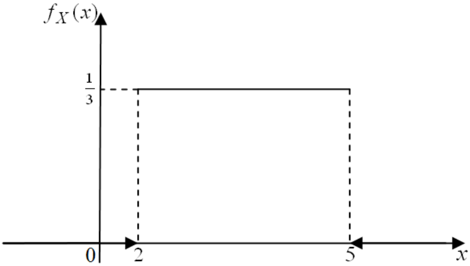


Рис. 32

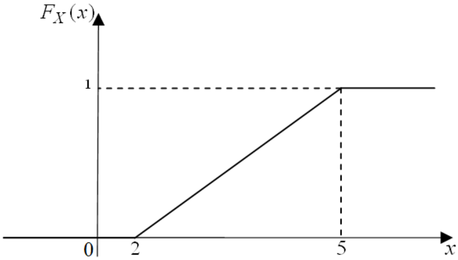


Рис. 33

Задача 12. Поїзди метро йдуть з інтервалом 2 хв. Вважаючи, що час X очікування поїзда на зупинці має рівномірний розподіл, знайти аналітичні вирази для щільності та функції розподілу цієї випадкової величини. Побудувати їх графіки. Знайти ймовірність того, що час очікування перевищуватиме 30 с.

Відповідь. $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0;2];\\ \dfrac{1}{2}, & x\in[0;2],\end{cases}$ $\quad F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

Графіки щільності та функції розподілу зображено на *рис. 34* і *35*.

$P(X>30)=\dfrac{3}{4}$.

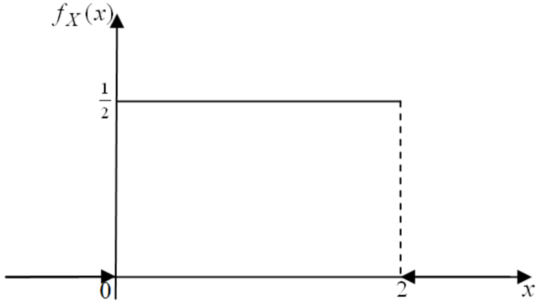


Рис. 34

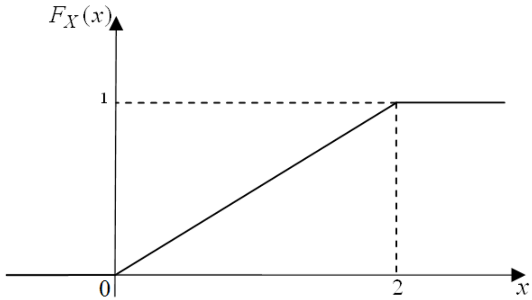


Рис. 35

Задача 13. Нормальний закон розподілу випадкової величини X задано функцією розподілу

$$F_X(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t+1)^2}{32}}dt\,.$$

Побудувати графік функції $f_X(x)$. Обчислити

$$P(-5 < X < 3);\ P(|X+1| < 12).$$

Відповідь. $a = -1$; $\sigma = 4$. Графік $f(x)$ утворюється з графіка щільності стандартного нормального розподілу шляхом стиску в 4 рази вздовж осі Oy і перенесення на 1 ліворуч уздовж осі Ox (*рис. 36*). $P(-5 < X < 3) = 2 \cdot \Phi(1) \approx 0{,}6318$; $P(|X+1| < 12) = 2 \cdot \Phi(3) \approx 0{,}9973$.

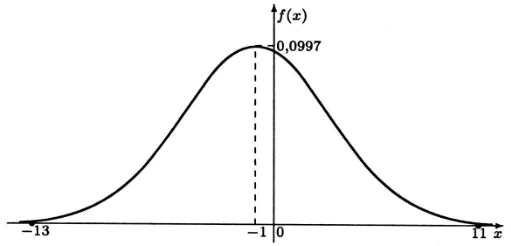


Рис. 36

Задача 14. Нормальний закон розподілу випадкової величини X задано функцією розподілу

$$F_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-3)^2}{8}}\,dt.$$

Побудувати графік функції $f_X(x)$. Обчислити

$$P(1 < X < 5);\ P(|X - 3| < 6).$$

Відповідь. $a = 3$; $\sigma = 2$. Графік $f(x)$ утворюється з графіка щільності стандартного нормального розподілу шляхом стиску в 2 рази вздовж осі Oy і перенесення на 3 праворуч уздовж осі Ox (*рис. 37*). $P(1 < X < 5) \approx 0{,}6318$; $P(|X - 3| < 6) \approx 0{,}9973$.

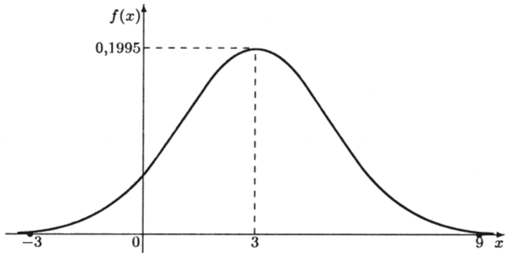


Рис. 37

Задача 15. Випадкова величина X має нормальний розподіл із параметрами a, σ. Записати вираз для щільності та функції розподілу випадкової величини X і знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку (α; β], якщо:

а) $a = 0$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 5$;

б) $a = 5$, $\sigma = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 8$;

в) $a = 9$, $\sigma = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 15$.

Відповідь.

а) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $P(X \in (0;\, 5]) \approx 0{,}5$;

б) $f_X(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$, $F_X(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-5)^2}{18}} dt$, $P(X \in (2;\, 8]) \approx 0{,}6827$;

в) $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9)^2}{8}}$, $F_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \times \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-9)^2}{8}} dt$, $P(X \in (3;\, 15]) \approx 0{,}9973$.

Задача 16. Щільність розподілу нормально розподіленої випадкової величини X має вигляд $f_X(x) = c \cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$. Знайти параметри c, a та σ. Порівняти ймовірності влучення значень випадкової величини X у проміжки (–9; 3] і (4; 100].

Відповідь. $c = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$; $a = -3$; $\sigma = 2$; $P(X \in (-9;\, 3]) > P(X \in (4;\, 100])$.

Задача 17. Випадкова величина X має нормальний розподіл із параметрами a, σ. У кожному з наступних пунктів знайти інтервал, у який значення випадкової величини X влучають з практичною достовірністю (із ймовірністю 0,9973):

а) $a = 0$, $\sigma = 1$;

б) $a = 5$, $\sigma = 2$;

в) $a = 5$, $\sigma = 100$.

Відповідь. а) [–3; 3]; б) [–1; 11]; в) [–295; 305].

Задача 18. Випадкова величина X має показниковий розподіл із параметром $\lambda = 3$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[\alpha; \beta]$, якщо:

а) $\alpha = -2, \beta = -1$;

б) $\alpha = 2, \beta = 3$;

в) $\alpha = -2, \beta = 3$.

Відповідь. а) $P(X \in [-2;-1]) = 0$; б) $P(X \in [2;3]) \approx 0,002355$; в) $P(X \in (-2; 3]) \approx 0,9999$.

Задача 19. Випадкова величина X має експоненціальний розподіл. Ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення з проміжку $[0; 5]$, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення з проміжку $[7; 9]$.

Відповідь. $P(X \in (7; 9]) \approx 0,0708$.

Питання для самоконтролю до розділу 7

1. Що називають неперервною випадковою величиною?

2. Чому дорівнює ймовірність набуття конкретного значення неперервною випадковою величиною?

3. Якими способами можна задати неперервну випадкову величину?

4. Яка випадкова величина називається абсолютно неперервною?

5. Що називають щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини?

6. Які властивості має функція щільності розподілу ймовірності?

7. Які типи абсолютно неперервних розподілів Ви знаєте?

8. Який вигляд має функція щільності розподілу нормальної випадкової величини?

9. Чому дорівнює площа фігури, що утворюється графіком щільності нормально розподіленої випадкової величини і віссю Ox на проміжку $(-\infty; +\infty)$?

10. Що можна сказати про інтервал $(a — 3\sigma; a — 3\sigma)$ у зв'язку з нормальним розподілом?

11. Чи обов'язково неперервна випадкова величина є абсолютно неперервною?

12. Чи обов'язково функція $F_x(x)$ розподілу абсолютно неперервної випадкової величини X має похідну $F_x^{/}(x)$ у кожній точці x?

13. Чим відрізняється сингулярна випадкова величина від абсолютно неперервної?

14. Чим відрізняється дискретна випадкова величина від неперервної? А від сингулярної?

Тест 6

1. Випадкова величина X має рівномірний розподіл ймовірності. Графік щільності розподілу $f(x)$ зображено на *рис. 38*. Знайти a.

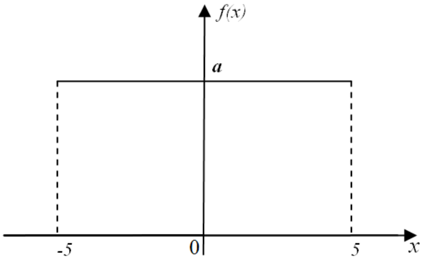


Рис. 38

а) –2; б) 0,8; в) 0,1; г) 1; д) відповідь відсутня.

2. Випадкова величина X має рівномірний розподіл ймовірності проміжку $(-4, a)$. Графік щільності розподілу зображено на *рис. 39*. Знайти значення параметра a.

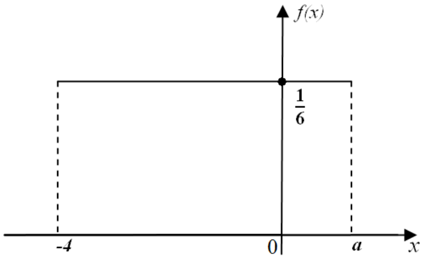


Рис. 39

а) 2; б) 4; в) 6, г) 8; д) відповідь відсутня.

3. Графік щільності розподілу неперервної випадкової величини X зображено на *рис. 40*. Який вигляд має аналітичний вираз функції щільності $f(x)$?

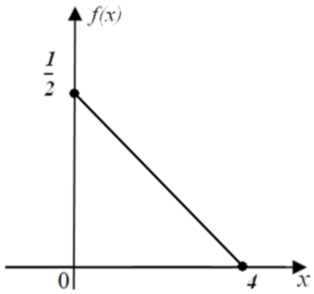


Рис. 40

а) $f(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$; б) $f(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0;4] \\ -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}, x \in [0;4] \end{cases}$; в) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x \in [0;4] \\ 0, x \notin [0;4] \end{cases}$;

г) із умови задачі аналітичний вираз $f(x)$ записати неможливо;
д) відповідь відсутня.

4. Графік функції щільності неперервної випадкової величини X зображено на *рис. 41*. Знайти значення параметра a.

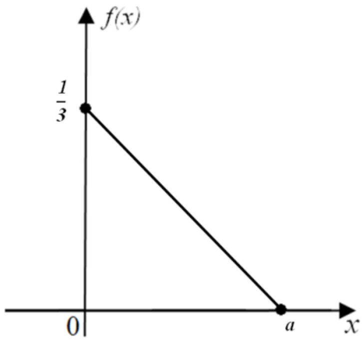


Рис. 41

а) 1; б) 6; в) $\frac{1}{3}$; г) визначити неможливо; д) відповідь відсутня.

5. Графік функції щільності неперервної випадкової величини X подано на *рис. 42*. Чому дорівнює $P\,(-2 \le X \le 0)$?

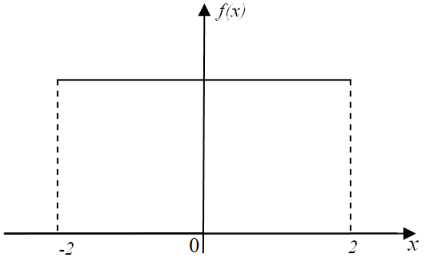


Рис. 42

а) 1; б) 0; в) 0,5; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

6. Графік щільності розподілу ймовірностей неперервної величини X зображено на *рис. 43*. Обчислити $P\,(+4 \le X \le 8)$.

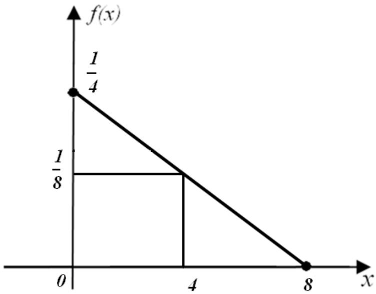


Рис. 43

а) 0,5; б) 0,25; в) 0,2; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

7. Умова попередньої задачі (6). Обчислити $P(8 \le X < 9)$.
а) 1; б) 0; в) 0,5; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

8. Функція щільності розподілу ймовірності неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;3]; \\ \frac{1}{3}, & x \notin [0;3]. \end{cases}$$

Записати аналітичний вираз функції розподілу ймовірностей $F(x)$.

а) $F(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0;3];\\ 1, & x\notin[0;3].\end{cases}$

б) $F(x)=\frac{1}{3}x$;

в) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{3}x, & x\notin[0;3).\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$

г) з заданих умов записати неможливо;
д) відповідь відсутня.

9. Графік функції розподілу ймовірностей випадкової величини X зображено на *рис. 44*. Обчислити $P(3\le X\le 5)$.

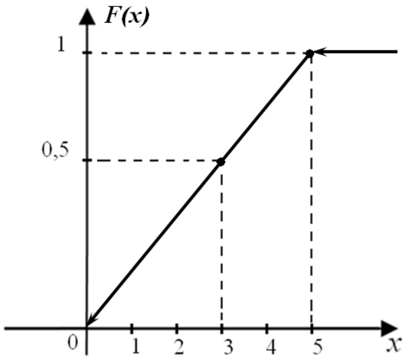


Рис. 44

а) 0,75; б) 0,25; в) 0,5; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

10. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами $a = 5$, $\sigma = 1$. Знайти $P(2\le X\le 8)$.
а) 0,5; б) 0,25; в) 0,997; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

Розділ 8. Числові характеристики випадкових величин

До основних числових характеристик, які описують розподіл випадкової величини, належать *математичне сподівання*, *дисперсія*, *середнє квадратичне відхилення*, *мода*, *медіана*.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X, яка набуває значень x_i з ймовірностями p_i, називається число

$$M(X) = \sum_i x_i p_i \tag{40}$$

за умови, що $\sum_i | x_i | p_i < +\infty$. В іншому разі вважають, що $M(X)$ не існує.

Математичним сподіванням абсолютно неперервної випадкової величини X зі щільністю $f_X(x)$ називається число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \tag{41}$$

за умови абсолютної збіжності невласного інтеграла (41).

Математичне сподівання має такі властивості.

1. Якщо $P(X = C) = 1$, то $M(X) = C$.
2. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$.
3. $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$.
4. Якщо X_1 та X_2 *незалежні випадкові величини* (тобто $P((X_1 < a, X_2 < b)) = P(X_1 < a) \cdot P(X_2 < b)$ для будь-яких чисел a і b), то $M(X_1 \cdot X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2)$.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M([X - M(X)]^2). \tag{42}$$

Формула (42) еквівалентна такій формулі:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \tag{43}$$

Для дискретної випадкової величини формули (42) і (43) набувають відповідно такого вигляду:

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i \tag{44}$$

$$D(X)=\sum_i x_i^2 p_i-[M(X)]^2 \tag{45}$$

за умови існування $M\,(X)$.

Для абсолютно неперервної випадкової величини формули (42) та (43) набувають відповідно такого вигляду:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx \tag{46}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x_i^2 f(x)dx-[M(X)]^2 \tag{47}$$

за умови існування $M(X)$.

Дисперсія має такі властивості:

1. $D(X) \geq 0$.
2. Якщо $P\,(X = C) = 1$, то $D\,(X) = 0$.
3. $D\,(C \cdot X) = C^2 \cdot D\,(X)$.
4. Якщо X_1 та X_2 незалежні випадкові величини, то $D\,(X_1 + X_2) = D\,(X_1) + D(X_2)$.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають число

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{48}$$

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення характеризують ступінь розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Модою Mo (X) дискретної випадкової величини називають найімовірніше її значення в деякому околі цього значення.

Розподіл називається *унімодальним*, якщо він має єдину моду (біноміальний, нормальний, показниковий тощо).

Розподіл називається *полімодальним*, якщо він має більше однієї моди (рівномірний тощо).

Модою абсолютно неперервної випадкової величини є точка максимуму щільності розподілу.

Медіаною випадкової величини називається таке число *Me* (X), для якого виконується умова

$$P\,(X < Me\,(X)) = P\,(X > Me\,(X)). \tag{49}$$

Медіана неперерваної випадкової величини *X* завжди існує, а якщо *X* має дискретний розподіл, то *Me* (*X*) може не існувати.

У *табл. 8.1* наведено математичні сподівання, дисперсії та середні квадратичні відхилення найпоширеніших розподілів ймовірностей.

Для обчислення числових характеристик випадкових величин можна використовувати програмні засоби (наприклад, GRAN1) або програму MS Excel.

Таблиця 8.1

Числові характеристики найпоширеніших імовірнісних розподілів

№ з/п	Назва розподілу	$M(X)$	$D(X)$	$\sigma(X)$
I. Дискретні розподіли				
1.	Рівномірний з параметром *n*	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
2.	Біноміальний з параметрами *n* і *p*	np	$np(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
3.	Показниковий з параметром λ	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
4.	Геометричний з параметром *p*	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{\sqrt{1-p}}{p}$
II. Неперервні розподіли				
5.	Рівномірний з параметрами *a* і *b*	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
6.	Нормальний з параметрами *a*, σ	a	σ^2	σ
7.	Показниковий з параметром λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$

Приклад 1. Випадкова величина X має ряд розподілу, наведений у *табл. 8.2*. Знайти числові характеристики випадкової величини X.

Таблиця 8.2

X_i	1	2	3
P_i	0,2	0,6	0,2

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової величини X обчислимо за формулою

$$M(X)=\sum_{i=i}^{3}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=1\cdot 0,2+2\cdot 0,6+3\cdot 0,2=2\,.$$

Дисперсію випадкової величини X знайдемо за формулою

$$D(X)=\sum_i x_i^2p_i-(M(X))^2=x_1^2p_1+x_2^2p_2+x_3^2p_3-2^2=1^2\cdot 0,2+$$

$$+2^2\cdot 0,6+3^2\cdot 0,2-2^2=4,4-4=0,4.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,4}\approx 0,633.$$

Мода і медіана дорівнюють

$$Mo\ (X)=Me\ (X)=2.$$

Приклад 2. Нехай випадкова величина X дорівнює кількості номерів, угаданих гравцем в лотереї «6 із 39».

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення розподілу випадкової величини X.

Розв'язання. Ряд розподілу даної випадкової величини побудовано у ***прикладі 2 розділу 6*** (*див. табл. 6.4, с. 77*):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1107568}{3262623}$	$\frac{1424016}{3262623}$	$\frac{613800}{3262623}$	$\frac{109120}{3262623}$	$\frac{7920}{3262623}$	$\frac{198}{3262623}$	$\frac{1}{3262623}$

За формулою

$$M(X)=\sum_{i=i}^{7} x_i p_i$$

обчислимо математичне сподівання випадкової величини *X*:

$$M(X)=0\cdot\frac{1107568}{3262623}+1\cdot\frac{1424016}{3262623}+2\cdot\frac{613800}{3262623}+3\cdot\frac{109120}{3262623}+$$

$$+4\cdot\frac{7920}{3262623}+5\cdot\frac{198}{3262623}+6\cdot\frac{1}{3262623}=\frac{12}{13}<1.$$

Отже, середня кількість угаданих номерів приблизно дорівнює одиниці.

За формулою

$$D(X)=\sum_i x_i^2 p_i-[M(X)]^2$$

обчислимо дисперсію випадкової величини *X*:

$$D(X)=0^2\cdot\frac{1107568}{3262623}+1^2\cdot\frac{1424016}{3262623}+2^2\cdot\frac{613800}{3262623}+3^2\cdot\frac{109120}{3262623}+$$

$$+4^2\cdot\frac{7920}{3262623}+5^2\cdot\frac{198}{3262623}+6^2\cdot\frac{1}{3262623}-\left(\frac{12}{13}\right)^2=$$

$$=\frac{2178}{3211}\approx 0{,}6783.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2178}{3211}}\approx 0{,}8236.$$

Приклад 3. Випадкову величину *X* задано щільністю розподілу

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 0<x\le\dfrac{1}{4};\\ 16x, & \dfrac{1}{4}<x\le\dfrac{\sqrt{2}}{4};\\ 0, & x>\dfrac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини X.

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової величини X обчислимо за формулою $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx$:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}} x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} x\cdot 16xdx+\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\infty} x\cdot 0dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}dx+16\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}+16\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{24}\approx 0{,}1940.$$

За формулою

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i^2 f(x)dx-(M(X))^2$$

знайдемо дисперсію випадкової величини X:

$$D(X)=\left(\int\limits_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}} x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} x^2\cdot 16dx+\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\infty} x^2\cdot 0dx\right)-$$

$$-\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{24}\right)^2=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}} x\sqrt{x}dx+16\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} x^3dx-\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{24}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}+16\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}}-\frac{11}{192}+\frac{\sqrt{2}}{72}=\frac{\sqrt{2}}{72}-\frac{1}{240}\approx 0{,}0155.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{72} - \frac{1}{240}} \approx 0{,}1244.$$

$Mo(X) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, оскільки точка $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ є точкою максимуму функції $f_X(x)$, $Me(X) = \dfrac{1}{4}$, оскільки

$$P\left(X < \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} f_X(x)dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} f_X(x)dx = \frac{1}{2} = P\left(X > \frac{1}{4}\right).$$

Задачі до розділу 8

Задача 1. Нехай X — випадкова величина, яка дорівнює кількості очок, які випадуть при підкиданні кубика. Вважаючи, що $P(\{i\}) = \dfrac{1}{6}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, а також моду і медіану.

Відповідь. $M(X) = 3{,}5$; $D(X) = \dfrac{35}{12}$; $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{35}{12}} \approx 1{,}71$; $Mo(X) = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $Me(X)$ — будь-яке число з проміжку $[3; 4]$.

Задача 2. У ящику лежить 5 пронумерованих кульок (номери від 1 до 5). Навмання виймається кулька. Випадкова величина X — номер кульки. Вважаючи, що ймовірність дістати будь-яку кульку однакова, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини, а також моду і медіану.

Відповідь. $M(X) = Me(X) = 3$; $D(X) = 2$; $\sigma(X) = \sqrt{2} \approx 1{,}41$; $Mo(X) = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Задача 3. Симетрична монета підкидається 3 рази. Випадкова величина X — кількість аверсів, які при цьому випадали. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини, вважаючи рівноймовірними випадання аверсу та реверсу.

Відповідь. $M(X)=\frac{3}{2}$; $D(X)=\frac{3}{4}$.

Задача 4. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості хлопчиків у сім'ї з трьома дітьми (вважаючи народження хлопчика і дівчинки рівноймовірними подіями).

Відповідь. $M(X)=\frac{3}{2}$; $D(X)=\frac{3}{4}$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$.

Задача 5. Стрілець робить 4 постріли по мішені. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості влучень, вважаючи, що ймовірність влучення при одному пострілі 0,7.

Відповідь. $M(X) = 2{,}8$; $D(X) = 0{,}84$; $\sigma(X)=\sqrt{0{,}84}\approx 0{,}92$.

Задача 6. Студент знає відповідь на 20 питань з 25. Навмання і за умови рівноможливості виймається 5 питань. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості питань, на які студент знає відповідь.

Вказівка. Скористайтеся числовими характеристиками гіпергеометричного розподілу з параметрами m, n, N:

$$M(X)=\frac{mn}{N},\ D(X)=\frac{mn(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{mn(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}}.$$

Відповідь. $M(X) = 4$; $D(X)=\frac{2}{3}$; $\sigma(X)=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}82$.

Задача 7. У ящику знаходяться кульки — 7 зелених і 3 жовті. Навмання і за умови рівноможливості вибирається кулька, фіксується її колір, і кулька повертається до ящика. Випробування повторюється 4 рази. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, яка дорівнює кількості зелених кульок, які з'явились при вийманні.

Відповідь. $M(X) = 2{,}8$; $D(X) = 0{,}84$; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}84} \approx 0{,}92.$

Задача 8. У групі з 20 студентів троє відмінників. Випадково і за умови рівноможливості вибирається 4 студенти. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості відмінників серед вибраних студентів.

Відповідь. $M(X) = 0{,}6$; $D(X) = \frac{204}{475} \approx 0{,}43$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{204}{475}} \approx 0{,}66.$

Задача 9. Серед 10 деталей є 2 браковані. Для контролю навмання і за умови рівноможливості вибирають 3 деталі. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості бракованих деталей серед вибраних.

Відповідь. $M(X) = 0{,}6$; $D(X) = \frac{28}{75} \approx 0{,}37$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{28}{75}} \approx 0{,}61.$

Задача 10. Знайти числові характеристики випадкової величини Y, яка дорівнює кількості вгаданих номерів у лотереї «5 із 36» за умови рівноможливості вибору.

Відповідь. $M(Y) = 0{,}69$; $D(Y) \approx 0{,}53$; $\sigma(Y) \approx 0{,}73.$

Задача 11. Кубик підкидається доти, поки не випаде шістка. X — випадкова величина, яка дорівнює кількості підкидань. Знайти числові характеристики випадкової величини X і $P(|X - M(X)| < 3\sigma(X))$ за умови рівноможливості випадання кожної грані.

Відповідь. $M(X) = 6$; $D(X) = 30$; $\sigma(X) = \sqrt{30} \approx 5{,}48$;

$$P(|X - M(X)| < 3\sigma(X)) = P(1 < X < 22) = 1 - \frac{1}{6^{22}} \approx 1.$$

Задача 12. Гравець грає в рулетку до свого першого виграшу, кожного разу ставлячи на червоне й повторюючи ставку. X — випадкова величина, яка дорівнює кількості спроб, Y — випадкова величина, яка дорівнює виграшу гравця. Знайти числові характеристики випадкових величин X і Y, вважаючи, що гравець має необмежену кількість грошей і розмір ставки не обмежений правилами.

$$\textbf{\textit{Відповідь.}}\, M(X)=\frac{37}{18}\approx 2{,}06; D(X)=\frac{703}{324}\approx 2{,}17; \sigma(X)=\sqrt{\frac{703}{324}}\approx 1{,}47.$$

Випадкова величина $Y = a$, якщо $X = 1$, і $Y = 2a \cdot 3^{n-2} \cdot X$, якщо $X = n$, $n = 2, 3, \ldots$, де a — розмір першої ставки; $M(Y) = +\infty$.

Задача 13. Магазин отримав 10000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка розіб'ється, дорівнює 0,0004. Знайти числові характеристики випадкової величини, яка дорівнює кількості розбитих пляшок.

Відповідь. $M(X) = 4$; $D(X) = 4$; $\sigma(X) = 2$.

Задача 14. Підручник видано тиражем 10000 екземплярів. Ймовірність того, що зброшурований екземпляр виявиться неякісним, дорівнює 0,001. Знайти числові характеристики випадкової величини, яка дорівнює кількості неякісних екземплярів.

Відповідь. $M(X) = 10$; $D(X) = 10$; $\sigma(X)=\sqrt{10}\approx 3{,}16$.

Задача 15. Автоматична телефонна станція обслуговує 10000 телефонних номерів. Ймовірність того, що протягом 1 хв на АТС надійде виклик від абонента, дорівнює 0,0004. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості викликів, що надійшли на АТС протягом 1 хв.

Відповідь. $M(X) = 4$; $D(X) = 4$; $\sigma(X) = 2$.

Задача 16. Ймовірність влучення у мішень, що рухається, з пістолета дорівнює 0,001. Відбувається 2000 пострілів. Знайти числові характеристики випадкової величини Y, яка дорівнює кількості влучень у мішень.

Відповідь. $M(Y) = 2$; $D(Y) = 2$; $\sigma(Y) = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Задача 17. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[1; 11]$. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $Mo(X)$, $Me(X)$.

Відповідь. $M(X) = 6$; $D(X) = \frac{25}{3}$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 2,89$; $Mo(X) = Me(X) = M(X)$.

Задача 18. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[7; a]$, причому щільність на цьому проміжку дорівнює $\frac{1}{20}$. Зазначити значення параметра a і числові характеристики випадкової величини X.

Відповідь. $a = 27$; $M(X) = 17$; $D(X) = \frac{100}{3}$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{100}{3}} \approx 5,77$.

Задача 19. Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу ймовірності

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{2}{e^{2x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини X.

Відповідь. $M(X) = \frac{1}{2}$, $D(X) = \frac{1}{4}$, $\sigma(X) = \frac{1}{2}$.

Задача 20. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Відповідь. $M(X) = \frac{8}{3}$; $D(X) = \frac{1}{18}$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{6}} \approx 0,24$.

Задача 21. Щільність випадкової величини X задано графічно (*рис. 45*).

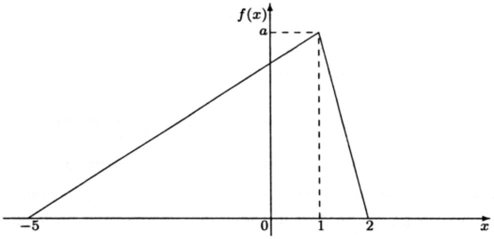


Рис. 45

Знайти значення параметра a та числові характеристики випадкової величини X, включаючи моду і медіану.

Відповідь. $a = \frac{2}{7}$; $M(X) = -\frac{2}{3}$; $D(X) = \frac{43}{18} \approx 2,39$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{43}{18}} \approx 1,55$; $Mo\ (X) = 1$; $Me(X) = \sqrt{21} - 5$.

Задача 22. У середині круга радіуса R випадковим чином вибирається точка. Ймовірність того що, точка потрапить до будь-якої області, що міститься в крузі, пропорційна площі цієї області. Знайти функцію розподілу та дисперсію випадкової величини X, яка дорівнює відстані від точки до центра круга.

Відповідь. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \le R; \\ 1, & x > R, \end{cases}$ $D(X) = \frac{R^2}{12}$.

Задача 23. Коробки з шоколадом пакуються автоматично, їх середня маса дорівнює 1,06 кг. Вважаючи, що маса коробок розподілена за нормальним законом, знайти стандартне відхилення, якщо 5 % коробок мають масу менше 1 кг.

Відповідь. $\sigma = \frac{0,06}{2,58} \approx 0,023$.

Питання для самоконтролю до розділу 8

1. Назвіть основні числові характеристики, що описують розподіл ймовірності випадкової величини.
2. Що називають математичним сподіванням?
3. В яких одиницях вимірюється математичне сподівання по відношенню до одиниць вимірювання випадкової величини?
4. Назвіть властивості математичного сподівання.
5. Що називають дисперсією?
6. Сформулюйте властивості дисперсії.
7. Що називають середнім квадратичним відхиленням?
8. Що таке мода?
9. Що таке медіана?
10. Наведіть приклади унімодального, бімодального та полімодального розподілів.

Тест 7

1. Випадкова величина X вимірюється в кілограмах. В яких одиницях вимірюється $M(x)$?
а) кг^2 ; б) кг; в) безрозмірна; г) визначити не можливо; д) відповідь відсутня.

2. Випадкова величина X вимірюється в метрах. В яких одиницях вимірюються $D(x)$?
а) м^2; б) м; в) безрозмірна; г) вичислити неможливо; д) відповідь відсутня.

3. Випадкова величина X вимірюється в сантиметрах. В яких одиницях вимірюється $\sigma(x)$?
а) см; б) см^2; в) безрозмірна; г) визначити неможливо; д) відповідь відсутня.

4. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл. Цей розподіл:
а) унімодальний; б) бімодальний; в) полімодальний; г) моди не існує; д) відповідь відсутня.

5. Випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами $a = 4$, $\sigma = 2$. Виберіть проміжок, в якій випадкова величина X попадає з ймовірністю 0,997.
а) (2;6); б) (0;8); в) (–2;10); г) (–4;12); д) відповідь відсутня.

6. Випадкова величина X має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами $a = 5$, $\sigma = 1$. Яка ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[5, +\infty)$?
а) 0,2; б) 0,5; в) 0,9; г) 1; д) відповідь відсутня.

7. Випадкова величина X має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами $a = 6$, $\sigma = 2$. Яка із наведених рівностей неправильна?
а) $P(X < 6) = P(X > 6)$;
б) $P(X \in (0; 6)) = P(X \in (6; 12))$;
в) $P(2 \le x \le 4) = P(8 \le x \le 10)$;
г) $P(X \in (0; 2)) = P(X \in (6; 8))$;
д) всі рівності правильні.

8. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу ймовірностей (*табл. 8.3*). Чому дорівнює математичне сподівання $M(x)$?

Таблиця 8.3

x_i	–2	–1	0	1	2
p_i	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

а) –2; б) 1; в) 0; г) 2; д) відповідь відсутня.

9. Неперервна випадкова величина X має показниковий розподіл з параметрами $\lambda = 4$. Обчислити значення дисперсії випадкової величини X.
а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{16}$; г) 4; д) відповідь відсутня.

10. Неперервна випадкова величина X задана графіком щільності розподілу ймовірності на проміжну (1; 7). За межами проміжку (1; 7) щільність розподілу $f(x) = 0$. Виберіть неправильне твердження:
а) $Me(X) = 4$;
б) $P(2 \le X \le 3) = P(5 \le X \le 6)$;
в) $P(X > 8) = 0$;
г) $P(X \le 8) = 1$;
д) $F(4) = \frac{1}{3}$.

Розділ 9. Системи двох випадкових величин

Якщо стосовно одного ймовірнісного простору (Ω, S, P) задано дві випадкові величини X і Y, то вважають, що задано *систему двох випадкових величин* (X, Y), або *двовимірну випадкову величину*, або *випадковий двовимірний вектор*.

При вивченні системи випадкових величин необхідно враховувати залежність між ними.

Функцією розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) називають функцію двох змінних

$$F_{(X,\,Y)}(x, y) = F(x, y) = P(X < x,\ Y < y), \qquad (50)$$

де $X < x$, $Y < y$ означає подію $\{\omega\in\Omega\colon X(\omega) < x \text{ та } Y(\omega) < y\}$ влучення випадкової точки (X, Y) у нескінченний квадрант з вершиною в точці (x, y) (лівіше й нижче від точки (x, y)).

Функція розподілу двовимірної випадкової величини має такі **властивості.**

1. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1;\quad \lim\limits_{x\to x_0-} F(x,y)=F(x_0,y),\quad \lim\limits_{y\to y_0-} F(x,y)=F(x,y_0),$

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0-\\ y\to y_0-}} F(x,y)=F(x_0,y_0),\quad \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0.$$

2. $F(x, y)$ неспадна по кожній змінній, тобто:

а) якщо $y_1 < y_2$, то $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$ для всіх $x\in R$;

б) якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$ для всіх $y \in R$.

3. Якщо випадкова величина X має функцію розподілу $F_X(y)$, а випадкова величина Y — функцію розподілу $F_Y(x)$, то

$$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)=F_X(y),\quad \lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y)=F_Y(x).$$

4. Ймовірність влучення випадкової точки (X, Y) у прямокутник $[a; b) \times [c; d)$ зі сторонами, які паралельні координатним осям, обчислюється за формулою

$$P(a \le X < b;\ c \le Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

Як і одновимірні, двовимірні випадкові величини можна розподілити на два класи: *дискретні* та *неперервні*.

Двовимірна випадкова величина (X, Y) називається *дискретною*, якщо і випадкова величина X, і випадкова величина Y є дискретними випадковими величинами. При цьому існують значення x_j, $j = 1, 2, \ldots$, та значення y_i, $i = 1, 2, \ldots$, для яких $P(X=x_j;\ Y=y_i)=P_{i,j}\geq 0$ та $\sum_i \sum_j P_{ij}=1.$
У випадку, коли $1\leq j\leq n$, $1\leq i\leq m$, дискретну двовимірну випадкову величину (X, Y) зручно задавати за допомогою таблиці *(табл. 9.1)*:

Таблиця 9.1

Y \ X	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Для дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) функція розподілу набуває вигляду суми

$$F(x,y)=\sum_{(i,j):\begin{cases}x_j<x;\\ y_i<y.\end{cases}} p_{ij}\ ,$$

тобто обчислення сум виконується по всіх наборах (i, j), для яких одночасно $x_j < x$ і $y_i < y$.

Користуючись наведеною вище таблицею, легко визначити розподіли кожної випадкової величини окремо за допомогою формул:

$$P(X=x_j)=p_{1j}+p_{2j}+\ldots+p_{mj},\ j=1,2,\ldots\ ;$$
$$P(Y=y_j)=p_{i1}+p_{i2}+\ldots+p_{im},\ i=1,2,\ldots\ .$$

Двовимірна випадкова величина називається *неперервною*, якщо ймовірність влучення випадкової точки (X, Y) у довільну фіксовану точку дорівнює нулю, тобто

$$P\left(X=x_0,Y=y_0\right)=P\left(\left(X,Y\right)=\left(x_0,y_0\right)\right)=0$$

для будь-яких (x_0, y_0).

Випадкова двовимірна величина (X, Y) називається *абсолютно неперервною*, якщо існує така невід'ємна функція $f_{(X, Y)}(x, y) = f(x, y)$, для якої виконується рівність

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \,,\; x \in R \,,\; y \in R \,. \tag{51}$$

Функція $f(x, y)$ називається *щільністю* розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y).

Щільність f (x, y) має такі властивості.

1. $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$ у кожній точці неперервності функції $f(x, y)$.

2. $f(x, y) \geq 0$, $x \in R$, $y \in R$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

4. Ймовірність влучення випадкової точки (X, Y) у вимірну плоску область D

$$P\big((X,Y) \in D\big) = \iint_{D} f(x,y)dxdy. \tag{52}$$

Якщо випадкові величини X і Y *незалежні*, то

$$F_{(X, Y)}(x, y) = F_Y(x) \cdot F_X(y).$$

Для абсолютно неперервних випадкових величин ця умова рівносильна умові

$$f_{(X, Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

де $f_X(x)$ і $f_Y(y)$ — щільності розподілу випадкових величин X і Y відповідно.

Щільності $f_X(x)$ і $f_Y(y)$ можна обчислити за такими формулами:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \tag{53}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx. \quad (54)$$

Якщо випадкові величини X і Y залежні, то для знаходження розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) недостатньо знати закони розподілу кожної з випадкових величин X і Y.

Умовним законом розподілу називається розподіл однієї випадкової величини, знайдений за умови, що інша випадкова величина системи набула деякого фіксованого значення.

Умовний закон можна задати і як умовну функцію розподілу $F(x / y)$, і як умовну щільність $f_{X / Y}(x / y)$ (для абсолютно неперервного випадку), де

$$f_{X/Y}(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}; \quad (55)$$

$$f_{Y/X}(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}. \quad (56)$$

Отже,

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_{Y/X}(y / x) = f_Y(y) \cdot f_{X/Y}(x / y).$$

Умовна щільність має всі властивості щільності одновимірного закону розподілу.

Числові характеристики умовних законів розподілу обчислюють як і раніше, але використовуючи умовну щільність.

Для опису рівня залежності випадкових величин X і Y використовують такі числові характеристики як *коваріація* та *коефіцієнт кореляції*.

Коваріацією (*кореляційним моментом*) системи випадкових величин (X, Y) називають число

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y)] = M(XY) - M(X) \cdot M(Y). \quad (57)$$

Якщо X і Y дискретні, то

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))(y_i - M(Y)) p_{ij}. \quad (58)$$

Якщо X і Y абсолютно неперервні, то

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))(y - M(Y)) f(x, y)\, dxdy. \quad (59)$$

Коефіцієнтом кореляції системи випадкових величин X і Y називають число

$$r(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \tag{60}$$

Якщо X і Y — незалежні випадкові величини, то

$$\operatorname{cov}(X, Y) = r(X, Y) = 0.$$

Обернене твердження неправильне. Існують залежні випадкові величини, для яких коваріація та коефіцієнт кореляції дорівнюють нулю.

Для довільних випадкових величин

$$-1 \le r(X, Y) \le 1.$$

Чим ближче $|r(X, Y)|$ до одиниці, тим сильнішим вважають рівень залежності між X і Y. Якщо $r(X, Y) = 0$, то випадкові величини називаються *некорельованими*.

Приклад 1. Із коробки, у якій міститься 3 червоні й 2 сині кульки, навмання без повторень виймають послідовно кульки до першої появи синьої кульки. Далі кульки виймають до першої появи червоної кульки або до закінчення кульок у коробці.

Необхідно описати закон розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y), де X — кількість червоних кульок, узятих із коробки до першої появи синьої кульки; Y — кількість синіх кульок, узятих із коробки до першої появи червоної кульки або до закінчення кульок після того, як перша синя кулька була вийнята з коробки.

Складіти окремі закони розподілу для випадкових величин X і Y.

Розв'язання. Випадкова величина X може набувати значень 0, 1, 2, 3, а випадкова величина Y — значень 0, 1. Обчислимо p_{ij}, $i=\overline{0,3}$, $j=\overline{0,1}$ — ймовірності того, що $X = i$, $Y = j$:

$$p_{0,0}=\left(x=0,\ y=0\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{6}{20};$$

$$p_{0,1}=\left(x=0,\ y=1\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{20};$$

$$p_{1,0}=\left(x=1,\ y=0\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{20};$$

$$p_{1,1} = (x = 1,\ y = 1) = \frac{2}{20};$$

$$p_{2,0} = (x = 2,\ y = 0) = \frac{2}{20};$$

$$p_{2,1} = (x = 2,\ y = 1) = \frac{2}{20};$$

$$p_{3,0} = (x = 3,\ y = 0) = 0;$$

$$p_{3,1} = (x = 3,\ y = 1) = \frac{2}{20}.$$

Отримані значення запишемо в таблицю (*табл. 9.2*) розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y)

Таблиця 9.2

Y \ X	0	1	2	3	Σ
0	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	0	$\frac{12}{20}$
1	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$
Σ	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	1

Із отриманої таблиці досить легко записати безумовні закони розподілу для випадкових величин X і Y *(табл. 9.3, а, б)*.

Таблиця 9.3, а

x	0	1	2	3
p	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

Таблиця 9.3, б

y	0	1
p	$\frac{12}{20}$	$\frac{8}{20}$

Приклад 2. Задано таблицю (*табл. 9.4*) розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y):

Таблиця 9.4

Y \ X	1	2	3
–1	0,2	0,1	0,3
0	0,15	0,15	0,1

Потрібно:

а) знайти безумовні закони розподілу випадкових величин X та Y;

б) знайти умовний закон розподілу X за умови, що $Y = -1$;

в) знайти умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 3$;

г) з'ясувати, залежні чи ні випадкові величини X і Y.

Розв'язання.

а) Обчислимо безумовні ймовірності $P(X = i)$ $(i = 1, 2, 3)$ і $P(Y = j)$ $(j = -1, 0)$:

$$P(X = 1) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35;$$

$$P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25;$$

$$P(X = 3) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4;$$

$$P(Y = -1) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}6;$$

$$P(Y = 0) = 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}4.$$

Запишемо безумовні закони розподілу X і Y *(табл. 9.5, а, б)*:

Таблиця 9.5, а

X	1	2	3
P	0,35	0,25	0,4

Таблиця 9.5, б

X	–1	2
P	0,6	0,4

б) Для того, щоб записати умовний закон розподілу X за умови, що $Y = -1$, обчислимо умовні ймовірності:

$$P(X=1/Y=-1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=-1)}=\frac{0,2}{0,2+0,1+0,3}=\frac{1}{3}$$

і аналогічно

$$P(X=2/Y=-1)=\frac{0,1}{0,2+0,1+0,3}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=3/Y=-1)=\frac{0,3}{0,2+0,1+0,3}=\frac{1}{2}.$$

Умовний закон розподілу X за умови, що $Y = -1$, матиме такий вигляд (*табл. 9.6*):

Таблиця 9.6

X	1	2	3
$P\,(X\,/\,Y=-1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

в) Оскільки

$$P(Y=-1/X=3)=\frac{0,3}{0,3+0,1}=\frac{3}{4};$$

$$P(Y=0/X=3)=\frac{0,1}{0,3+0,1}=\frac{1}{4},$$

умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 3$, матиме такий вигляд (*табл. 9.7*):

Таблиця 9.7

Y	–1	0
$P\,(Y\,/\,X=3)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

г) Той факт, що безумовний закон величини X не збігається з одним із умовних законів розподілу цієї величини, свідчить про те, що величини X і Y залежні.

Приклад 3. Система випадкових величин (X, Y) має розподіл ймовірностей, представлений у *табл. 9.8*.

Таблиця 9.8

Y \ X	0	1
0	0,2	0,15
1	0,15	0,15
2	0,1	0,25

Знайти:

а) математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$;

б) дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$.

Розв'язання. а) Щоб знайти математичне сподівання $M(X)$, скористаємось формулою

$$M(X) = \sum_i \sum_j x_i p_{ij},$$

звідки

$$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,25 = 0,55.$$

Такий самий результат отримаємо, якщо запишемо безумовний закон розподілу випадкової величини X *(табл. 9.9)*,

Таблиця 9.9

X	0	1
P	0,45	0,55

і далі скористаємося формулою

$$M(X) = \sum_i x_i p_i \ ,$$

звідки

$$M(X) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,55 = 0,55.$$

Аналогічно обчислюємо математичне сподівання Y:

$$M(Y) = 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,25 = 1,$$

або з безумовного закону розподілу (*табл. 9.10*)

Таблиця 9.10

Y	0	1	2
P	0,35	0,3	0,35

отримуємо

$$M(Y) = 0 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}35 = 1.$$

б) Для обчислення дисперсії D (X), можна скористаємось формулою

$$D(X) = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))^2 p_{ij},$$

звідки

$$D(X) = (0 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}2 + (0 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}15 + (0 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ (1 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}25 =$$
$$= 0{,}0605 + 0{,}045375 + 0{,}03025 + 0{,}030375 + 0{,}030375 +$$
$$+ 0{,}050625 = 0{,}2475.$$

Такий самий результат отримаємо, якщо скористаємося безумовним законом розподілу ймовірностей випадкової величини X і формулою

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Отримаємо

$$D(X) = (0 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}45 + (1 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}55 =$$
$$= 0{,}136125 + 0{,}111375 = 0{,}2475.$$

Аналогічно обчислюється дисперсія D (Y). Скористаємося безумовним законом розподілу ймовірностей випадкової величини Y і формулою

$$D(Y) = \sum_i (y_i - M(Y))^2 p_i\ .$$

Маємо

$$D(Y) = (0 - 1)^2 \cdot 0{,}35 + (1 - 1)^2 \cdot 0{,}3 + (2 - 1)^2 \cdot 0{,}35 =$$
$$= 0{,}35 + 0 + 0{,}35 = 0{,}7.$$

Приклад 4. По мішені проводиться один постріл. Ймовірність влучення дорівнює p. Розглядається X — кількість влучень, Y — кількість промахів.

Побудувати функцію розподілу $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини (X, Y).

Розв'язання. Знайдемо ймовірності:

$$P(X = 0, Y = 0) = 0;\ P(X = 1, Y = 0) = p;$$

$$P(X = 0, Y = 1) = 1 - p;\ P(X = 1, Y = 1) = 0.$$

Побудуємо таблицю (*табл. 9.11*) розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y):

Таблиця 9.11

Y \ X	0	1
0	0	p
1	$1-p$	0

Функцію розподілу ймовірностей системи випадкових величин зручно подати у вигляді таблиці (*табл. 9.12*):

Таблиця 9.12

$F(x, y)$	$x < 0$	$0 \le x < 1$	$x \ge 1$
$y < 0$	0	0	0
$0 \le y < 1$	0	0	p
$y \ge 1$	0	$1-p$	1

Приклад 5. Система дискретних випадкових величин (X, Y) задана таблицею розподілу ймовірностей (*таблиця 9.13*).

Таблиця 9.13

Y	X				$\sum_{i=1}^{4} p_{ij}$
	–10	–8	–6	–4	
10	0,023	0,027	0,05	0,1	0,2
20	0,05	0,1	0,025	0,025	0,2
30	0,05	0,05	0,025	0,025	0,15
40	0,027	0,023	0,05	0,35	0,45
$\sum_{j=1}^{4} p_{ij}$	0,15	0,2	0,15	0,5	$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_{ij} = 1$

Обчислити математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, кореляційний момент $\operatorname{cov}(X, Y)$, коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$, а також умовні математичні сподівання $M(X \,/\, Y = 40)$ і $M(X \,/\, Y = -8)$.

Розв'язання. Побудуємо безумовні закони розподілу X і Y *(табл. 9.14, а, б)*:

Таблиця 9.14, а

X	–10	–8	–6	–4
P	0,15	0,2	0,15	0,5

Таблиця 9.14, б

Y	10	20	30	40
P	0,2	0,2	0,15	0,45

Обчислимо математичні сподівання за формулами

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i, \; M(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i p_i.$$

Отже,

$$M\,(X) = -1{,}5 - 1{,}6 - 0{,}9 - 2 = -6;$$

$$M\,(Y) = 2 + 4 + 4{,}5 + 18 = 28{,}5.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\rho,$$

де $D(X)$ — дисперсія випадкової величини X:

$$D(X) = (-10+6)^2 \cdot 0,15 + (-8+6)^2 \cdot 0,2 +$$
$$+ (-6+6)^2 \cdot 0,15 + (-4+6)^2 \cdot 0,5 = 5,2.$$

Отже,

$$\sigma(X) = \sqrt{5,2} \approx 2,28.$$

Аналогічно обчислюємо $D(Y)$ і $\sigma(Y)$:

$$D(Y) = (10 - 28,5)^2 \cdot 0,2 + (20 - 28,5)^2 \cdot 0,2 +$$
$$+ (30 - 28,5)^2 \cdot 0,15 + (40 - 28,5)^2 \cdot 0,45 = 142,75;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{142,75} \approx 11,95.$$

Кореляційний момент

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)\,M(Y),$$

де

$$M(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = -2,3 - 80 \cdot 0,027 - 60 \cdot 0,05 - 40 \cdot 0,1 -$$
$$-200 \cdot 0,05 - 160 \cdot 0,1 - 120 \cdot 0,025 - 80 \cdot 0,025 - 300 \cdot 0,05 -$$
$$-240 \cdot 0,05 - 180 \cdot 0,025 - 120 \cdot 0,025 - 400 \cdot 0,027 - 320 \cdot 0,023 -$$
$$-240 \cdot 0,05 - 160 \cdot 0,35 = -163,12;$$

$$M(X)\,M(Y) = -6 \cdot 28,5 = -171.$$

Отже,

$$\operatorname{cov}(X, Y) = -163,12 - (-171) = 7,88.$$

Коефіцієнт кореляції

$$r(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Отже,

$$r(X,Y) = \frac{-7,88}{2,28 \cdot 11,95} \approx 0,29.$$

Оскільки $r(X, Y) \neq 0$, можемо зробити висновок про корельованість випадкових величин X і Y.

Для обчислення $M(X/Y=40)$ будуємо умовний закон розподілу для випадкової величини X при $Y = 40$, застосовуючи формулу

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}.$$

Маємо (*табл. 9.15*):

Таблиця 9.15

X	–10	–8	–6	–4
$P(X/Y=40)$	$\frac{27}{450}$	$\frac{23}{450}$	$\frac{50}{450}$	$\frac{350}{450}$

Отже,

$$M(X/Y=40) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i, Y = 40) =$$

$$= \frac{1}{450}(-10\cdot 27 - 8\cdot 23 - 6\cdot 50 - 4\cdot 350) = -\frac{2154}{450} \approx -4,79.$$

Аналогічно обчислюємо $M(Y/X=-8)$ (*табл. 9.16*):

Таблиця 9.16

Y	10	20	30	40
$P(Y/X=-8)$	$\frac{27}{200}$	$\frac{100}{200}$	$\frac{50}{200}$	$\frac{23}{200}$

$$M(Y/X=-8) = \frac{1}{200}(270 + 2000 + 1500 + 920) = \frac{4690}{200} = 23,45.$$

Приклад 6. Система випадкових величин (X, Y) має щільність розподілу ймовірностей

$$f(x, y) = a(xy + y^2),$$

де $(x, y) \in D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1;\ 0,5x \le y \le x\}$, та $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$.

Знайти значення константи a, математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, кореляційний момент $\operatorname{cov}(X, Y)$ і коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$.

Розв'язання. Щоб знайти константу a, скористаємося характеристичною властивістю функції щільності розподілу ймовірностей $f(x, y)$:

$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy = 1;$$

$$\iint_D a(xy+y^2)dxdy = a\iint_D (xy+y^2)dxdy = a\int_0^1 \int_{0,5x}^{x} (xy+y^2)dxdy =$$

$$= a\int_0^1 \left(\int_{0,5x}^{x} (xy+y^2)dy \right) dx = a\int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{0,5x}^{x} dx =$$

$$= a\int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{0,25x^3}{2} - \frac{0,125x^3}{3} \right) dx =$$

$$= a\int_0^1 \frac{4x^3}{6} dx = \frac{4a}{6} \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{a}{6},$$

звідки $\frac{a}{6} = 1$, тому $a = 6$.

Функцію $f(x, y)$ можна записати так:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(xy+y^2), \text{якщо } (x,y) \in D; \\ 0, \text{якщо } (x,y), \notin D. \end{cases}$$

Враховуючи (53), математичне сподівання $M(X)$ обчислюємо за формулою

$$M(X) = \iint_{R^2} x\, f(x,y)dxdy = \iint_D x\, f(x,y)dxdy.$$

Маємо

$$M(X)=\int_{0}^{1}\int_{0,5x}^{x}6x(xy+y^2)dxdy=6\int_{0}^{1}\left(\int_{0,5x}^{x}(x^2y+xy^2)dy\right)dx=$$

$$=6\int_{0}^{1}\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x}dx=6\int_{0}^{1}\left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{0,25x^4}{2}-\frac{0,125x^4}{3}\right)dx=$$

$$=6\int_{0}^{1}\frac{4}{6}x^4dx=4\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{4}{5}=0,8.$$

Аналогічно, враховуючи (54), обчислюємо $M\ (Y)$:

$$M(Y)=\iint_{R^2}y\,f(x,y)dxdy\,.$$

$$M(Y)=\int_{0}^{1}\int_{0,5x}^{x}6y(xy+y^2)dxdy=6\int_{0}^{1}\left(\int_{0,5x}^{x}(xy^2+y^3)dy\right)dx=$$

$$=6\int_{0}^{1}\left(\frac{xy^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x}dx=6\int_{0}^{1}\left(\frac{x^4}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{0,125x^4}{3}-\frac{0,0625x^4}{4}\right)dx=$$

$$=6\int_{0}^{1}\frac{6,3125}{12}x^4dx=\frac{1}{2}\cdot 0,6,3125\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{0}^{1}=0,63125.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\ ,$$

де $D\ (X)$ — дисперсія випадкової величини X, яку обчислюємо за формулою

$$D(X)=\iint_{R^2}x^2\,f(x,y)dxdy-(M(X))^2=\iint_{D}x^2\,f(x,y)dxdy-\big(M(X)\big)^2.$$

Отже,

$$D(X)=\int\limits_0^1\int\limits_{0,5x}^{x}x^2(xy+y^2)dxdy-0,64=6\int\limits_0^1\left(\frac{x^3y^2}{2}+\frac{x^2y^3}{3}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x}dx-$$

$$-0,64=6\int\limits_0^1\left(\frac{x^5}{2}+\frac{x^5}{3}-\frac{0,25x^5}{2}-\frac{0,125x^5}{3}\right)dx-0,64=$$

$$=\frac{4x^6}{6}\Bigg|_0^1-0,64=\frac{2}{3}-0,64=\frac{2}{75};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{2}{75}}\approx 0,163\,.$$

Аналогічно обчислюємо σ (Y):

$$D(Y)=\iint\limits_{R^2}y^2\,f(x,y)dxdy-(M(Y))^2=\iint\limits_{D}y^2\,f(x,y)dxdy-\big(M(Y)\big)^2.$$

$$D(X)=6\int\limits_0^1\int\limits_{0,5x}^{x}y^2(xy+y^2)dxdy-0,398=6\int\limits_0^1\left(\frac{xy^4}{4}+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x}dx-0,398=$$

$$=6\int\limits_0^1\left(\frac{x^5}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{0,0625x^5}{4}-\frac{0,03125x^5}{5}\right)dx-0,398\approx 0,428;$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{0,428}\approx 0,654.$$

Кореляційний момент

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\iint\limits_{R^2}xy\,f(x,y)dxdy-M(X)M(Y)=\iint\limits_{D}xy\,f(x,y)dxdy-M(X)M(Y)=$$

$$=6\int\limits_0^1\int\limits_{0,5x}^{x}xy(xy+y^2)dxdy-0,8\cdot 0,63125=6\int\limits_0^1\left(\frac{x^2y^3}{3}+\frac{xy^4}{4}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x}dx-0,505=$$

$$=6\int\limits_0^1\left(\frac{x^5}{3}+\frac{x^5}{4}-\frac{0,125x^5}{3}-\frac{0,0625x^5}{4}\right)dx-0,505=\frac{6,3125}{12}x^6\Bigg|_0^1-0,505\approx 0,021.$$

За формулою

$$r(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

обчислимо коефіцієнт кореляції:

$$r(X,Y)=\frac{0{,}021}{0{,}163\cdot 0{,}654}\approx 0{,}2\,.$$

Отже,

$$r\,(X,\,Y)=0{,}2,$$

а це означає, що випадкові величини X і Y корельовані.

Приклад 7. Система випадкових величин $(X,\,Y)$ має рівномірний розподіл ймовірностей у замкненій області

$$D=\{(x,y):x\in[0;1],y\in[0;1]\}\,.$$

За межами D щільність розподілу ймовірностей дорівнює нулю.

Знайти функцію щільності розподілу ймовірностей $f_{(X,\,Y)}\,(x,y)=$ $=f(x,\,y)$ та інтегральну функцію розподілу $F_{(X,\,Y)}\,(x,\,y)=F(x,\,y)$.

Розв'язання. Відповідно до умови задачі в загальному вигляді диференціальну функцію $f\,(x,\,y)$ можна записати так:

$$f_{(X,Y)}(x,\,y)=f(x,\,y)=\begin{cases}c,\;(x,y)\in D;\\0,\;(x,y)\notin D.\end{cases}$$

За характеристичною властивістю

$$\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=1\,,$$

і враховуючи, що за межами замкненої області D щільність розподілу ймовірностей дорівнює нулю, можна записати

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=1\,.$$

Геометрична інтерпретація останньої рівності така: об'єм паралелепіпеда, обмеженого знизу замкненою областю D і зверху графіком функції $f(x, y)$, дорівнює одиниці. Оскільки система випадкових величин (X, Y) за умовою задачі має рівномірний розподіл, геометричну інтерпретацію можна деталізувати так: об'єм прямокутного паралелепіпеда, в основі якого лежить прямокутник $OABC$ (*рис. 46*), дорівнює одиниці.

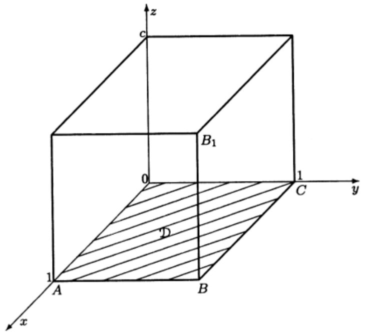


Рис. 46

Довжина відрізка BB_1 — висоти прямокутного паралелепіпеда — дорівнює значенню c у записі функції щільності $f(x, y)$.

Отже, очевидним є спосіб відшукання c:

$$V_{\text{парал}} = 1.$$

Оскільки

$$V_{\text{парал}} = S_{\text{осн}} \cdot H,$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи паралелепіпеда (прямокутника $OABC$); H — висота паралелепіпеда ($H = BB_1 = c$),

$$S_{OABC} = AO \cdot OC = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$V_{\text{парал}} = 1 \cdot BB_1 = c.$$

Отже,

$$c = 1.$$

Функцію $f(x, y)$ можна записати так:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, (x, y) \in D; \\ 0, (x, y) \notin D. \end{cases}$$

За означенням функції розподілу ймовірності

$$F_{(X, Y)}(x, y) = F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

З геометричної точки зору $F(x, y)$ — це ймовірність влучення випадкового вектора (X, Y) у нескінченний квадрант з вершиною в точці $(x; y)$ (*рис. 47*).

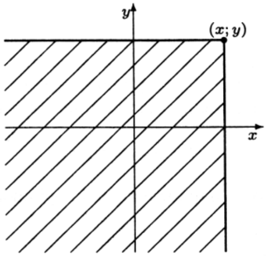


Рис. 47

При $x \le 0$ або $y \le 0$ $F(x, y) = 0$, оскільки $f(x, y) = 0$ відповідно до умови задачі.

Якщо $0 < x \le 1$ і $0 < y \le 1$, то для відшукання $F(x, y)$ необхідно знайти об'єм прямокутного паралелепіпеда з основою $OA'B'C'$ (*рис. 48*).

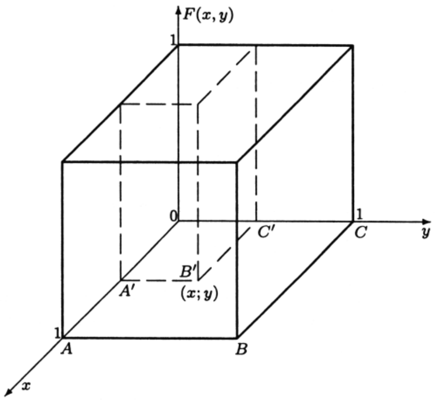


Рис. 48

Зазначимо, що точка B' має координати (x, y), через які визначимо шуканий об'єм. Очевидно, що площа прямокутника $OA'B'C'$

$$S_{OA'B'C'} = xy.$$

Ураховуючи, що висота паралелепіпеда дорівнює одиниці, можна записати, що

$$F(x, y) = xy, \text{ якщо } 0 \le x < 1 \quad \text{і} \quad 0 \le y < 1.$$

Зрозуміло, що у випадку $0 < x \le 1$ і $y > 1$ (*рис. 49*) маємо

$$F(x, y) = x,$$

а при $x > 1$ і $0 < y \le 1$ (*рис. 50*)

$$F(x, y) = y.$$

Якщо $x \ge 1$ і $y \ge 1$ (*рис. 51*), то

$$F(x, y) = 1,$$

оскільки об'єм прямокутного паралелепіпеда з основою $OABC$ дорівнює одиниці.

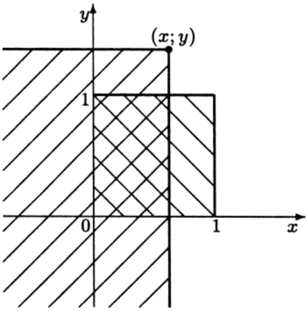


Рис. 49

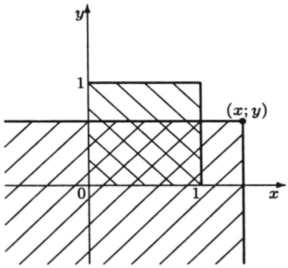


Рис. 50

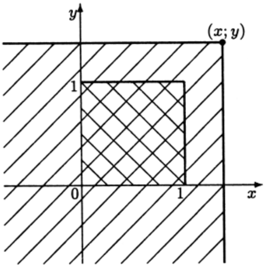


Рис. 51

Остаточно можна записати вираз для інтегральної функції розподілу ймовірностей:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ або } y \le 0; \\ x, & 0 < x \le 1 \text{ і } y > 1; \\ y, & x > 1 \text{ і } 0 < y \le 1; \\ xy, & 0 < x \le 1 \text{ і } 0 < y \le 1; \\ 1, & x > 1 \text{ і } y > 1. \end{cases}$$

Такий самий результат можна отримати, не вдаючись до геометричних міркувань, а застосовуючи лише означення $F(x, y)$ і апарат інтегрального числення:

а) якщо $0 < x \leq 1$ і $0 < y \leq 1$, то

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} 0dxdy +$$

$$+\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 1dxdy = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} dxdy = xy;$$

б) якщо $0 < x \leq 1$ і $y > 1$, то

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} 0dxdy + \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{0}^{x}\int_{0}^{1} 1dxdy + \int_{0}^{x}\int_{1}^{y} 0dxdy = \int_{0}^{x}\int_{0}^{1} dxdy = x;$$

в) якщо $x > 1$ і $0 < y \leq 1$, то

$$F(x,y) = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y} dxdy = y;$$

г) якщо $x > 1$ і $y > 1$, то

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} 0dxdy + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} 1dxdy +$$

$$+\int_{1}^{x}\int_{1}^{y} 0dxdy = 1,$$

що й підтверджує правильність попереднього розв’язку.

Приклад 8. Система випадкових величин (X, Y) має рівномірний розподіл ймовірностей в замкненій області

$$D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}.$$

За межами множини D щільність розподілу ймовірностей дорівнює нулю.

Записати вирази відповідної диференціальної функції розподілу $f(x, y)$ та інтегральної функції $F(x, y)$.

Розв'язання. Замкнена область D є квадратом $ABCD$ з вершинами на осях координат (*рис. 52*): A (1; 0), B (0; 1), C (–1; 0), D (0; –1).

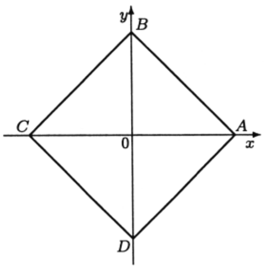


Рис. 52

Оскільки всередині квадрата D розподіл ймовірностей рівномірний, у загальному вигляді функція щільності запишеться так:

$$f(x, y) = \begin{cases} c, (x, y) \in D; \\ 0, (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Значення c визначимо, використовуючи характеристичну властивість функції щільності $f(x, y)$, а саме:

$$\iint\limits_{R^2} f(x, y)dxdy = 1.$$

Для даного прикладу можемо записати:

$$\iint\limits_{R^2} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D} cdxdy = 1.$$

Ураховуючи рівномірність розподілу та геометричну інтерпретацію останнього інтеграла, значення c знайдемо як довжину висоти прямокутного паралелепіпеда, основою якого є квадрат $ABCD$:

$$1 = V_{\text{парал}} = S_{ABCD} \cdot c, \; c = \frac{1}{S_{ABCD}}.$$

Оскільки

$$S_{ABCD} = AB \cdot CD = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2,$$

то

$$c = \frac{1}{2}.$$

Отже, функція $f(x, y)$ має вигляд

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Функцію $F(x, y)$ визначатимемо, спираючись на означення інтегральної функції розподілу ймовірності

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

і геометричні міркування, пов'язані з подвійними інтегралами.

Щоб отримати вираз функції $F(x, y)$, необхідно розглянути такі варіанти розміщення точки (x, y) відносно області D:

а) $x \leq -1$ б) $x + y \leq -1$

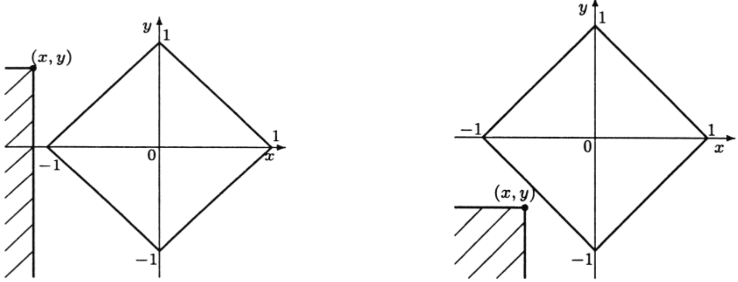
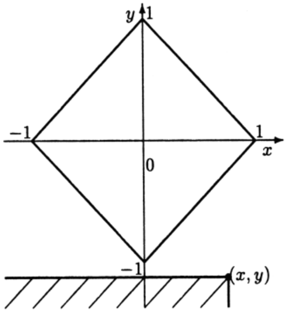
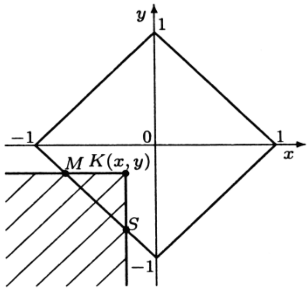


Рис. 53 (початок)

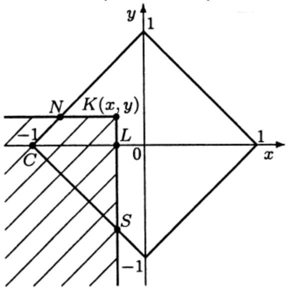
в) $y \le -1$



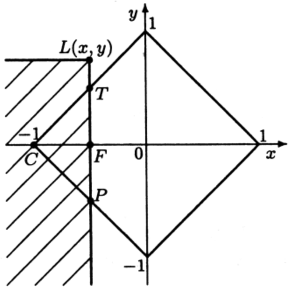
г) $x \le 0,\ y \le 0,\ x + y > -1$



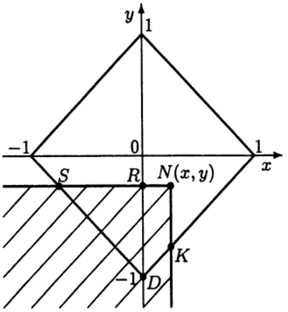
д) $x \le 0,\ y > 0,\ x - y > -1$



е) $-1 < x \le 0,\ x - y \le -1$



є) $x > 0,\ y \le 0,\ x - y \le 1$



ж) $x > 0,\ y > 0,\ x + y \le 1$

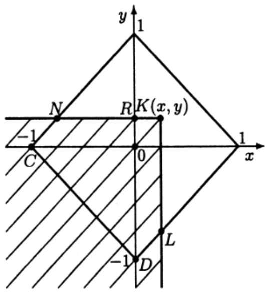
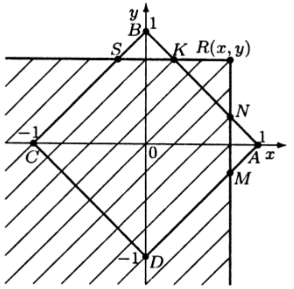
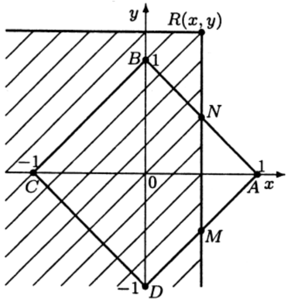


Рис. 53 (продовження)

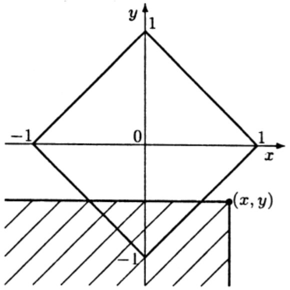
з) $x \leq 1,\ y \leq 1,\ x + y \geq 1$



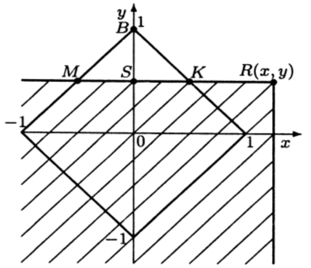
и) $0 < x \leq 1,\ y > 1$



і) $-1 < y \leq 0,\ x - y \geq 1$



ї) $x > 1,\ 0 < y \leq 1$



й) $x > 1,\ y > 1$

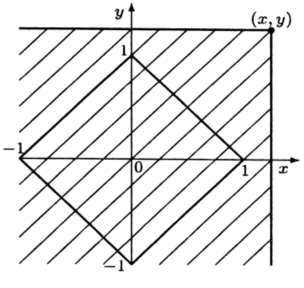


Рис. 53 (закінчення)

Очевидно, що у випадках, зображених на *рис. 53 а, б* і *в*

$$F(x, y) = 0,$$

оскільки згідно з умовою задачі поза квадратом D

$$f(x, y) = 0$$

і квадрат D із нескінченним заштрихованим квадрантом не перетинаються.

Для того, щоб записати вираз $F(x, y)$ у випадку, зображеному на *рис. 53 г*, необхідно через координати точки $K(x, y)$ виразити об'єм прямої призми з основою MKS і висотою $H = \frac{1}{2}$:

$$V_{\text{призми}} = S_{MKS} \cdot H = \frac{1}{2} S_{MKS}.$$

Рівняння прямої MS має вигляд $-x - y = 1$, або $y = -x - 1$. Якщо (x, y) — координати точки K, то довжину відрізка KS можна знайти як різницю ординат точок S і K, тобто

$$KS = y - (-x - 1) = x + y + 1.$$

Оскільки $MK = KS$, то

$$S_{MKS} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot KS = \frac{(x + y + 1)^2}{2}.$$

Отже,

$$V_{\text{призми}} = \frac{(x + y + 1)^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(x + y + 1)^2}{4}.$$

Остаточно для випадку *рис. 53 г* функція $F(x, y)$ має вигляд

$$F(x, y) = \frac{(x + y + 1)^2}{4}.$$

У випадку на *рис. 53 д* необхідно обчислити об'єм прямої призми з основою $KNCS$ і висотою $\frac{1}{2}$, виразивши його через координати (x, y) точки K. Для цього розіб'ємо фігуру $KNCS$ на дві: $LKNC$ і CLS. Довжина катетів $LS = LC$ рівнобедреного трикутника LCS

$$LC = x - (-1) = x + 1.$$

Отже,

$$S_{CLS} = \frac{1}{2}(x+1)(x+1) = \frac{(x+1)^2}{2}.$$

Фігура *CLKN* є трапецією з основами

$$CL = x + 1,\ KN = x - y + 1$$

(використано рівняння прямої $CB: -x + y = 1$ і той факт, що точка N належить прямій CB) і висотою $KL = y$. Враховуючи зазначене, маємо

$$S_{CLKN} = \frac{x+1+x-y+1}{2} \cdot y = \frac{2x-y+2}{2} \cdot y\,;$$

$$V_{\text{призми}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{2xy - y^2 + 2y}{2} \right) = \frac{1}{4}\left((x+1)^2 + 2y(x+1) - y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((x+y+1)^2 - 2y^2\right).$$

Отже, для випадку *рис. 53 д*, функція $F(x, y)$ має вигляд

$$F(x, y) = \frac{1}{4}\left((x+y+1)^2 - 2y^2\right).$$

Цілком аналогічна ситуація і у випадку, зображеному на *рис. 53 є*. Площа фігури *KNSD* обчислюється як сума площ фігур *KNRD* і *DRS*. При цьому використовуються координати точки $N(x, y)$, рівняння прямої AD: $x - y = 1$, факт належності точки K прямій AD і те, що SDR — рівнобедрений трикутник, а $DRNK$ — трапеція.

$$S_{DRS} = \frac{1}{2} DR \cdot RS,\ DR = RS,\ DR = y + 1.$$

Отже,

$$S_{DRS} = \frac{(y+1)^2}{2}.$$

$$S_{DRNK} = \frac{NK + RD}{2} \cdot NR,\ DR = y + 1,\ NK = y - x + 1,\ N = x.$$

Отже,

$$S_{DRNK} = \frac{y - x + 1 + y + 1}{2} \cdot x = \frac{2y - x + 2}{2} \cdot x\,;$$

$$V_{\text{призми}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(y+1)^2}{2} + \frac{2y + 2 - x}{2} \cdot x \right) = \frac{1}{4}\left((y+1)^2 + 2xy + 2x - x^2 \right) =$$

$$\frac{1}{4}\left((x + y + 1)^2 - 2x^2 \right).$$

Остаточно для випадку, зображеному на *рис. 34 є*, вираз функції $F(x, y)$ можна записати так:

$$F(x;y) = \frac{1}{4}(\,x + y + 1)^2 - 2x^2)\,.$$

Розглядаючи випадок *рис. 53 е*, необхідно знайти об'єм призми з основою *CPT*. При цьому шуканий об'єм потрібно виразити через координати $(x; y)$ точки L. Оскільки

$$S_{CPT} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot PT,\ \ CF = x + 1,\ TP = 2TF = 2CF = 2\ (x + 1),$$

площа трикутника *CPT*

$$CPT = \frac{1}{2}(x+1) \cdot 2(x+1) = (x+1)^2\,.$$

Отже,

$$V_{\text{призми}} = \frac{1}{2}(x+1)^2\,.$$

Вираз $F\,(x, y)$ для випадку *рис. 53 е* буде таким:

$$F(x;y) = \frac{(x+1)^2}{2}\,.$$

Аналогічна ситуація у випадку, наведеному на *рис. 53 і*, лише x і y міняються ролями:

$$F(x;y) = \frac{(y+1)^2}{2}\,.$$

Для того, щоб записати вираз функції $F(x, y)$ у випадку *рис. 53 з*, необхідно виразити площу фігури *MNKSCD* через координати точки $R(x; y)$. Зазначену площу обчислимо як різницю площ прямокутника *ABCD* і двох трикутників *AMN* і *KBS*:

$$S_{ABCD} = 2,$$

$$S_{ANM} = \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot 2(1-x) = (1-x)^2 ,$$

$$S_{KBS} = \frac{1}{2} \cdot (1-y) \cdot 2(1-y) = (1-y)^2 ;$$

$$S_{MNKSCD} = 2 - (1 - x)^2 - (1 - y)^2.$$

Об'єм прямої призми з основою *MNKSCD*

$$V_{\text{призми}} = \frac{1}{2} \cdot S_{MNKSCD}.$$

Отже, у випадку *рис. 34 з*

$$F(x; y) = \frac{1}{2}(2-(1-x)^2-(1-y)^2) = x + y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) .$$

У випадку, представленому на *рис. 53 ж*, необхідно обчислити об'єм прямої призми з основою *LKNCD* через координати точки $R(x; y)$. Для цього знайдемо площу фігури *LKNCD*, розбивши її на три частини: *LKRD*, *ORNC* і *OCD*:

$$S_{LKRD} = \frac{y+1+y-x+1}{2} \cdot x = \frac{2y-x+2}{2} \cdot x ;$$

$$S_{ORNC} = \frac{1-y+1}{2} \cdot y = \frac{2-y}{2} \cdot y ;$$

$$S_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} ;$$

$$S_{LKCD} = \frac{2y+2-x}{2} \cdot x + \frac{2-y}{2} \cdot y + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2xy + 2x - x^2 + 2y - y^2 + 1\right) = x + y - \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Об’єм прямої призми з основою *LKNCD*:

$$V_{\text{призми}} = \frac{1}{2} \cdot S_{LKNCD}.$$

Отже, у випадку, представленому *рис. 53 ж,*

$$F(x; y) = \frac{x+y}{2} - \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

У випадку *рис. 53 и* необхідно обчислити об’єм прямої призми з основою *NBCDM* через координати точки $R\ (x; y)$. Для цього знайдемо площу фігури *NBCDM* як різницю площ квадрата *ABCD* і трикутника *ANM*:

$$S_{ABCD} = 2;$$

$$S_{ANM} = (1 - x)^2;$$

$$S_{NBCDM} = 2 - (1 - x)^2.$$

Об’єм прямої призми з основою *NBCDM*:

$$V_{\text{призми}} = \frac{1}{2} \cdot S_{NBCDM}.$$

Отже, у випадку *рис. 34 и*

$$F(x; y) = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}.$$

Аналогічна ситуація у випадку *рис. 53 і*:

$$F(x; y) = 1 - \frac{(1-y)^2}{2}.$$

Очевидно, що для випадку *рис. 53 й* значення функції розподілу ймовірностей $F\ (x; y)$ дорівнюють одиниці.

Приклад 9. Функція щільності розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y) має вигляд

$$f\left(x, y\right) = ae^{-2x^2 + xy - y^2},$$

при $x \in R$ і $y \in R$.

Визначити константу a. Знайти функції $f_x(x)$, $f_y(y)$, $f_{x/y}(x/y)$, $f_{y/x}(y/x)$. Обчислити математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$. З'ясувати, чи корельовані випадкові величини X і Y.

Розв'язання. Значення константи a обчислимо, використовуючи характеристичну властивість функції щільності:

$$\iint\limits_{R^2} f\left(x, y\right) dxdy = 1 .$$

Відповідно до умов задачі:

$$\iint\limits_{R^2} f\left(x, y\right) dxdy = \iint\limits_{R^2} ae^{-2x^2+xy-y^2 dxdy} = a\iint\limits_{R^2} ae^{-2x^2+xy-y^2} dxdy =$$

$$= a\iint\limits_{R^2} e^{-2x^2} \cdot e^{-\left(y^{2-xy}\right)} dxdy = a\iint\limits_{R^2} e^{-2x^2} \cdot e^{-\left(y^2-2\frac{1}{2}xy+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\right)} dxdy =$$

$$= a\iint\limits_{R^2} e^{-2x^2} \cdot e^{-\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2} dxdy = a\iint\limits_{R^2} e^{-2x^2} \cdot e^{\frac{x^2}{4}} \cdot e^{-\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2} dxdy =$$

$$= a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{7}{4}x^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2} dy \right) dx = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{7}{4}x^2} \left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2} d\left(y-\frac{x}{2}\right)}_{=\sqrt{\pi},\ \text{як інтеграл Пуассона}} \right) dx =$$

$$= a\sqrt{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{7}{4}x^2} dx = a\sqrt{\pi}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)^2} d\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) = \frac{2a\sqrt{\pi}}{\sqrt{7}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2a\sqrt{\pi}}{\sqrt{7}}\sqrt{\pi} = \frac{2a\pi}{\sqrt{7}}.$$

Отже,

$$a\frac{2\pi}{\sqrt{7}} = 1,$$

звідки

$$a = \frac{\sqrt{7}}{2\pi}.$$

Функція щільності має вигляд

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{7}}{2\pi} e^{-2x^2+xy-y^2},\ x \in R, y \in R.$$

Для того, щоб знайти функцію розподілу ймовірностей випадкової величини X, скористаємося формулою (53).

Отже,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{7}}{2\pi}^{-2x^2+xy-y^2}dy=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{2x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(y^2-2y\cdot\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\right)}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-2x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}\cdot e^{\frac{x^2}{4}}dy=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-2x^2}\cdot e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-\frac{7x^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{7x^2}{4}}.$$

Аналогічно визначаємо функцію $f_Y(y)$:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{\sqrt{7}^{+\infty}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+xy-y^2}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+xy}\cdot e^{-y^2}dx=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(-2x^2-xy\right)}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(-\sqrt{2x}-\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{y^2}{8}}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(-\sqrt{2x}-\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)^2}\cdot e^{\frac{y^2}{8}}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-\frac{7y^2}{8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(-\sqrt{2x}-\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)^2}d\left(-\sqrt{2x}-\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{7y^2}{8}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{7y^2}{8}}.$$

Для знаходження $f_{x/y}(x/y)$ використаємо формулу (55).

Отже,

$$f_{x/y}(x/y)=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-2x^2+xy-y^2}}{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{7y^2}{8}}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x^2+xy-\frac{y^2}{8}}.$$

Аналогічно за формулою (56) шукаємо $f_{y/x}(y/x)$

$$f_{y/x}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-2x^2+xy-y^2}}{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{7x^2}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}+xy-y^2}$$

Обчислимо математичне сподівання $M(X)$:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{7x^2}{4}}dx=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{7x^2}{4}dx}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\left(\frac{\sqrt{7}x}{4}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}xe^{-\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)^2}dx+\int_{0}^{+\infty}xe^{-\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)^2}dx\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\pi}}\left(\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}xe^{-\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)^2}dx+\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A}xe^{-\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)^2}dx\right)=0.$$

Аналогічно визначаємо $M(Y)$:

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{7y^2}{8}}dy=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{7x^2}{8}}dy=0.$$

Отже,

$$M(X)=M(Y)=0.$$

Коефіцієнт кореляції

$$r(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Знайдемо коваріацію cov (X, Y):

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\iint\limits_{R^2} xy\, f\left(x,y\right)dxdy - M(X)M(Y)=$$

$$=\iint\limits_{R^2} xy\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\pi}e^{-2x^2+xy-y^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}\iint\limits_{R^2} xe^{-\frac{7x^2}{4}}\cdot ye^{-\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{7x^2}{4}}dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}dy=\frac{\sqrt{7}}{2\pi}\cdot 0=0,$$

тобто

$$r\,(X, Y) = 0,$$

що означає некорельованість випадкових величин X і Y.

Задачі до розділу 9

Задача 1. Система випадкових величин (X, Y) має рівномірний розподіл ймовірностей в замкненій області D. Поза D відповідно ця щільність розподілу дорівнює нулю.

Записати аналітичний вираз для функції розподілу ймовірностей $F\,(x, y)$ і функції щільності $f\,(x, y)$. Обчислити $M\,(X)$, $M\,(Y)$, якщо

$$D=\left\{\left(x,y\right): x\in\left[-1;1\right],\ y\in\left[-1;1\right]\right\}.$$

Відповідь.

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<-1 \text{ або } y<-1;\\ \frac{1}{4}\left(x+1\right)\left(y+1\right), & (x,y)\in D;\\ \frac{1}{2}\left(y+1\right), & x\ge 1 \text{ і } -1\le y<1;\\ \frac{1}{2}\left(x+1\right), & y\ge 1 \text{ і } -1\le x<1;\\ 1, & x\ge 1 \text{ і } y\ge 1,\end{cases}\qquad f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

$$M\,(X) = 0,\ M\,(Y) = 0.$$

Задача 2. Система дискретних випадкових величин задана таблицею розподілу (*табл. 9.17*):

Таблиця 9.17

Y	X				$\sum_{i=1}^{4} P_{ij}$
	5	**10**	**15**	**20**	
–10	0,012	0,038	0,2	0,1	0,35
–8	0,038	0,012	0,05	0,05	0,15
–6	0,05	0,05	0,012	0,038	0,15
–4	0,1	0,2	0,038	0,012	0,35
$\sum_{j=1}^{4} P_{ij}$	0,2	0,3	0,3	0,2	$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} P_{ij} = 1$

Обчислити математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$, умовні математичні сподівання $M(X / Y = -8)$ і $M(X / Y = 5)$.

Відповідь. $M(X) = 12{,}5$; $M(Y) = -7$; $\sigma(X) = 5{,}12$; $\sigma(Y) = 2{,}57$; $r(X, Y) = -0{,}513$; $M(X / Y = -8) = 13{,}73$; $M(X / Y = 5) = -5{,}62$.

Задача 3. Щільність розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y) має вигляд

$$f(x, y) = ae^{-4x^2-6xy-10y^2},\ x \in R, y \in R.$$

Знайти a, $M(X)$, $M(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, $r(Y, X)$.

Відповідь. $a = \frac{\sqrt{31}}{\pi}$, $M(X) = 0$, $M(Y) = 0$, $\sigma(X) = \frac{5}{31}$, $\sigma(Y) = \frac{2}{31}$, $r(X, Y) = 0$.

Задача 4. По мішені проводиться постріл і в разі невлучення другий постріл робить інший стрілець. Випадкова величина X_i — кількість влучень i-го стрільця, $i=1,2$. Право першого пострілу визначається жеребкуванням. Ймовірність влучення i-го стрільця у кожному пострілі дорівнює $p_i \in (0; 1)$.

Знайти розподіли ймовірностей на множині значень випадкових величин X_i, $i=1,2$; та випадкового вектора $(X_1; X_2)$.

Відповідь.

Таблиця 9.18, а

а)

X_1	0	1
P_i	$1-p_1$	p_1

Таблиця 9.18, б

б)

X_2	0	1
P_i	$1-p_2$	p_2

Таблиця 9.18, в

в)

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	$(1-p_1)(1-p_2)$	p_1
1	$(1-p_1)\,p_2$	0

Задача 5. Два стрільця роблять по одному пострілу в одну мішень. Перший стрілець влучає у мішень з ймовірністю $p_i \in (0; 1)$, а другий — з ймовірністю q. Нехай X — кількість влучень у мішень першого стрільця, Y — другого, а Z — кількість влучень у мішені.

Знайти відповідні розподіли ймовірностей для випадкових величин X, Y та Z і випадкових векторів (X, Y), (X, Z) та (Y, Z). Перевірити, чи є випадкові величини X, Y та Z попарно незалежними.

Відповідь.

Таблиця 9.19, а

а)

X	0	1
P_i	$1-p$	p

Таблиця 9.19, б

б)

Y	0	1
P_i	$1-q$	q

Таблиця 9.19, в

в)

Z	0	1	2
P_i	$(1-p)(1-q)$	$(1-p)\,q+(1-q)p$	$p-q$

Таблиця 9.19, г

г)

$Z \backslash X$	0	1
0	$(1-p)(1-q)$	0
1	$(1-p)\,q$	$p\,(1-q)$
2	0	pq

Таблиця 9.19, д

д)

$Z \backslash X$	0	1
0	$(1-q)(1-p)$	0
1	$(1-q)\,p$	$q\,(1-p)$
2	0	pq

X і Y попарно незалежні;
X і Z та Y і Z попарно залежні.

Питання для самоконтролю до розділу 9

1. Що називають функцією розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини?
2. Які властивості має $F(x, y)$?
3. Як можна задати двовимірну дискретну випадкову величину?
4. Яка двовимірна випадкова величина називається абсолютно неперервною?
5. Які властивості має функція щільності $f(x, y)$?
6. Що називають умовним законом розподілу?
7. Як обчислюються числові характеристики умовних законів розподілу?
8. Що називають коваріацією системи випадкових величин?
9. Що називають коефіцієнтом кореляції?
10. Які випадкові величини називають некорельованими?

Тест 8

1. Система випадкових величин (X, Y) має рівномірний розподіл ймовірностей в області D, що зображена на *рис. 54*, $f_{(X,\,Y)}(x, y) = 0$ за межами області D. Знайти $F\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

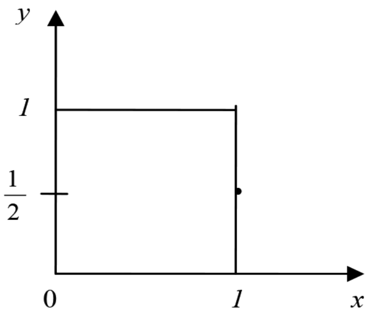


Рис. 54

а) 0,5;
б) 0,25;
в) 1;
г) обчислити неможливо;
д) відповідь відсутня.

2. Система випадкових величин (X, Y) має рівномірний розподіл ймовірностей в області D, що зображена на *рис. 55*. За межами області щільність розподілу $f(x, y) = 0$. Записати вираз щільності $f(x, y)$.

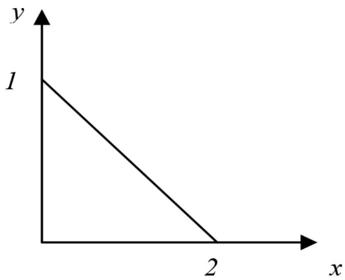


Рис. 55

а) $f(x_i y\} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (x_i y) \in D, \\ 0, \text{ якщо } (x_i y) \notin D; \end{cases}$

б) $f(x_i\, y) = 1$;
в) $f(x_i\, y) = xy$;
г) записати неможливо;
д) відповідь відсутня.

3. Система випадкових величин $(X_i\, Y)$ має рівномірний розподіл ймовірностей в області D, що зображено на *рис. 56*. За межами області щільність розподілу $f(x_i\, y) = 0$. Серед запропонованих рівностей вибрати неправильну:

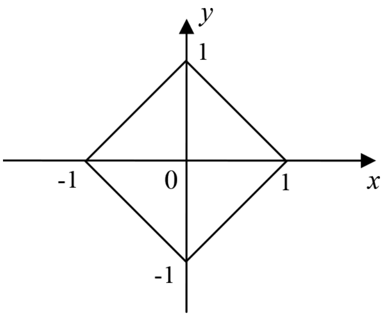


Рис. 56

а) $F(0; 0) = \dfrac{1}{4}$;

б) $F(0; 1) = F(1; 0) = \dfrac{1}{2}$;

в) $M[X] = M[Y] = 0$;
г) $F(-1; 0) = 0$;
д) $F(1; 1) = 0$.

4. Система дискретних випадкових величин (X, Y) задана таблицею (*табл. 9.20*) розподілу ймовірностей. Обчислити параметр a.

Таблиця 9.20

Y \ X	1	3	5
0	0,2	a	0,3
1	a	0,2	a

а) 0;
б) 0,3;
в) 0,1;
г) 0,2;
д) відповідь відсутня.

5. Система дискретних випадкових величин (X, Y) задана таблицею (*табл. 9.21*) розподілу ймовірностей. Записати безумовний розподіл випадкової величини Y.

Таблиця 9.21

Y \ X	2	3	4
–1	0,15	0,25	0,15
–2	0,2	0,15	0,1

Таблиця 9.22, а

а)

y_i	2	3	4
p_i	0,35	0,4	0,25

Таблиця 9.22, б

б)

y_i	–1	–2
p_i	0,55	0,45

Таблиця 9.22, в

в)

y_i	–1	–2
p_i	0,15	0,2

г) для запису недостатньо даних;
д) відповідь відсутня.

6. Система дискретних випадкових величин (X, Y) задана таблицею (*табл. 9.23*) розподілу ймовірностей. Обчислити $M[XY]$.

Таблиця 9.23

Y \ X	0	1
0	0,3	0,4
1	0,2	0,1

а) 0,3;
б) 0,4;
в) 0,1;
г) обчислити неможливо;
д) відповідь відсутня.

7. Система випадкових величин (X, Y) задана таблицею (*табл. 9.24*) розподілу ймовірностей. Знайти $M(X)$.

Таблиця 9.24

Y \ X	0	1	2
5	0,15	0,2	0,25
6	0,1	0,25	0,05

а) 2;
б) 1;
в) 1,05;
г) обчислити неможливо;
д) відповідь відсутня.

8. Система випадкових величин (X, Y) задана *таблицею 9.24* із завдання 7. Знайти умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 1$.

а)

Таблиця 9.25, а

y/x=1	5	6
p_i	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

б)

Таблиця 9.25, б

y/x=1	5	6
p_i	0,2	0,25

в)

Таблиця 9.25, в

y/x=1	5	6
p_i	0,6	0,4

г) записати неможливо;
д) відповідь відсутня.

9. Задано систему випадкових величин (X_i Y). Необхідно встановити залежні чи ні ці величини. Обери правильне твердження.

а) Якщо хоч один із умовних розподілів випадкової величини X співпадає з безумовним розподілом X, то можна робити висновок, що X і Y незалежні;

б) якщо хоч один із умовних розподілів випадкової величини X не співпав з безумовним розподілом X, то можна робити висновок, що X і Y залежні;

в) якщо $M[X] = M[Y]$, то X і Y незалежні;

г) з того, що $M(X, Y) = 0$ обов'язково випливає, що X і Y незалежні;

д) всі твердження а)—г) правильні.

10. Щільність розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X,Y) являє собою бічну поверхню піраміди, в основі якої лежить квадрат з вершинами в точках $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(-1;0;0)$, $(0;-1;0)$. Вершина піраміди в точці $(0;0;\frac{3}{2})$. Обчислити $F(0;1)$.

а) 0,75; б) 0,5; в) 0,25; г) обчислити неможливо; д) відповідь відсутня.

Розділ 10. Функції випадкових величин

Нехай $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ — випадкова величина (стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P)), $y = \varphi(x)$ — числова функція, яка задовольняє вимоги:

- функція визначена для всіх значень, яких набуває випадкова величина $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$;
- для довільного значення $y_0 \in R$ можна обчислити ймовірність $P(X \in \varphi^{-1}((-\infty; y_0) = P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in \varphi^{-1}((-\infty; y0)\})$, де $\varphi^{-1}((-\infty; y_0))$ — множина розв'язків нерівності $\varphi(x) < y_0$.

Тоді $Y = \varphi(X) = \varphi(X(\omega))$, $\omega \in \Omega$, є випадковою величиною з функцією розподілу ймовірностей

$$F(y) = P(X \in \varphi^{-1}((-\infty; y)), y \in (-\infty; +\infty). \tag{61}$$

Якщо X — дискретна випадкова величина з рядом розподілу (*табл. 10.1*)

Таблиця 10.1

X	x_1	x_2	…	x_n
P_X	p_1	p_2	…	p_n

,

причому числа $y_i = \varphi(x_i)$, $i \in \overline{1,n}$ попарно різні, то випадкова величина $Y = \varphi(X)$ — дискретна випадкова величина з рядом розподілу, представленим у *табл. 10.2,* де $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, …, $y_n = \varphi(x_n)$.

Таблиця 10.2

Y	y_1	y_2	…	$\mathrm{y_n}$
P_Y	p_1	p_2	…	p_n

Якщо деякі значення y_{i_k}, $k \in \overline{1,m}$ рівні між собою, то в ряд розподілу записують ці значення лише один раз, а ймовірність, що йому відповідає, дорівнює $\sum_{k=1}^{m} p_{i_k}$.

Якщо $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ неперервна випадкова величина, то випадкова величина $Y = \varphi(X)$ в залежності від функції φ, може бути дискретною, неперервною (можливо й абсолютно неперервною) чи змішаною (ані дискретною, ані неперервною).

Наприклад, якщо множина значень функції φ скінченна (або зчисленна), то $Y = \varphi(X)$ є дискретною випадковою величиною; у випадку, коли X — абсолютно неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $f_X(x)$ а $y = \varphi(x)$ — диференційована строго монотонна функція, то $Y = \varphi(X)$ — абсолютно неперервна випадкова величина з щільністю $f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1})'(y)|$, де $x = \varphi^{-1}(y)$ — обернена функція до функції $y = \varphi(x)$.

При цьому

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\,du = \int_{D_Y} f_X(x)\,dx,$$

$$D_Y = \varphi^{-1}(-\infty; y) = \{x : \varphi(x) < y\}.$$

Приклад 1. Випадкова величина X задана рядом розподілу (*табл. 10.3*).

Таблиця 10.3

X	–2	–1	0	1	2	3
P_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Знайти ряди розподілу випадкових величин:

а) $Y = 2X$;

б) $Y = X^2$.

Розв'язання. а) Знайдемо можливі значення випадкової величини $Y = 2X$:

$$y_1 = 2 \cdot (-2) = -4;\ y_2 = 2 \cdot (-1) = -2;\ y_3 = 2 \cdot 0 = 0;$$
$$y_4 = 2 \cdot 1 = 2;\ y_5 = 2 \cdot 2 = 4;\ y_6 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Різним значенням випадкової величини X відповідають різні значення випадкової величини Y. Отже, ряд розподілу випадкової величини Y має вигляд (*табл. 10.4*):

Таблиця 10.4

Y	–4	–2	0	2	4	6
P_Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

б) Знайдемо можливі значення випадкової величини $Y = X^2$:

$$y_1 = (-2)^2 = 4;\ y_2 = (-1)^2 = 1;\ y_3 = 0^2 = 0;$$
$$y_4 = 1^2 = 1;\ y_5 = 2^2 = 4;\ y_6 = 3^2 = 9.$$

Оскільки

$$y_1 = y_5,\ y_2 = y_4,$$

то ряд розподілу випадкової величини Y має такий вигляд (*табл. 10.5*):

Таблиця 10.5

Y	0	1	4	9
P_Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Приклад 2. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку $[0; 9]$. Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \varphi(X)$, якщо:

а) $$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 5, & 1 \le x \le 6; \\ 7, & 6 \le x \le 9; \\ 2014, & x \ge 9. \end{cases}$$

б) $\varphi(x) = \sqrt{x}$;

в) $$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 2; \\ 4, & 2 < x \le 6; \\ x - 2, & x > 6. \end{cases}$$

Розв'язання. а) Оскільки множина значень функції $y = \varphi(x)$ складається з чотирьох чисел, то випадкова величина Y дискретна з можливими значеннями 0, 5, 7, 2014 і ймовірностями, що їм відповідають:

$$P(Y=0)=P\left(X\in\varphi^{-1}(0)\right)=P\left(X\in(-\infty;1)\right);$$

$$P(Y=5)=P\left(X\in\varphi^{-1}(5)\right)=P\left(X\in[1;6)\right);$$

$$P(Y=7)=P\left(X\in\varphi^{-1}(7)\right)=P\left(X\in[6;9)\right);$$

$$P(Y=2014)=P\left(X\in\varphi^{-1}(2014)\right)=P\left(X\in[9;+\infty)\right).$$

Оскільки випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку [0; 9], то її функція розподілу має вигляд:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{9}, & 0\le x<9;\\ 1, & x\ge 9.\end{cases}$$

Звідси отримуємо:

$$P\left(X\in(-\infty;1)\right)=F_X(1)-F_X(-\infty)=\frac{1}{9}-0=\frac{1}{9};$$

$$P\left(X\in[1;6)\right)-F_X(6)-F_X(1)=-\frac{6}{9}-\frac{1}{9}-\frac{5}{9};$$

$$P\left(X\in[6;9)\right)=F_X(9)-F_X(6)=\frac{9}{9}-\frac{6}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};$$

$$P\left(X\in[9;+\infty)\right)=F_X(+\infty)-F_X(9)=1-\frac{9}{9}=0.$$

Отже, ряд розподілу випадкової величини Y має вигляд (*табл. 10.6*):

Таблиця 10.6

Y	0	5	7
P_Y	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$

.

б) Оскільки $0 \le X \le 9$, то $0\le\sqrt{X}\le 3$. Функція $y=\sqrt{x}$ на інтервалі [0; 9] є строго зростаючою і диференційованою, тому випадкова величина $y=\varphi(x)$ має абсолютно неперервний розподіл, причому щільність $f_Y(y)$ цього розподілу задовольняє рівність

$$f_Y(y)=f_X(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|,$$

де $f_X(x)$ — щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0;9];\\ \dfrac{1}{9}, & x\in[0;9],\end{cases}$$

$\psi(y)$ — функція, обернена до функції $y=\sqrt{x}$, тобто

$$\psi(y)=y^2;\ \psi'(y)=2y\ (\text{при } 0\le y\le 3).$$

Тоді

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\notin[0;3];\\ \dfrac{1}{9}\cdot 2y=\dfrac{2}{9}y, & y\in[0;3],\end{cases}$$

Функція розподілу $F_Y(y)$ випадкової величини Y має вигляд

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\,du=\begin{cases}0, & y<0;\\ \dfrac{y^2}{9}, & 0\le y<3;\\ 1, & y\ge 3.\end{cases}$$

в) Функція $y=\varphi(x)$ є неперервною і неспадною, графік якої зображено на *рис. 57*.

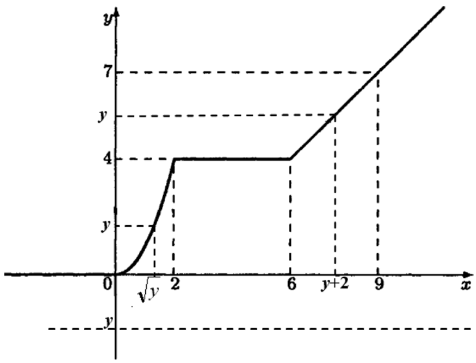


Рис. 57

Образом відрізка [0; 9] при відображенні $y=\varphi(x)$ є відрізок [0; 7]. Оскільки X розподілена на [0; 9], то випадкова величина $Y=\varphi(x)$ розподілена на [0; 7].

Зафіксуємо довільне число $y \in R$ і знайдемо $\varphi^{-1}(-\infty;\ y) = \{x : \varphi(x) < y\}$. З *рис. 57* слідує, що

якщо $y \le 0$, то $\varphi^{-1}(-\infty; y) = \varnothing$,

якщо $0 < y \le 4$, то $\varphi^{-1}(-\infty; y) = [0;\ \sqrt{y}\ )$,

якщо $4 < y \le 7$, то $\varphi^{-1}(-\infty; y) = [0; y+2)$,

а якщо $y > 7$, то $\varphi^{-1}(-\infty; y) = [0; 9]$.

Враховуючи, що X рівномірно розподілена на відрізку [0; 9], маємо

$$F_Y(y) = P\left(X \in \varphi^{-1}(-\infty; y)\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \le 0; \\ \int\limits_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{9} dx = \frac{\sqrt{y}}{9}, & \text{якщо } 0 < y \le 4; \\ \int\limits_0^{y+2} \frac{1}{9} dx = \frac{y+2}{9}, & \text{якщо } 4 < y \le 7; \\ \int\limits_0^{9} \frac{1}{9} dx = 1, & \text{якщо } y > 7. \end{cases}$$

Отже, функція розподілу ймовірностей випадкової величини має вигляд:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ \frac{\sqrt{y}}{9}, & 0 < y \le 4; \\ \frac{y+2}{9}, & 4 < y \le 7; \\ 1, & y > 7. \end{cases}$$

Графік функції $F_Y(y)$ зображено на *рис. 58*.

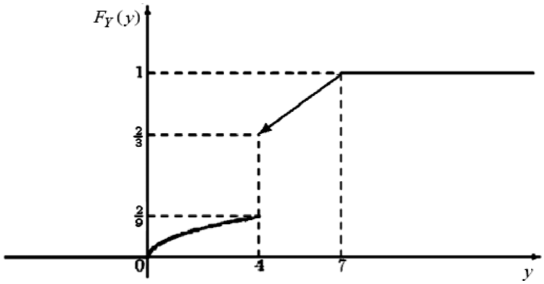


Рис. 58

Оскільки функція $F_Y(y)$ розривна (у точці 4), то випадкова величина $y = \varphi(x)$ не є абсолютно неперервною, тобто щільності розподілу $f_Y(y)$ не існує.

Задачі до розділу 10

Задача 1. Випадкова величина X має ряд розподілу (*табл. 10.7*).

Таблиця 10.7

X	1	2	3	4
P_X	0,1	0,2	0,3	0,4

Побудувати ряд розподілу випадкової величини Y, якщо:

а) $Y = X + 5$;

б) $Y = |X - 2|$.

Відповідь.

Таблиця 10.8, а

а)

Y	6	7	8	9
P_Y	0,1	0,2	0,3	0,4

Таблиця 10.8, б

б)

Y	0	1	2
P_Y	0,2	0,4	0,4

Задача 2. Випадкова величина X має такий ряд розподілу (*табл. 10.9*).

Таблиця 10.9

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
P_X	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Побудувати ряд розподілу випадкової величини Y, якщо:

а) $Y = \sin(2X)$;

б) $Y = \frac{4X}{\pi}$.

Відповідь.

Таблиця 10.10, а

а)

Y	–1	0	1
P_Y	0,2	0,6	0,2

Таблиця 10.10, б

б)

Y	0	1	2	3	4
P_Y	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Задача 3. Випадкова величина X має такий ряд розподілу (*табл. 10.11*).

Таблиця 10.11

X	–3	–2	–1	0	1	2
P_X	0,25	0,05	0,2	0,1	0,3	0,1

Побудувати ряд розподілу випадкової величини Y, якщо:
а) $Y = X^3$;
б) $Y = |X|$.
Відповідь.

Таблиця 10.12, а

а)

Y	–27	–8	–1	0	1	8
P_Y	0,25	0,05	0,2	0,1	0,3	0,1

Таблиця 10.12, б

б)

Y	0	1	2	3
P_Y	0,1	0,5	0,15	0,25

Задача 4. Випадкова величина X має ряд розподілу (*табл. 10.13*).

Таблиця 10.13

X	–9	–4	–1	0	1	4	9	16
P_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Побудувати ряд розподілу випадкової величини Y, якщо:
а) $Y = \sqrt{|X|}$;
б) $Y = 2X + 1$.
Відповідь.

Таблиця 10.14, а

а)

Y	0	1	2	3	4
P_Y	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Таблиця 10.14, б

б)

Y	–17	–7	–1	1	3	9	19	3
P_Y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Задача 5. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку [0; 4]. Знайти розподіл випадкової величини $Y = [X]$, де $[a]$ означає цілу частину числа a.

Таблиця 10.15

Відповідь.

Y	0	1	2	3
P_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Задача 6. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку [–5; 5]. Знайти розподіл випадкової величини $Y = \varphi(X)$, якщо

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3, & x \le 1; \\ 7, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Таблиця 10.16

Відповідь.

Y	3	7	11
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

Задача 7. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку [0; 2]. Знайти щільність і функцію розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

Відповідь. $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & y \in [0; 4]; \\ 0, & y \notin [0; 4], \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1; \\ \dfrac{\sqrt{y}}{2}, & 0 < y \le 4; \\ 1, & y \ge 4. \end{cases}$

Задача 8. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку [1; 10]. Знайти щільність і функцію розподілу випадкової величини $Y=\sqrt{X-1}$.

Відповідь. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2y}{9}, & y\in[0;3];\\ 0, & y\notin[0;3],\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{y^2}{9}, & 0<y\le 3;\\ 1, & y>3.\end{cases}$

Задача 9. Випадкова величина X має таку щільність розподілу:

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=\dfrac{1}{X}$.

Відповідь. $f_Y(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$.

Задача 10. Випадкова величина X має таку щільність розподілу:

$$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=e^{-X^2}$.

Відповідь. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y\in[0;1];\\ 0, & y\notin[0;1].\end{cases}$

Задача 11. Випадкова величина X має таку щільність розподілу:

$$f_X(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 0, & x\notin\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=X^4$.

Відповідь. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt[4]{y}}{4\sqrt[4]{y^3}}, & y\in\left[0;\dfrac{\pi^4}{16}\right];\\ 0, & y\notin\left[0;\dfrac{\pi^4}{16}\right].\end{cases}$

Задача 12. Випадкова величина X має таку щільність розподілу:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 0, & x\notin\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^3$.

Відповідь. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\cos\sqrt[3]{y}}{6\sqrt[3]{y^2}}, & y\in\left[-\dfrac{\pi}{8};0\right)\cup\left(0;\dfrac{\pi}{8}\right];\\ 0, & y\notin\left[-\dfrac{\pi}{8};0\right)\cup\left(0;\dfrac{\pi}{8}\right].\end{cases}$

Задача 13. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-10; 10]$.

Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Y = \varphi(X)$, якщо

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ x-2, & 2<x\le 9;\\ 7, & x>9.\end{cases}$$

Відповідь. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини Y є сумішшю дискретного та неперервного розподілів, $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ 0,6+0,05y, & 0<y\le 7;\\ 1, & y>7.\end{cases}$

Задача 14. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[0; 5]$.

Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Y = \varphi(X)$, якщо

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-2\pi; 2\pi]; \\ \ln\left(\sqrt{\cos x + 3}\right) & x \notin [-2\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

Відповідь. Випадкова величина $Y = \varphi(x)$ має дискретний розподіл: $P\{X = 3\} = 1$.

Питання для самоконтролю до розділу 10

1. Що розуміють під функцією випадкових величин?
2. Якщо X — неперервна випадкова величина, то що можна сказати про випадкову величину $y = \varphi(X)$?
3. Чи завжди для функції випадкових величин існує функція щільності? Якщо «так», то обґрунтуйте відповідь, а якщо «ні», то наведіть приклад.

Розділ 11. Граничні теореми теорії ймовірностей

Граничні теореми теорії ймовірностей можна умовно розбити на два класи: *закони великих чисел* і *центральні граничні теореми*.

Закони великих чисел математично описують стійкість середніх значень масових випадкових явищ. Історично першим законом великих чисел була така теорема:

Теорема 1 (теорема Я. Бернуллі). Нехай $k = k_n$ — кількість появ події A в серії з n послідовних незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{62}$$

Іншими словами, з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що при досить великій кількості n незалежних послідовних випробувань відносна частота $\frac{k}{n}$ появи події A скоріше за все досить мало відрізняється від ймовірності появи події A.

Ця теорема, зокрема, пояснює, що, коли при багаторазовому підкиданні монети кількість гербів становить приблизно половину від загальної кількості підкидань, тоді доцільно вважати ймовірність випадання герба (та цифр) рівною $\frac{1}{2}$.

Узагальненням теореми 1 є така теорема:

Теорема 2 (теорема П.Л. Чебишева). Нехай X_i — послідовність попарно незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями $M(X_i)$ і обмеженими дисперсіям $D(X_i) \le c_0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{63}$$

В обох теоремах суттєво використано нерівність Чебишева, яка, втім, має й самостійну цінність.

Лема 1 (нерівність Чебишева). Нехай X — довільна випадкова величина (стосовно (Ω, S, P)) з дисперсією $D(X) < \infty$ і математичним сподіванням $M(X)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left(|X-M(X)|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{64}$$

Нерівність Чебишева можна записати також у формі

$$P\left(|X-M(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{65}$$

Крім законів великих чисел, описаних у теоремах 1 і 2, спостерігається ще одне досить цікаве явище, яке полягає в тому, що при великій кількості випадкових доданків, кожний з яких вносить лише невеликий внесок у загальну суму, розподіл кожного з випадкових доданків не впливає на сумарний результат. Більш точне твердження сформульоване в такій теоремі.

Теорема 3 (центральна гранична теорема). Нехай X_i — незалежні однаково розподілені випадкові величини з математичним сподіванням $M(X_i)=a$ і дисперсією $D(X_i)=\sigma^2$. Тоді при великому n розподіл суми $X_1+X_2+\ldots+X_n=X$ близький до нормального розподілу. При цьому,

$$P(\alpha\leq X\leq\beta)\approx\Phi\left(\frac{\beta-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-na}{\sigma\sqrt{n}}\right), \tag{66}$$

а отже,

$$P\left(|X-na)|\leq\delta\right)=P\left(na-\delta\leq X\leq na+\delta\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{n}}\right). \tag{67}$$

Із останніх рівностей випливає, що ймовірність p події можна оцінити, використовуючи експериментальні результати. Справді, якщо в кожному випробуванні подія A відбувається з ймовірністю p, і в серії з n незалежних випробувань досліджувана подія A відбувається k разів, то статистична частота появи події A дорівнює $\frac{k}{n}$. Ця частота є випадковою величиною X, яка є сумою незалежних випадкових величин X_k, що набувають значень $\frac{1}{n}$ з ймовірністю p, коли подія A відбувається у k-му випробуванні, і 0 з ймовірністю $q=1-p$ в іншому разі, $k=1, 2, \ldots, n$. Для таких випадкових величин X_k математичне сподівання

$$M(X_k)=\frac{1}{n}\cdot p-0\cdot(1-p)=\frac{p}{n},$$

а дисперсія

$$\sigma^2 = D(X_k) = \frac{p(1-p)}{n^2}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоді при досить великих значеннях n ($n \geq 30$) виконується рівність

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right).$$

Приклад 1. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність появи події A, яка полягає у тому, що випадкова величина X набуде значення, яке відрізнятиметься від математичного сподівання M (X) на величину, що не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення. Чи зміниться відповідь, якщо відомо, що випадкова величина X має нормальний розподіл?

Розв'язання. За нерівністю Чебишева

$$P(A) = P\left(\left|X - M(X)\right| < 3\sigma(X)\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\left(3\sigma(X)\right)^2} = 1 - \frac{D(X)}{9D(X)} = \frac{8}{9}.$$

Отже,

$$P(A) \geq \frac{8}{9} \approx 0,89.$$

Якщо X має нормальний розподіл, то

$$P(A) = P\left(\left|X - M(X)\right| < 3\sigma(X)\right) \approx 2\Phi\left(\frac{3\sigma(X)}{\sigma(X)}\right) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Приклад 2. При виробництві дискет брак становить 1 %. Скільки дискет потрібно відібрати для перевірки якості, щоб з ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що у випадковій вибірці дискет відсоток бракованих відрізняється від 1 % не більше як на 0,5 %?

Розв'язання. Кількість бракованих дискет є випадковою величиною

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

де $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини; X_i — випадкова величина, яка дорівнює кількості бракованих дискет при виготовленні однієї дискети, тобто X_i може набувати значення або 0, або 1 з ймовірністю відповідно $p = 0{,}99$ і $q = 0{,}01$. Якщо n — досить велике число, то за центральною граничною теоремою розподіл випадкової величини X близький до нормального, причому

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right) \approx 2\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right),$$

де $\dfrac{k}{n}$ — частота браку; $p = 0{,}01$; $\delta = 0{,}005$; n — невідома кількість дискет. Число n потрібно вибрати таким, щоб

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0{,}01\right| < 0{,}005\right) \approx 2\Phi\left(0{,}005\sqrt{\frac{n}{0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) = 0{,}95.$$

Іншими словами,

$$\Phi\left(0{,}5\sqrt{\frac{n}{9}}\right) = 0{,}475.$$

За таблицею значень функції Лапласа (**додаток 1**) знаходимо значення аргументу x таке, що $\Phi(x) = 0{,}475$:

$$x = 1{,}96.$$

Розв'язавши рівняння

$$0{,}5\sqrt{\frac{n}{99}} = 1{,}96,$$

отримаємо

$$n \geq 99\left(\frac{1{,}96}{0{,}5}\right)^2 \geq 1522.$$

Приклад 3. При анонімному тестуванні виявилося, що 10 % працівників підприємства зовсім не вживають спиртного. Випадкова величина X — кількість людей, які зовсім не вживають спиртного у випадковій вибірці з 900 робітників. Зазначити межі, у які потрапляє випадкова величина X з ймовірністю 0,9.

Розв'язання. Згідно з центральною граничною теоремою можна вважати, що випадкова величина X має розподіл, близький до нормального. За умовою

$$p = 0{,}1;\ n = 900.$$

Тоді

$$P\left(\left|\frac{X}{900} - 0{,}1 < \delta\right|\right) \approx 2\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{900}{0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = 0{,}9.$$

Отже,

$$\Phi\ (100\delta) = 0{,}45.$$

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо значення аргументу x таке, що $\Phi\ (x) = 0{,}45$:

$$x = 1{,}65.$$

Звідси $100\delta = 1{,}65$ і $\delta = 0{,}0165$. Отже, з ймовірністю 0,9 виконуватиметься умова

$$P\left(\left|\frac{X}{900} - 0{,}1\right| < 0{,}0165\right) \geq 0{,}9,$$

що рівносильно тому, що випадкова величина X потрапить в інтервал (75; 105) з ймовірністю 0,9.

Приклад 4. Нехай X — випадково вибране число з проміжку [0; 1],

$$x = \alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) \cdot 10^{-k}$$

є десятковий розклад числа x, $\alpha_k(x) \in \{0,1,\ldots,9\}$. Нехай $N_7\ (x,\ k)$ — кількість цифр «7», які зустрілися в десятковому розкладі числа x до k-го місця включно. Знайти ймовірність того, що відносна частота цифри «7», яка дорівнює $\frac{N_7(x,k)}{k}$, відрізнятиметься від 0,1 не більше, ніж на ε.

Розв'язання. $X = N_7(x, k)$ — випадкова величина, яка є сумою

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k,$$

де $X_i = 0$, якщо $\alpha_i(x) \neq 7$, і $X_i = 1$, якщо $\alpha_i(x) = 7$. Іншими словами, X_i має такий розподіл (*табл. 11.1*):

Таблиця 11.1

X_i	0	1
P_i	0,9	0,1

Легко побачити, що

$$M(X_i) = 0{,}1;\ M(X_i^2) = 0{,}1.$$

Тому

$$D(X_i) = M\left(X_i^2\right) - M^2(X_i) = 0{,}1 - 0{,}01 = 0{,}09.$$

Оскільки випадкові величини X_i незалежні та мають обмежені дисперсії й математичні сподівання, то виконується теорема Чебишева:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{N_7(x, k)}{n} - 0{,}1\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ ймовірність того, що відносна частота цифри «7» у десятковому розкладі випадково обраного числа x відрізняється від 0,1 не більше, ніж на ε, є як завгодно близькою до 1, коли n досить велике.

Задачі до розділу 11

Задача 1. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що

$$|X - M(X)| < 0{,}3,$$

якщо $D(X) = 0{,}0025$. Оцінити ймовірність тієї самої події, якщо відомо, що X має нормальний розподіл.

Відповідь. За нерівністю Чебишева

$$P(|X - M(X)| < 0{,}3) \geq 0{,}97.$$

Якщо припустити, що X має нормальний розподіл, то

$$P(|X - M(X)| < 0{,}3) \approx 1 \text{ (з точністю до 0,0001).}$$

Задача 2. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що

$$|X - M(X)| > 0{,}1,$$

якщо $\sigma(X) = 0{,}4$. Оцінити ймовірність тієї самої події, якщо відомо, що X має нормальний розподіл.

Відповідь. За нерівністю Чебишева

$$P(|X - M(X)| > 0{,}1) < 16.$$

Якщо припустити, що X має нормальний розподіл, то

$$P(|X - M(X)| > 0{,}1) \approx 0{,}8026.$$

Задача 3. Маса деталей, що виготовляються на верстаті, є випадковою величиною, середнє значення якої (математичне сподівання) дорівнює 1,2 кг. Дисперсія цієї величини дорівнює 0,012. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що:

а) відхилення маси деталі від її середнього значення за абсолютною величиною не перевищить 0,2;

б) маса деталі набуде значення від 1,18 до 1,22.

Відповідь. а) $P \geq 0{,}7$; б) $P \geq 0$.

Задача 4. Прилад складається з 10 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного елемента за певний час t дорівнює 0,05. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, які відмовили, і середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час t буде менше 2.

Відповідь. $P \geq 0{,}88$.

Задача 5. Із 1000 виробів навмання відібрано 200. Після перевірки серед них виявлено 15 бракованих. Прийнявши частку бракованих виробів за ймовірність виготовлення браку, оцінити ймовірність того, що в усій партії бракованих виробів буде не більше 10 % і не менше 5 %.

Відповідь. $P \geq 0{,}97$.

Задача 6. У країні N проживає 50 млн людей. Тестування пройшли 1000 випадково відібраних громадян, серед яких виявилося 20 з ознакою X. Прийнявши частку людей з ознакою X з дослідженої групи за ймовірність того, що випадково обраний громадянин країни N має таку ознаку, оцінити ймовірність того, що в даній країні відсоток осіб з ознакою X становить не більше 3 % і не менше 1 %.

Відповідь. $P \geq 0{,}999996$.

Задача 7. Скільки виробів необхідно відібрати для перевірки якості продукції, щоб з імовірністю 0,95 можна було стверджувати, що частка бракованих деталей відрізняється від імовірності $p = 0{,}1$ випуску бракованої деталі не більше, ніж на 0,02?

Відповідь. $n \geq 865$.

Задача 8. При виробництві поліетиленових пакетів брак становить 5 %. Скільки виробів потрібно відібрати для перевірки якості продукції, щоб з ймовірністю 0,9 можна було стверджувати, що частка бракованих пакетів становить від 4 до 6 %?

Відповідь. $n \geq 1294$.

Задача 9. Випадкова величина X має такий закон розподілу (*табл. 11.2*):

Таблиця 11.2

X	3	5
P_X	0,4	0,6

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що:

а) $|X - M(X)| < 0{,}2$;

б) $|X - M(X)| < 2$.

Обчислити точні ймовірності цих подій.

Відповідь. а) За нерівністю Чебишева

$$P\,(|\,X - M\,(X)\,| < 0{,}2) \geq 0.$$

Насправді,

$$P\,(|\,X - M\,(X)\,| < 0{,}2) = 0.$$

б) За нерівністю Чебишева

$$P\,(|\,X - M\,(X)\,| < 2) \geq 0{,}76.$$

Насправді,

$$P\,(|\,X - M\,(X)\,| < 2) = 1.$$

Задача 10. Випадкова величина X має такий закон розподілу (*табл. 11.3*):

Таблиця 11.3

X	1	5
P_X	0,7	0,3

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що

а) $|\,X — M\,(X)\,| < 1$;

б) $|\,X — M\,(X)\,| < 2$.

Обчислити точні ймовірності цих подій.

Відповідь. а) За нерівністю Чебишева

$$P\,(|\,X - M\,(X)\,| < 1) \geq 0.$$

Насправді,

$$P\,(|\,X - M\,(X)\,| < 1) = 0.$$

б) За нерівністю Чебишева

$$P\,(|\,X - M\,(X)\,| < 2) \geq 0{,}16.$$

Насправді,

$$P\,(|\,X - M\,(X)\,| < 2) = 0{,}7.$$

Задача 11. Нехай x — випадкове число з відрізка [0; 1],

$$x = \alpha_1(x)\,\alpha_2(x)\,\ldots\,\alpha_k(x)\,\ldots$$

є десятковий розклад числа x, $\alpha_k(x) \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Нехай $N_5(x, k)$ — кількість цифр «5», які зустрілися в десятковому розкладі числа x до k-го місця включно. Знайти ймовірність того, що відносна частота цифри «5», яка дорівнює $\frac{N_5(x,k)}{k}$, перебуватиме в межах від 0,0999 до 0,01001.

Відповідь. $P \approx 1$.

Задача 12. Нехай

$$x = \alpha_1(x)\,\alpha_2(x)\,\ldots\,\alpha_k(x)\,\ldots$$

є двійковий розклад числа $x \in [0;1]$, $\alpha_k(x) \in \{0,1\}$, $N_0(x, k)$ — кількість нулів, які зустрілися в двійковому розкладі числа x до k-го місця включно. Знайти ймовірність того, що частота цифри «0», яка дорівнює $\frac{N_0(x,k)}{k}$, перебуватиме в межах від 0,49999 до 0,50001.

Відповідь. $P \approx 1$.

Питання для самоконтролю до розділу 11

1. Що розуміють під граничними теоремами теорії ймовірності?
2. Сформулюйте теорему Я. Бернуллі.
3. Сформулюйте теорему П. Чебишева.
4. Запишіть нерівність Чебишева у двох варіантах.
5. Сформулюйте центральну граничну теорему.

Тест 9

1. Задана дискретна випадкова величина X. Якою є випадкова величина $Y = 2X$?
   а) неперервною;
   б) дискретною;

в) абсолютно неперервною;
г) визначити неможливо;
д) відповідь відсутня.

2. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу ймовірностей (*табл. 11.4*).

Таблиця 11.4

x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

Скільки різних значень може набути випадкова величина $Y = X^2$?
а) сім;
б) два;
в) чотири;
г) визначити неможливо;
д) відповідь відсутня.

3. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку [–3; 3]. Знайти розподіл ймовірностей випадкової величини $Y = \alpha(X)$, якщо

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3, & X \le 0; \\ 7, & 0 < X \le 1; \\ 10, & X > 1. \end{cases}$$

Таблиця 11.5, а

а)

y_i	3	7	10
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	0

Таблиця 11.5, б

б)

y_i	3	7	10
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Таблиця 11.5, в

в)

y_i	3	7	10
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

г) визначити неможливо;
д) відповідь відсутня.

4. Виберіть правильно записану теорему Я. Бернуллі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$;

г) $\lim P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$;

д) відповідь відсутня.

5. В записі теореми Чебишева $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = \textbf{?}$ вставити пропущений символ.

а) 0;
б) 1;
в) будь-яке число від 0 до 1;
г) $\frac{1}{n}$;
д) відповідь відсутня.

6. Вставити пропущений символ у нерівності Чебишева.

$$P\left(|X - M(X)| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\textbf{?}}{\varepsilon^2}$$

а) $M(X)$;
б) 1;
в) $D(X)$;
г) $\sigma(X)$;
д) відповідь відсутня.

7. Для того, щоб оцінити ймовірність відхилення значення випадкової величини від її математичного сподівання, потрібно використати:

а) теорему Бернуллі;
б) теорему Чебишева;
в) нерівність Чебишева;
г) центральну граничну теорему;
д) відповідь відсутня.

8. Для того, щоб оцінити за нерівністю Чебишева відхилення на ε випадкової величини від математичного сподівання, потрібно знати значення:
   а) випадкової величини;
   б) дисперсії;
   в) достатньо математичного сподівання і ε;
   г) тільки ε;
   д) відповідь відсутня.

9. Оцінити $P\,(|\,X - M\,(X)| < 0{,}3$ за умови, що $\sigma\,(x) = 0{,}05$.
   а) $< 0{,}3$;
   б) $< 0{,}09$;
   в) $> 0{,}97$;
   г) $< 0{,}9$;
   д) відповідь відсутня.

10. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|\,X - M\,(X)| > 0{,}1$ при $\sigma\,(X) = 0{,}05$ і X — нормально розподілена випадкова величина.
   а) $= 1$;
   б) $\geq 0{,}25$;
   в) $\leq 0{,}25$;
   г) неможливо обчислити;
   д) відповідь відсутня.

Частина III
Математична статистика

Основні задачі математичної статистики пов'язані з наближеним визначенням розподілів ймовірностей на множині значень досліджуваних випадкових величин та їх параметрів на основі статистичних даних, одержаних в результаті проведення n незалежних випробувань, пов'язаних з певним стохастичним експериментом.

Розділ 12. Основні поняття математичної статистики. Вибірковий метод

12.1. Вибірковий метод

Генеральною сукупністю називають множину значень Ω_X досліджуваної випадкової величини X (стосовно певного ймовірнісного простору (Ω, S, P)).

Вибіркою об'єму n з генеральної сукупності Ω_X називають сукупність $x_{\text{сп}1}, x_{\text{сп}2}, \ldots , x_{\text{сп}\,n}$, спостережуваних значень випадкової величини X, отриманих в результаті n послідовних незалежних випробувань.

Якщо елементи вибірки записати в порядку зростання, отримаємо *варіаційних ряд*.

Попарно ***різні*** елементи x_i, $i = 1, 2, \ldots k$ варіаційного ряду називають *варіантами*; кількість значень варіанти x_i у вибірці — її *частотою* n_i (сума частот усіх варіант дорівнює об'єму вибірки), відношення частоти до об'єму вибірки — *відносною частотою* або *емпіричною* *ймовірністю,* або *статистичною ймовірністю* $p_i = P_n^*(\{x_i\}) = \frac{n_i}{n}$, $i = 1$, $2, \ldots k$. При цьому $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Статистичним розподілом частот або відносних частот по варіантах (коротко: статистичним розподілом вибірки) називають перелік варіант варіаційного ряду з відповідними частотами і/або відносними частотами. Статистичний розподіл також задають у вигляді послідовності проміжків $[a_{i-1}; a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, у які попадають спостережувані значення випадкової величини X і відповідних їм частот і/або відносних частот (статистичних ймовірностей). Частотою інтервалу вважають суму частот усіх варіант з даного інтервалу.

Щоб підкреслити зазначені відмінності в першому випадку говорять про *точковий*, а в другому — про *інтервальний* статистичний розподіл вибірки.

Приклад 1. Під час дослідження випадкової величини X із генеральної сукупності Ω_X було отримано вибірку

$$4, 3, 6, 4, 7, 2, 5, 1, 2, 5, 4, 4, 3, 5, 6, 3, 4, 1, 3, 4.$$

Знайти об'єм вибірки, побудувати варіаційний ряд вибірки та її статистичний розподіл.

***Розв'язання*.** Оскільки вибірка складається з 20 значень, то об'єм вибірки $n = 20$.

Побудуємо варіаційний ряд вибірки:

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7.$$

У даній вибірці сім різних значень, варіант:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Знайдемо відповідні частоти:

$$n_1 = 2; \quad n_2 = 2; \quad n_3 = 4; \quad n_4 = 6; \quad n_5 = 3; \quad n_6 = 2; \quad n_7 = 1.$$

Запишемо шуканий статистичний розподіл (*табл. 12.1*).

Таблиця 12.1

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	2	4	6	3	2	1

Приклад 2. Вибірка задана розподілом частот (*табл. 12.2*).

Таблиця 12.2

x_i	3	5	7	10	15
n_i	2	4	7	4	3

Знайти розподіл відносних частот.

Розв'язання. Знайдемо об'єм вибірки:

$$n = 2 + 4 + 7 + 4 + 3 = 20.$$

Визначимо відносні частоти:

$$w_1 = \frac{2}{20} = 0,1\,;\;\; w_2 = \frac{4}{20} = 0,2\,;\;\; w_3 = \frac{7}{20} = 0,35\,;$$

$$w_4 = \frac{4}{20} = 0,2\,;\;\; w_5 = \frac{3}{20} = 0,15\,.$$

Отже, шуканий розподіл відносних частот має такий вигляд (*табл. 12.3*):

Таблиця 12.3

x_i	3	5	7	10	15
p_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,15

Сума відносних частот має дорівнювати 1.

$$0,1 + 0,2 + 0,35 + 0,2 + 0,15 = 1.$$

Розподіл побудовано правильно.

Емпіричною функцією розподілу дискретної випадкової величини X або *функцією дискретного розподілу вибірки* називають функцію

$$F_X^*(x) = \frac{n_x}{n}. \qquad (66)$$

де n_x — кількість елементів вибірки, менших від x (тобто сума частот усіх варіант, менших від x); n — об'єм вибірки. Легко побачити, що число $\frac{n_x}{n}$ є сумою відносних частот усіх варіант x_i, менших за x.

Емпірична функція розподілу $F_X^*(x)$ має такі самі властивості, як і функція розподілу випадкової величини X (*див.* ***розділ 6***). Проте властивість 1 можна дещо уточнити:

якщо x_1 — найменша варіанта, а x_k — найбільша, то $F_X^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ і $F_X^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Приклад 3. Знайти емпіричну дискретну функцію розподілу за статистичним розподілом вибірки (*табл. 12.4*).

Таблиця 12.4

x_i	3	5	7	10	15
n_i	2	4	7	4	3

Розв'язання. Знайдемо об'єм вибірки:

$$n = 2 + 4 + 7 + 4 + 3 = 20.$$

Оскільки найменша варіанта дорівнює 3, то

$$F_X^*(x) = 0$$

при всіх $x \le 3$.

Значення $X < 5$, а саме значення $x_1 = 3$, спостерігалося двічі, тому

$$F_X^*(x) = \frac{2}{20} = 0,1$$

при всіх $3 < x \le 5$.

Значення $X < 7$, а саме значення $x_1 = 3$ і $x_2 = 5$, спостерігалося $2 + 4 = 6$ разів, тому

$$F_X^*(x) = \frac{6}{20} = 0,3$$

при $5 < x \le 7$.

Значення $X < 10$, а саме значення $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ і $x_3 = 7$, спостерігалося $2 + 4 + 7 = 13$ разів, тому

$$F_X^*(x) = \frac{13}{20} = 0,65$$

при $7 < x \le 10$.

Значення $X < 15$, а саме значення $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ і $x_4 = 10$, спостерігалося $2 + 4 + 7 + 4 = 17$ разів, тому

$$F_X^*(x) = \frac{17}{20} = 0,85$$

при $10 < x \le 15$.

Оскільки $x_5 = 15$ — найбільша варіанта, то

$$F_X^*(x) = 1$$

при $x > 15$.

Отже, шукана емпірична функція має вигляд:

$$F_X^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 3; \\ 0{,}1, & \text{якщо} \quad 3 < x \le 5; \\ 0{,}3, & \text{якщо} \quad 5 < x \le 7; \\ 0{,}65, & \text{якщо} \quad 7 < x \le 10; \\ 0{,}85, & \text{якщо} \quad 10 < x \le 15; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 3. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на *рис. 59*.

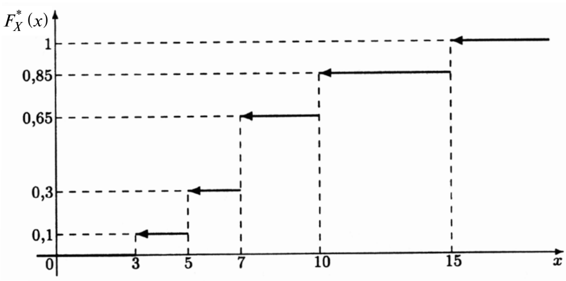


Рис. 59

Якщо випадкова величина X розглядається як дискретна, то для неї вводиться поняття полігона частот або полігона відносних частот відповідної вибірки.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з’єднують точки

$$(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k),$$

де x_i — упорядковані за величиною варіанти вибірки, а n^i — відповідні їм частоти, $i = 1, 2, \ldots$.

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з’єднують точки

$$(x_1, p_1), (x_2, p_2),..., (x_k, p_k),$$

де x_i — варіанти вибірки, а $p_i = P_n^*(\{x_i\})$ — відповідні їм статистичні ймовірності, $i = 1, 2, ..., k$.

Для побудови інтервального статистичного розподілу вибірки у разі великої кількості спостережень увесь проміжок [a; b), у якому розміщені спостережувані значення випадкової величини X, як правило, розбивають на декілька частинних проміжків $[a_{i-1}; a_i)$, $i = 1, 2, ..., k$ однакової довжини h і знаходять n_i та $\left(P_6 = \frac{n_6}{n}\right)$ — суму частот (та відносних частот) варіант, що потрапляють в i-й проміжок. Для вибору *числа h* рекомендовано використовувати формулу

$$h \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,2 \cdot \lg n}, \qquad (67)$$

де $x_{\max}$, $x_{\min}$ — відповідно найбільше і найменше значення вибірки; n — об'єм вибірки.

x_i — це позначення варіант, а кінці проміжків слід позначати a_i.

Проміжки $[a_{i-1}; a_i)$ $i \in 1, 2, .., k$, об'єднання яких дає [a; b), на практиці можна визначити так:

1) Знайти $x_{\text{сер}} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$, що є серединою проміжку $\left[a_{k_0-1}; a_{k_0}\right)$;

2) $a_{k_0-2} = a_{k_0-1} - h, \ldots, a_0 = a_1 - h$, причому $x_{\min} \in [a_0; a_1)$;

3) $a_{k_0} = a_{k_0-1} + h, \ldots, a_k = a_{k-1} + h$, причому $x_{\max} \in [a_{k-1}; a_k)$.

Якщо задано інтервальний статистичний розподіл частот або емпіричних ймовірностей вибірки, то для побудови полігону частот або емпіричних ймовірностей за даними вибірки з'єднують точки, абсцисами яких є значення середин частинних інтервалів, а ординатами — відповідні їм значення частот або емпіричних ймовірностей.

Якщо випадкова величина X є абсолютно неперервною, то для неї вводиться поняття гістограми частот відповідної вибірки.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $[x_{i-1}; x_i)$ довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ (***щільність i-ї частоти***). Площа i-го частинного прямокутника дорівнює

$$h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i, \; i = 1, 2, ..., k,$$

тобто сумі частот варіант, що потрапили в i-й інтервал. Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки n.

Гістограмою відносних частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $[a_{i-1}; a_i)$ довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{p_i}{h}$ (*щільність відносної частоти*). Гістограмою називають також функцію $f^*(x) = f_{n,X}(x)$, графік якої обмежує цю ступінчасту фігуру зверху. Зазначена функція є щільністю розподілу емпіричних ймовірностей на множині значень випадкової величини X, а відповідна *емпірична функція абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини* X має вигляд

$$F^*_{n,X}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{n,X}(u)\,du, \quad x \in (-\infty; +\infty). \qquad (68)$$

Для побудови графіку емпіричної абсолютно неперервної функції розподілу підраховують $F_{n,X}(a_i) = \sum_{j=0}^{i} P_j, \quad i \in \overline{0,k}$, де $p_0 = 0$, $a_0 = a$, $a_k = b$. Далі точки $(a_i, F_{n,X}(a_i))$, $i = 0, 1, 2, ..., k$ послідовно сполучають відрізками і вважають $F_{n,X}(x) = 0$, коли $x \le a$, а $F_{n,X}(x) = 1$, коли $x > b$.

Якщо задано точковий статистичний розподіл вибірки, то для побудови відповідного інтервального розподілу іноді можна вважати, що серединами частинних проміжків є усі (або деякі) з наявних варіантів.

Побудову за даною вибіркою варіаційного ряду, дискретного або інтервального розподілу частот (відносних частот), полігону частот (відносних частот), функції розподілу та її графіка, гістограми зручно здійснювати за допомогою комп'ютерних засобів (наприклад, GRAN1, MathCAD …).

Приклад 4. Побудувати полігон частот за статистичним розподілом вибірки (*табл.12.5*).

Таблиця 12.5

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	5	1	8	3	2	2	6

Розв'язання. Відкладемо на осі абсцис значення варіант x_i, а на осі ординат — значення відповідних їм частот n_i. Послідовно з'єднуючи між собою точки (x_i, n_i) відрізками, отримуємо полігон частот (*рис. 60*).

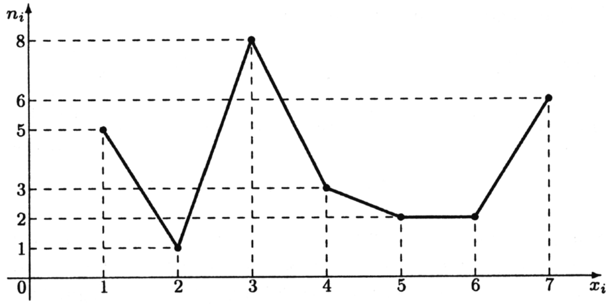


Рис. 60

Приклад 5. Вибірку задано інтервальним розподілом частот (*табл. 12.6*).

Таблиця 12.6

$[a_i; a_{i+1})$	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)
n_i	13	9	5	16	7

Побудувати полігон відносних частот.

Розв'язання. Спостережувана випадкова величина X розглядається як дискретна. Знайдемо об'єм вибірки:

$$n = 13 + 9 + 5 + 16 + 7 = 50.$$

Для побудови інтервального статистичного розподілу відносних частот визначимо відносні частоти:

$$p_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{13}{50} = 0{,}26\,; \; p_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{9}{50} = 0{,}18\,;$$

$$p_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{5}{50} = 0{,}1\,; \; p_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{16}{50} = 0{,}32\,;$$

$$p_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{7}{50} = 0{,}14\,.$$

Побудуємо інтервальний статистичний розподіл відносних частот (*табл. 12.7*).

Таблиця 12.7

$[a_i; a_{i+1})$	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)
p_i	0,26	0,18	0,1	0,32	0,14

Знайдемо середини частинних інтервалів:

$$x_1^{\text{сер}} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2; \; x_2^{\text{сер}} = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{3+5}{2} = 4;$$

$$x_3^{\text{сер}} = \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{5+7}{2} = 6; \; x_4^{\text{сер}} = \frac{a_4 + a_5}{2} = \frac{7+9}{2} = 8;$$

$$x_5^{\text{сер}} = \frac{a_5 + a_6}{2} = \frac{9+11}{2} = 10.$$

Відкладемо на осі абсцис значення середин частинних інтервалів $x_i^{\text{сер}}$, а на осі ординат — значення відповідних їм відносних частот w_i. Послідовно з'єднуючи між собою точки $(x_i^{\text{сер}}, p_i)$ відрізками, отримаємо полігон відносних частот (*рис. 61*).

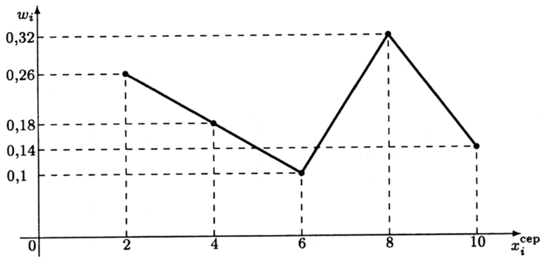


Рис. 61

Приклад 6. Вибірку задано інтервальним розподілом частот (*табл. 12.8*).

Таблиця 12.8

$[x_i; x_{i+1})$	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)
n_i	19	9	12	14	7	22	17

Побудувати гістограму частот.

Розв'язання. Спостережувана випадкова величина X розглядається як абсолютно неперервна. Знайдемо довжину інтервалів:

$$h = x_{i+1} - x_i \equiv 1 .$$

Визначимо щільність частоти:

$$n_1^h = \frac{n_1}{h} = \frac{19}{1} = 19 ; \; n_2^h = \frac{n_2}{h} = \frac{9}{1} = 9 ; \; n_3^h = \frac{n_3}{h} = \frac{12}{1} = 12 ;$$

$$n_4^h = \frac{n_4}{h} = \frac{14}{1} = 14 ; \; n_5^h = \frac{n_5}{h} = \frac{7}{1} = 7 ; \; n_6^h = \frac{n_6}{h} = \frac{22}{1} = 22 ;$$

$$n_7^h = \frac{n_7}{h} = \frac{17}{1} = 17 .$$

Далі побудуємо на осі абсцис задані частинні інтервали довжиною $h = 1$. Проведемо над цими інтервалами відрізки, що паралельні осі абсцис і розміщені на відстанях, які дорівнюють відповідним щільностям частоти n_i^h. Краї цих відрізків з'єднаємо з віссю абсцис відрізками, паралельними осі ординат. Отриману гістограму частот зображено на *рис. 62*.

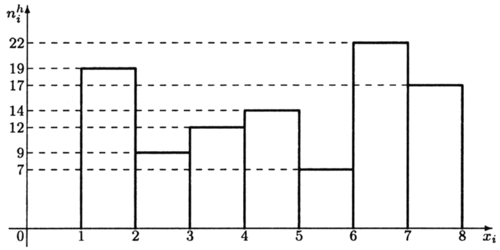


Рис. 62

Приклад 7. Вибірку задано розподілом частот (*табл. 12.9*).

Таблиця 12.9

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	2	3	5	1	4	2	3

Побудувати гістограму відносних частот та відповідну емпіричну абсолютно неперервну функцію розподілу ймовірностей.

Розв'язання. Спостережувана випадкова величина X розглядається як абсолютно неперервна. Щоб побудувати гістограму відносних частот, даний дискретний статистичний розподіл частот потрібно перетворити на інтервальний статистичний розподіл відносних частот (емпіричних ймовірностей) і знайти щільності відносних частот. Для цього спочатку визначимо об'єм вибірки й емпіричні ймовірності:

$$n = 2 + 3 + 5 + 1 + 4 + 2 + 3 = 20;$$

$$p_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}1\,;\; p_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15\,;$$

$$p_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{5}{20} = 0{,}25\,;\; p_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05\,;$$

$$p_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{4}{20} = 0{,}2\,;\; p_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}1\,;$$

$$p_7 = \frac{n_7}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15\,.$$

Знайдемо довжину частинних інтервалів, частинні інтервали й щільність відносних частот. Частинні проміжки зручно вважати такими, щоб задані в дискретному статистичному розподілі варіанти були серединами цих проміжків.

Отже, довжина частинних інтервалів

$$h = x_{i+1} - x_i \equiv 2\,,$$

шуканий інтервальний статистичний розподіл емпіричних ймовірностей має такий вигляд (*табл. 12.10*):

Таблиця 12.10

$[a_i; a_{i+1})$	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
p_i	0,1	0,15	0,25	0,05	0,2	0,1	0,15

,

а щільність розподілу емпіричних ймовірностей така:

$$w_1^h = \frac{p_1}{h} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05\,;\; w_2^h = \frac{p_2}{h} = \frac{0{,}15}{2} = 0{,}075\,;$$

$$w_3^h = \frac{p_3}{h} = \frac{0{,}25}{2} = 0{,}125\,;\; w_4^h = \frac{p_4}{h} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025\,;$$

$$w_5^h = \frac{p_5}{h} = \frac{0,2}{2} = 0,1\,;\; w_6^h = \frac{p_6}{h} = \frac{0,1}{2} = 0,05\,;$$

$$w_7^h = \frac{p_7}{h} = \frac{0,15}{2} = 0,075\,,$$

де $w_i^h = f^*(x)$, коли $a_i \le x < a_i$ — щільність розподілу емпіричних ймовірностей.

Тепер, застосувавши міркування попереднього прикладу, можна легко побудувати шукану гістограму відносних частот (*рис. 63*).

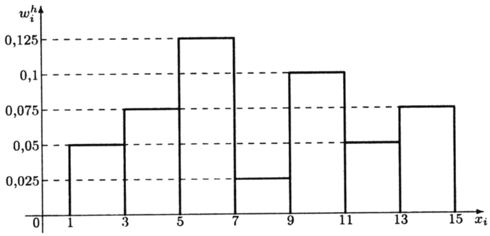


Рис. 63

Для побудови графіка емпіричної абсолютної неперервної функції розподілу знаходимо: $F_{n,X}^*(1) = 0$; $F_{n,X}^*(3) = 0,1$; $F_{n,X}^*(5) = 0,25$; $F_{n,X}^*(7) = 0,5$; $F_{n,X}^*(9) = 0,55$; $F_{n,X}^*(11) = 0,75$; $F_{n,X}^*(13) = 0,85$; $F_{n,X}^*(15) = 1$, зображуємо відповідні точки $\left(x_i, F_{n,X}^*(x_i)\right)$ і послідовно сполучаємо їх відрізками (*рис. 64*).

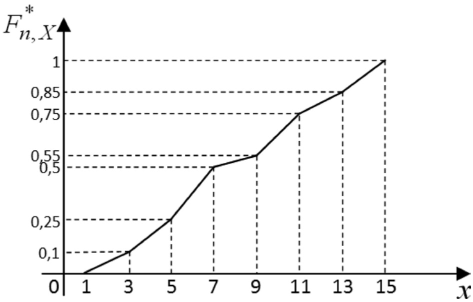


Рис. 64

Приклад 8. Дано вибірку: 0,1; 0,4; 0,23; 0,12; 0,35; 0,46; 0,11; 0,04; 0,51; 0,27; 0,31; 0,34; 0,094; 0,18; 0,49; 0,33; 0,3; 0,22; 0,14; 0,5; 0,41; 0,25; 0,48; 0,32; 0,29; 0,31; 0,31; 0,46; 0,444; 0,38; 0,39; 0,13; 0,47; 0,4; 0,53; 0,374; 0,16; 0,444; 0,39; 0,27; 0,25; 0,46; 0,2; 0,11; 0,32; 0,41; 0,48; 0,224; 0,35; 0,52.

За даними вибірки побудувати інтервальний статистичний розподіл, полігон і гістограму частот.

Розв'язання. Знайдемо об'єм вибірки: $n = 50$. Оскільки найбільше значення $x_{\max} = 0{,}53$, а найменше $x_{\min}$, то величину частинного інтервалу визначаємо так:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2 \cdot \lg n} = \frac{0{,}53 - 0{,}04}{1 + 3{,}2 \cdot \lg 50} \approx \frac{0{,}49}{1 + 3{,}2 \cdot 1{,}69897} \approx 0{,}076 .$$

Частинні проміжки знаходимо за серединним проміжком за умови, що він має розміщуватися на однаковій відстані від кінців варіаційного ряду (тобто від 0,04 і 0,53). Отже, середина серединного частинного проміжку

$$x_{\text{сер}}^{\text{сер}} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = \frac{0{,}53 + 0{,}04}{2} = 0{,}285 .$$

Оскільки довжина частинного інтервалу $h = 0{,}076$, то серединний проміжок

$$[a_3; a_4) = \left[x_{\text{сер}}^{\text{сер}} - \frac{h}{2};\ x_{\text{сер}}^{\text{сер}} + \frac{h}{2}\right) = \left[0{,}285 - \frac{0{,}076}{2};\ 0{,}285 + \frac{0{,}076}{2}\right) =$$
$$= [0{,}247;\ 0{,}323).$$

Тепер легко знайти решту частинних інтервалів (спочатку будемо рухатися в напрямку від серединного частинного проміжку до першого, а потім — від серединного до останнього):

$$[a_2; a_3) = [0{,}247 - 0{,}076; 0{,}247) = [0{,}171; 0{,}247),$$
$$[a_1; a_2) = [0{,}171 - 0{,}076; 0{,}171) = [0{,}095; 0{,}171),$$
$$[a_0; a_1) = [0{,}095 - 0{,}076; 0{,}095) = [0{,}019; 0{,}095),$$
$$[a_4; a_5) = [0{,}323; 0{,}323 + 0{,}076) = [0{,}323; 0{,}399),$$
$$[a_5; a_6) = [0{,}399; 0{,}399 + 0{,}076) = [0{,}399; 0{,}475),$$
$$[a_6; a_7) = [0{,}475; 0{,}475 + 0{,}076) = [0{,}475; 0{,}551).$$

Визначивши частоти частинних інтервалів, отримаємо інтервальний статистичний розподіл вибірки (*табл.12.11*).

Таблиця 12.11

Номер інтервалу i	**Частинний інтервал** $[a_{i-1}; a_i)$	**Сума частот варіант інтервалу** n_i
1	[0,019; 0,095)	2
2	[0,095; 0,171)	7
3	[0,171; 0,247)	5
4	[0,247; 0,323)	11
5	[0,323; 0,399)	8
6	[0,399; 0,475)	10
7	[0,475; 0,551)	7

Контроль: $n = 2 + 7 + 5 + 11 + 8 + 10 + 7 = 50$.

Спочатку вважаємо, що спостережувана випадкова величина X дискретна. Щоб побудувати полігон частот, знайдемо значення середин частинних проміжків:

$$x_1^{\text{сер}} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0,019 + 0,095}{2} = 0,057;$$

$$x_2^{\text{сер}} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{0,095 + 0,171}{2} = 0,133;$$

$$x_3^{\text{сер}} = \frac{x_3 + x4}{2} = \frac{0,171 + 0,247}{2} = 0,209;$$

$$x_4^{\text{сер}} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{0,247 + 0,323}{2} = 0,285;$$

$$x_5^{\text{сер}} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{0,323 + 0,399}{2} = 0,361;$$

$$x_6^{\text{сер}} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{0,399 + 0,475}{2} = 0,437;$$

$$x_7^{\text{сер}} = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{0,475 + 0,551}{2} = 0,513. \cdot$$

Сполучивши послідовно точки $\left(x_i^{\text{сер}}, n_i\right)$ відрізками, одержимо шуканий полігон частот (*рис. 65*).

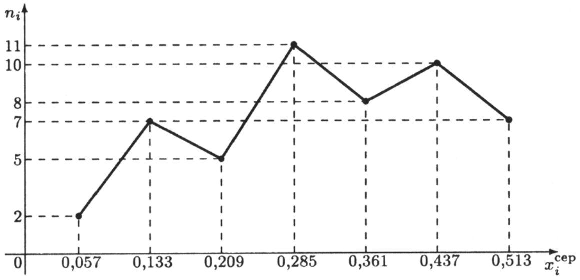


Рис. 65

Тепер вважаємо, що спостережувана випадкова величина X абсолютно неперервна.

Гістограму частот побудуємо, знайшовши щільність розподілу відносних частот:

$$n_1^h = \frac{n_1}{h} = \frac{2}{0,076} \approx 26\,;\; n_2^h = \frac{n_2}{h} = \frac{7}{0,076} \approx 92\,;$$

$$n_3^h = \frac{n_3}{h} = \frac{5}{0,076} \approx 66\,;\; n_4^h = \frac{n_4}{h} = \frac{11}{0,076} \approx 145\,;$$

$$n_5^h = \frac{n_5}{h} = \frac{8}{0,076} \approx 105\,;\; n_6^h = \frac{n_6}{h} = \frac{10}{0,076} \approx 132\,;$$

$$n_7^h = \frac{n_7}{h} = \frac{7}{0,076} \approx 92\,.$$

Відклавши на осях координат необхідні точки, одержуємо гістограму частот, зображену на *рис. 66*.

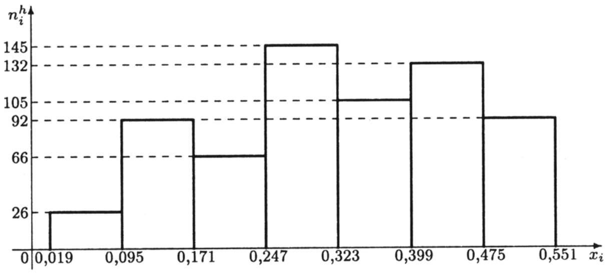


Рис. 66

12.2. Числові характеристики вибірки

Середнє арифметичне значення вибірки називається *вибірковим середнім* $\overline{x}_{\text{в}}$ і обчислюється за формулами

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i, \tag{69}$$

де x_i — значення i-ї варіанти; n_i — частота i-ї варіанти; n — об'єм вибірки; k — кількість варіант у вибірці; p_i — відносна частота i-ї варіанти.

Середній квадрат відхилення значень елементів вибірки від вибіркового середнього називається *вибірковою дисперсією* D_B і обчислюється за формулами

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_{\text{в}}\right)^2 n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_{\text{в}}\right)^2 p_i. \tag{70}$$

Після перетворень формули для знаходження вибіркової дисперсії дещо спрощуються:

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}{n} - \overline{x}_{\text{в}}^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i - \overline{x}_{\text{в}}^2, \tag{71}$$

тобто вибіркова дисперсія дорівнює різниці середнього квадрата елементів вибірки й квадрата вибіркового середнього.

Квадратний корінь з вибіркової дисперсії $\sigma = \sqrt{D_{\text{в}}}$ називається *середнім квадратичним відхиленням вибірки*.

Приклад 1. Задано статистичний розподіл вибірки (*табл. 12.12*).

Таблиця 12.12

x_i	1	3	4	7	10	12	15
n_i	5	2	12	7	4	3	2

Знайти відповідні значення вибіркового середнього, вибіркової дисперсії та середнє квадратичне відхилення вибірки.

Розв'язання. Обчислимо об'єм вибірки:

$$n = 5 + 2 + 12 + 7 + 4 + 3 + 2 = 35.$$

Знайдемо відповідно вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та середнє квадратичне відхилення вибірки:

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{1\cdot 5 + 3\cdot 2 + 4\cdot 12 + 7\cdot 7 + 10\cdot 4 + 12\cdot 3 + 15\cdot 2}{35} = \frac{214}{35} \approx 6{,}1\,;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}{n} - \overline{x}_{\text{в}}^2 =$$

$$= \frac{1^2\cdot 5 + 3^2\cdot 2 + 4^2\cdot 12 + 7^2\cdot 7 + 10^2\cdot 4 + 12^2\cdot 3 + 15^2\cdot 2}{35} - \left(\frac{214}{35}\right)^2 =$$

$$= \frac{18604}{1225} \approx 15{,}2;$$

$$\sigma = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{18604}{1225}} \approx 3{,}9\,.$$

Зазначені розрахунки можна виконати у програмі MS Excel *(рис. 67)*.

	A	B	C	D	E	F
1	X_i	n_i	X_i*n_i	X_i- $\bar{x}_i$	$(X_i$- $\bar{x}_i)^2$	$(X_i$- $\bar{x}_i)^2$*n_i
2	1	5	5	-5,11	26,16	130,78
3	3	2	6	-3,11	9,70	19,40
4	4	12	48	-2,11	4,47	53,64
5	7	7	49	0,89	0,78	5,49
6	10	4	40	3,89	15,10	60,40
7	12	3	36	5,89	34,64	103,92
8	15	2	30	8,89	78,96	157,91
9	Сума	35	214			531,54
10	$\bar{x}_{\text{в}}$ =	6,11	$D_{\text{в}}$=	15,19	σ=	3,90

Рис. 67. MS Excel. Числові характеристики вибірки

Якщо задано інтервальний статистичний розподіл вибірки, то вибіркове середнє, вибіркову дисперсію шукають за допомогою такого статистичного розподілу: варіантами вважаються середини частинних інтервалів, а частоти або відносні частоти залишаються такими самими.

Приклад 2. Задано інтервальний статистичний розподіл вибірки (*табл. 12.13*).

Таблиця 12.13

$[x_i; x_{i+1})$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
w_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1

Знайти відповідні вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Спочатку перетворимо даний інтервальний статистичний розподіл вибірки на точковий, знайшовши середини частинних інтервалів:

$$x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+2}{2} = 1;\ x_2 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{2+4}{2} = 3;$$

$$x_3 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{4+6}{2} = 5;\ x_4 = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{6+8}{2} = 7;$$

$$x_5 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{8+10}{2} = 9;\ x_6 = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{10+12}{2} = 11;$$

$$x_7 = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{12+14}{2} = 13.$$

Отже, отримали такий статистичний розподіл вибірки (*табл. 12.14*).

Таблиця 12.14

x_i	1	3	5	7	9	11	13
w_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1

Знайдемо відповідні вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

$$\overline{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i = 1\cdot 0,1 + 3\cdot 0,2 + 5\cdot 0,3 + 7\cdot 0,1 + 9\cdot 0,1 + 11\cdot 0,1 + 13\cdot 0,1 = 6,2\,;$$

$$D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i - \overline{x}_{\text{в}}^2 = 1^2\cdot 0,1 + 3^2\cdot 0,2 + 5^2\cdot 0,3 + 7^2\cdot 0,1 +$$

$$+9^2\cdot 0,1 + 11^2\cdot 0,1 + 13^2\cdot 0,1 - 6,2^2 = 12,96;$$

$$\sigma = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{12,96} = 3,6.$$

Медіаною точкового статистичного розподілу вибірки називається число Me, визначене за правилом:

1) якщо об'єм вибірки $n = 2m + 1$ непарний, то медіаною буде значення елемента варіаційного ряду з номером $m + 1$, тобто $Me = x_{m+1}$;

2) якщо об'єм вибірки $n = 2m$ парний, то медіаною буде середнє значення елементів варіаційного ряду з номерами m і $m + 1$, тобто $Me = \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}$.

Медіаною інтервального статистичного розподілу вибірки називається число Me, визначене за правилом:

1) по-перше, знаходяться *медіанний частинний інтервал*, тобто перший частинний інтервал, у який попадає член варіаційного ряду з номером більшим за половину об'єму вибірки;

2) по-друге, знаходять числа $x_{Me}^{\min}$ — початок медіанного частинного інтервалу; h_{Me} — довжина медіанного частинного інтервалу; n — об'єм вибірки; n_{Me} — частота медіанного частинного інтервалу; i_0 — номер попереднього до медіанного частинного інтервалу;

3) по-третє, обчислюють медіану за формулою

$$Me = x_{Me}^{\min} + h_{Me}\frac{\frac{1}{2}n - \sum_{i=1}^{i_0} n_i}{n_{Me}}. \tag{72}$$

Медіана має властивість: сума абсолютних величин відхилень елементів вибірки від медіани меншого за суму абсолютних величин відхилень від будь-якої іншої точки:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - Me| < \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|,\ a \neq Me.$$

Приклад 3. На одному з відрізків залізниці планується створити зупинку пасажирського поїзда. Розподіл населених пунктів з чисельністю їх населення наведено в таблиці (*табл. 12.15*).

Таблиця 12.15

На якому кілометрі залізниці розташований населений пункт, км	10	12	15	25	28	30	33
Чисельність населення, тис. чол.	5	2	3	10	1	4	6

На якому кілометрі залізниці потрібно розташувати зупинку, щоб сумарна відстань, яку покриватимуть потенційні пасажири до цієї зупинки, була найменшою.

Розв'язання. Оскільки медіана має властивість, що сума абсолютних величин відхилень елементів вибірки від медіани менша, ніж сума абсолютних величин відхилень від будь-якої іншої величини, то для розв'язання прикладу потрібно знайти медіану.

Спочатку визначимо об'єм вибірки:

$$n = 5 + 2 + 3 + 10 + 1 + 4 + 6 = 31.$$

Отже, серединою (середнім членом) варіаційного ряду буде елемент із номером 16: $Me = x_{16}$. Оскільки варіаційний ряд можна записати у вигляді

$$\underbrace{10,\ldots,10}_{5\,разів},12,12,15,15,15,\underbrace{25,\ldots,25}_{10\ разів},28,\underbrace{30,\ldots,30}_{4\ рази},\underbrace{33,\ldots,33}_{6\ разів};$$

легко бачити, що $x_{16} = 25$, тобто зупинку слід розташувати на 25-му кілометрі залізниці.

Модою (Mo) точкового статистичного розподілу вибірки називається варіанта з найбільшою частотою. У випадку інтервального статистичного розподілу вибірки — модою називають число Mo, що визначається за правилом:

1) знаходять *модальний частинний інтервал* за найбільшою щільністю $\max\limits_i \dfrac{n_i}{h_i}$, де n_i, h_i — відповідно частота і довжина i-го частинного інтервалу;

2) потім знаходять числа $x_{Mo}^{\min}$ — початок модального частинного інтервалу; h_{Mo} — довжина модального частинного інтервалу; n_{Mo} — частота модального частинного інтервалу; n_{Mo-1} — частота

попереднього модального частинного інтервалу; n_{Mo+1} — частота наступного модального частинного інтервалу;

3) знаходять число Mo за формулою

$$Mo = x_{Mo}^{\min} + h_{Mo} \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}}. \quad (73)$$

Варіаційним розмахом (або розмахом варіації) називається різниця між найбільшим і найменшим значеннями вибірки:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (74)$$

Приклад 4. Задано інтервальний статистичний розподіл вибірки (*табл. 12.16*).

Таблиця 12.16

$[x_i; x_{i+1})$	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
n_i	7	4	5	1	12	3	18

Знайти медіану, моду, варіаційний розмах.

Розв'язання. Визначимо об'єм вибірки:

$$n = 7 + 4 + 5 + 1 + 12 + 3 + 18 = 50.$$

Медіанним частинним інтервалом буде п'ятий інтервал, оскільки це перший інтервал, для якого сума частот усіх попередніх частинних інтервалів з даним включно перевищує половину об'єму вибірки:

$$7+4+5+1+12 = 29 > \frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

Модальним частинним інтервалом буде останній інтервал, оскільки він має найбільшу частоту.

Знайдемо початок медіанного частинного інтервалу $x_{Me}^{\min}$, довжину медіанного частинного інтервалу h_{Me}, номер попереднього до медіанного частинного інтервалу i_0, частоту медіанного частинного інтервалу n_{Me}, початок модального частинного інтервалу $x_{Mo}^{\min}$, довжину модального частинного інтервалу h_{Mo}, частоту модального частинного інтервалу n_{Mo}, частоту попереднього до модального частинного інтервалу n_{Mo-1}, частоту наступного за модальним частинного інтервалу n_{Mo+1}, найбільше й найменше значення вибірки:

$$x_{Me}^{\min} = 30;\ h_{Me} = 35 - 30 = 5;\ i_0 = 4;$$

$$n_{Me} = 12;\ x_{Mo}^{\min} = 40;\ h_{Mo} = 45 - 40 = 5;$$

$$n_{Mo} = 18;\ n_{Mo-1} = 3;\ n_{Mo+1} = 0;$$

$$x_{\max} = 45;\ x_{\min} = 10.$$

Шукані медіана, мода та варіаційний розмах відповідно будуть такі:

$$Me = x_{Me}^{\min} + h_{Me}\frac{\frac{1}{2}n - \sum_{i=1}^{i_0} n_i}{n_{Me}} = 30 + 5\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 50 - \sum_{i=1}^{4} n_i}{12} = \frac{100}{3} \approx 33,3;$$

$$Mo = x_{Mo}^{\min} + h_{Mo}\frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} = 40 + 5\cdot\frac{18-3}{2\cdot 18 - 3 - 0} =$$

$$= \frac{465}{11} \approx 42,34;$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 45 - 10 = 35.$$

Числові характеристики вибірки зручно знаходити за допомогою програмних засобів (наприклад, GRAN1, Excel).

12.3. Метод добутків обчислення вибіркового середнього та вибіркової дисперсії

Нехай варіанти x_i даної вибірки є рівновіддаленими, тобто задовольняють умову $x_{i+1} — x_i = \text{const}$. У такому разі вибіркове середнє та вибіркову дисперсію зручно знаходити *методом добутків* за формулами

$$\bar{x}_{\text{в}} = M_1^* h + C,\ D_{\text{в}} = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right]h^2, \qquad (75)$$

де $M_1^* = \dfrac{\sum_i n_i u_i}{n}$ — умовний момент першого порядку; $u_i = \dfrac{x_i - C}{h}$ — умовна варіанта; h — довжина кроку (відстань між сусідніми варіантами); C — *хибний нуль* (значення варіанти, розміщеної приблизно посередині варіаційного ряду); $M_2^* = \dfrac{\sum_i n_i u_i^2}{n}$ — умовний момент другого порядку.

Приклад 1. Знайти методом добутків вибіркове середнє та вибіркову дисперсію для заданого розподілу вибірки (*табл. 12.17*).

Таблиця 12.17

x_i	24	28	32	36	40	44	48
n_i	6	13	20	45	11	3	2

Розв'язання. Об'єм вибірки дорівнює $n = 100$. Складемо розрахункову таблицю *(табл.12.18)*, а саме:

1) запишемо значення варіант у перший стовпець;
2) запишемо значення частот у другий стовпець, суму частот (об'єм вибірки) — у нижній його клітинці;
3) як хибний нуль C оберемо значення четвертої варіанти $x_4 = 36$, яка має найбільшу частоту (як C можна взяти значення будь-якої варіанти, розміщеної приблизно посередині стовпця), у клітинці третього стовпця, яка відповідає хибному нулю, запишемо 0, над ним послідовно записуємо –1, –2, –3, а під ним — 1, 2, 3;
4) добутки частот n_i на значення відповідних умовних варіант u_i запишемо у четвертий стовпець, окремо знайдемо суму всіх чисел четвертого стовпця, яку помістимо в нижню клітинку четвертого стовпця;
5) добутки частот n_i на значення квадратів відповідних умовних варіант u_i^2, тобто $n_i u_i^2$, запишемо у п'ятий стовпець (зручніше перемножити числа рядка третього й четвертого стовпців: $u_i \cdot n_i u_i = n_i u_i^2$), окремо знайдемо суму всіх чисел п'ятого стовпця, яку помістимо в нижню клітинку п'ятого стовпця;
6) добутки частот n_i на значення квадратів відповідних умовних варіант u_i, збільшених на одиницю, тобто $n_i\,(u_i + 1)^2$, запишемо у шостий стовпець, окремо знайдемо суму всіх чисел шостого стовпця, яку помістимо в нижню клітинку шостого стовпця.

Отже, ми отримали розрахункову таблицю.

Таблиця 12.18

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
24	6	–3	–18	54	24
28	13	–2	–26	52	13
32	20	–1	–20	20	0
36	45	0	0	0	45
40	11	1	11	11	44
44	3	2	6	12	27
48	2	3	6	18	32
	$n = 100$		$\sum_i n_iu_i = -41$	$\sum_i n_iu_i^2 = 167$	$\sum_i n_i(u_i+1)^2 = 185$

Для контролю обчислень скористаємося тотожністю

$$\sum_i n_i(u_i+1)^2 \equiv \sum_i n_iu_i^2 + 2\sum_i n_iu_i + n.$$

Контроль:

$$\sum_i n_i(u_i+1)^2 = 185;$$

$$\sum_i n_iu_i^2 + 2\sum_i n_iu_i + n = 167 + 2\cdot(-41) + 100 = 185.$$

Рівність контрольних сум свідчить про правильність обчислень.

Обчислимо умовні моменти першого і другого порядку:

$$M_1^* = \frac{\sum_i n_iu_i}{n} = \frac{-41}{100} = -0,41; \quad M_2^* = \frac{\sum_i n_iu_i^2}{n} = \frac{167}{100} = 1,67.$$

Знайдемо крок (різницю між будь-якими двома сусідніми варіантами):

$$h = 28 - 24 = 4.$$

Визначимо шукані вибіркові середнє й дисперсію, ураховуючи, що хибний нуль (значення варіанти, яка має найбільшу частоту) $C = 36$:

$$\overline{x}_{\text{в}} = M_1^* h + C = -0,41 \cdot 4 + 36 = 34,36;$$

$$D_{\text{в}} = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] h^2 = \left[1,67 - (-0,41)^2\right] \cdot 4^2 = 24,0304.$$

Зазначені обчислення доволі зручно проводити у програмі MS Excel.

Якщо варіанти вибірки не є рівновіддаленими, то проміжок, у якому розміщені всі варіанти вибірки, ділять на декілька рівних за довжиною частинних інтервалів (кожний з них має містити не менше 8–10 варіант). Потім знаходять середини частинних проміжків, які й утворюватимуть послідовність рівновіддалених варіант. За частоту кожної середини частинного проміжку беруть суму частот варіант, які потрапили у такий частинний проміжок.

При обчисленні вибіркової дисперсії з метою зменшення похибки, зумовленої групуванням (особливо при малій кількості проміжків), роблять *поправку Шеппарда*, а саме обчислюють дисперсію за формулою

$$D'_{\text{в}} = D_{\text{в}} - \frac{1}{12} h^2. \tag{76}$$

Приклад 2. Знайти методом добутків вибіркове середнє та вибіркову дисперсію для заданого розподілу (*табл. 12.19*).

Таблиця 12.19

x_i	2	8	9	13	15	18	20	21	24	27
n_i	8	1	15	13	9	3	4	10	22	15

Розв'язання. Об'єм вибірки $n = 100$. Розіб'ємо відрізок [2; 27] на п'ять частинних проміжків довжиною $h = 5$:

$$[2; 7], \quad (7; 12], \quad (12; 17], \quad (17; 22], \quad (22; 27].$$

Новими варіантами будуть середини частинних проміжків:

$$y_1 = \frac{2+7}{2} = 4,5\,; \; y_2 = \frac{7+12}{2} = 9,5\,; \; y_3 = \frac{12+17}{2} = 14,5\,;$$

$$y_4 = \frac{17+22}{2} = 19,5\,; \; y_5 = \frac{22+27}{2} = 24,5\,.$$

За частоти m_i варіант y_i візьмемо суму частот варіант, які потрапили у відповідний i-й проміжок:

$$m_1 = n_1 = 8;\ m_2 = n_2 + n_3 = 1 + 15 = 16;$$
$$m_3 = n_4 + n_5 = 13 + 9 = 22;\ m_4 = n_6 + n_7 + n_8 = 3 + 4 + 10 = 17;$$
$$m_5 = n_9 + n_{10} = 22 + 15 = 37.$$

Отже, маємо статистичний розподіл рівновіддалених варіант (*табл. 12.20*).

Таблиця 12.20

y_i	4,5	9,5	14,5	19,5	24,5
m_i	8	16	22	17	37

Як і в попередньому прикладі, складемо розрахункову таблицю (*табл. 12.21*).

Таблиця 12.21

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y_i	m_i	u_i	m_iu_i	$m_iu_i^2$	$m_i(u_i+1)^2$
4,5	8	–2	–16	32	8
9,5	16	–1	–16	16	0
14,5	22	0	0	0	22
19,5	17	1	17	17	68
24,5	37	2	74	148	333
	$n = 100$		$\sum_i m_iu_i = 59$	$\sum_i m_iu_i^2 = 213$	$\sum_i m_i(u_i+1)^2 = 431$

Контроль:

$$\sum m_i(u_i+1)\ \ = 431\,;$$

$$\sum_i m_iu_i^2 + 2\sum_i m_iu_i + n = 213 + 2\cdot 59 + 100 = 431\,.$$

Обчислимо умовні моменти першого й другого порядку:

$$M_1^* = \frac{\sum_i m_i u_i}{n} = \frac{59}{100} = 0,59; \quad M_2^* = \frac{\sum_i m_i u_i^2}{n} = \frac{213}{100} = 2,13.$$

Методом добутків знайдемо вибіркові середнє й дисперсію, ураховуючи, що хибний нуль $C = 14,5$:

$$\bar{x}_{\text{в}} = M_1^* h + C = 0,59 \cdot 5 + 14,5 = 17,45;$$
$$D_{\text{в}} = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 = [2,13 - 0,59^2] \cdot 5^2 = 44,5475.$$

Оскільки кількість частинних проміжків мала (п’ять), скористаємося поправкою Шеппарда:

$$D'_{\text{в}} = D_{\text{в}} - \frac{1}{12}h^2 = 44,5475 - \frac{5^2}{12} \approx 42,46.$$

Як і в попередніх прикладах маємо зазначити, що проведені обчислення зручно проводити з використанням програмного засобу MS Excel.

12.4. Метод сум обчислення вибіркового середнього та вибіркової дисперсії

Нехай варіанти вибірки є рівновіддаленими. У такому разі вибіркове середнє та вибіркову дисперсію можна обчислити за формулами (*див.* ***підрозд. 12.3***)

$$\bar{x}_{\text{в}} = M_1^* h + C; \; D_{\text{в}} = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right]h^2.$$

При використанні *методу сум* умовні моменти першого й другого порядку обчислюють за формулами

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}; \quad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n}. \tag{77}$$

де $d_1 = a_1 + b_1$, $s_1 = a_1 + b_1$, $s_2 = a_2 + b_2$. Отже, потрібно обчислити значення a_1, a_2, b_1, b_2. Як практично розрахувати ці числа, розглянемо у прикладі 1.

Приклад 1. Знайти методом сум вибіркове середнє й вибіркову дисперсію за заданим статистичним розподілом вибірки об'єму $n = 100$ (*табл. 12.22*).

Таблиця 12.22

x_i	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
n_i	4	8	10	13	18	21	14	9	2	1

.

Розв'язання. Складемо розрахункову таблицю (*табл. 12.23*), а саме:

1) запишемо значення варіант у перший стовпець;
2) запишемо значення частот у другий стовпець, суму частот (об'єм вибірки) — у нижній його клітинці;
3) як хибний нуль C оберемо значення шостої варіанти $x_6 = 82$, яка має найбільшу частоту (як C можна взяти значення будь-якої варіанти, розміщеної приблизно посередині стовпця), у клітинках рядка, яка відповідає хибному нулю, запишемо нулі, у четвертому стовпці над і під нулем — іще по одному нулю;
4) у порожніх клітинках третього стовпця, що розміщені над нулем (крім верхньої), зверху вниз запишемо послідовно нагромаджені частоти:

$$4,\ 4 + 8 = 12,\ 12 + 10 = 22,\ 22 + 13 = 35,\ 35 + 18 = 53.$$

Склавши всі нагромаджені частоти, отримаємо число $b_1 = 126$, яке запишемо у верхню клітинку третього стовпця, що розміщена під нулем (крім нижньої), знизу запишемо послідовно нагромаджені частоти:

$$1,\ \ 1 + 2 = 3,\ \ 3 + 9 = 12,\ \ 12 + 14 = 26.$$

Склавши нагромаджені частоти, отримаємо число $a_1 = 42$, яке записуємо в нижню клітинку третього стовпця;
5) аналогічно заповнимо четвертий стовпець, причому нагромаджуються частоти третього стовпця. Суму нагромаджених частот, розміщених над нулем, позначимо b_2 і запишемо у верхню клітинку четвертого стовпця. Суму нагромаджених частот, розміщених під нулем, позначимо a_2 і запишемо в нижню клітинку четвертого стовпця.

Отже, ми отримали розрахункову таблицю.

Таблиця 12.23

1	2	3	4
x_i	n_i	$b_1 = 126$	$b_2 = 131$
52	4	4	4
58	8	12	16
64	10	22	38
70	13	35	73
76	18	53	0
82	21	0	0
88	14	26	0
94	9	12	16
100	2	3	4
106	1	1	1
	$n = 100$	$a_1 = 42$	$a_2 = 21$

Знайдемо d_1, s_1, s_2:

$$d_1 = a_1 - b_1 = 42 - 126 = -84;$$
$$s_1 = a_1 + b_1 = 42 + 126 = 168;$$
$$s_2 = a_2 + b_2 = 21 + 131 = 152.$$

Обчислимо умовні моменти першого й другого порядку:

$$M_1^* = \frac{d_1}{n} = \frac{-84}{100};$$
$$M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n} = \frac{168 + 2 \cdot 152}{100} = 4,72.$$

Методом добутків знайдемо вибіркові середню та дисперсію, урахувавши, що хибний нуль $C = 82$, а крок (відстань між двома сусідніми варіантами) $h = 6$; отримаємо

$$\bar{x}_в = M_1^* h + C = -0,84 \cdot 6 + 82 = 76,96;$$
$$D_в = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] h^2 = \left[4,72 - (-0,84)^2\right] \cdot 6^2 = 144,5184 .$$

Задачі до розділу 12

Задача 1. Під час дослідження кількісної ознаки X із генеральної сукупності було отримано вибірку

$$5, 7, 4, 6, 5, 5, 5, 7, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 4, 6, 5, 6, 4, 5.$$

Знайти об'єм вибірки, побудувати варіаційний ряд вибірки та її статичний розподіл.

Відповідь. $n = 20$. Варіаційний ряд вибірки 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7. Статичний розподіл (*табл. 12.24*).

Таблиця 12.24

x_i	4	5	6	7
n_i	3	9	6	2

Задача 2. Вибірку задано розподілом частот (*табл. 12.25*).

Таблиця 12.25

x_i	–3	–1	0	4	8	13	17
n_i	1	3	4	7	5	8	12

Знайти розподіл відносних частот

Таблиця 12.26

Відповідь.

x_i	–3	–1	0	4	8	13	17
n_i	0,025	0,075	0,1	0,175	0,125	0,2	0,3

Задача 3. Вибірку задано інтервальним розподілом частот (*табл. 12.27*).

Таблиця 12.27

x_i	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
n_i	5	14	16	11	4

Знайти розподіл відносних частот.

Таблиця 12.28

Відповідь.

x_i	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
w_i	0,1	0,28	0,32	0,22	0,08

Задача 4. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним статистичним розподілом вибірки (*табл. 12.29*).

Таблиця 12.29

x_i	1	4	8	13	19	26	34
n_i	5	14	17	22	25	11	6

$$\textbf{\textit{Відповідь.}}\ F_X^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ 0,5 & \text{при} \quad 1 < x \le 4; \\ 0,19 & \text{при} \quad 4 < x \le 8; \\ 0,36 & \text{при} \quad 8 < x \le 13; \\ 0,58 & \text{при} \quad 13 < x \le 19; \\ 0,83 & \text{при} \quad 19 < x \le 26; \\ 0,94 & \text{при} \quad 26 < x \le 34; \\ 1 & \text{при} \quad x > 34. \end{cases}$$

Задача 5. Побудувати полігон частот за даним статистичним розподілом вибірки (*табл. 12.30*).

Таблиця 12.30

x_i	3	5	8	14	16	20	22
n_i	32	41	18	56	23	12	47

Відповідь. Шуканий полігон частот зображено на *рис. 68*.

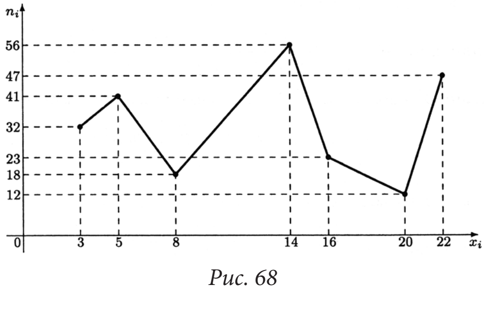


Рис. 68

Задача 6. Побудувати полігон відносних частот за даним статистичним розподілом вибірки (*табл. 12.31*).

Таблиця 12.31

x_i	1	7	11	12	18	26	31
w_i	0,15	0,2	0,1	0,15	0,1	0,05	0,25

Вказівка. Будувати так, ніби замість відносних частот зазначено частоти.

Відповідь. Шуканий полігон емпіричних ймовірностей зображено на *рис. 69.*

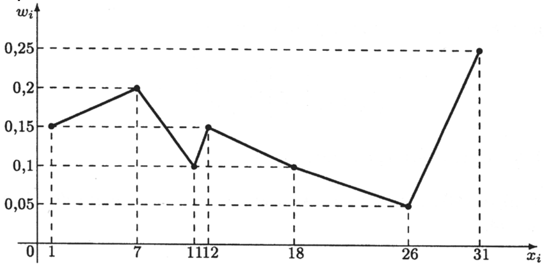


Рис. 69

Задача 7. Вибірку задано інтервальним розподілом частот (*табл. 12.32*).

Таблиця 12.32

$[x_i; x_{i+1})$	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
n_i	34	12	23	18	42	30	7

Побудувати гістограму частот.

Відповідь. Шукану гістограму частот зображено на *рис. 70*.

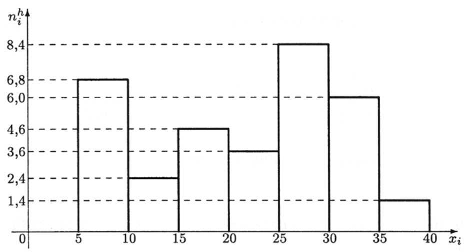


Рис. 70

Задача 8. Вибірку задано розподілом частот (*табл. 12.33*).

Таблиця 12.33

x_i	5	11	17	23	29	35	41
n_i	26	54	33	67	39	21	10

Побудувати гістограму відносних частот.

Відповідь. Шукану гістограму емпіричних ймовірностей зображено на *рис. 71*.

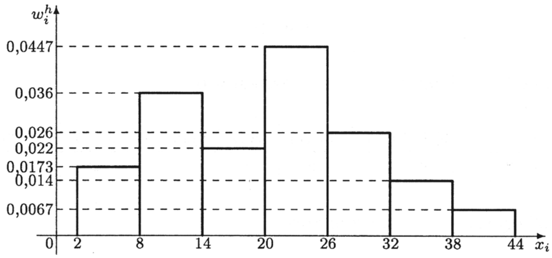


Рис. 71

Задача 9. Дано вибірку: 15, 18, 11, 12, 35, 46, 10, 41, 23, 27, 31, 34, 9, 8, 15, 13, 17, 22, 21, 44, 19, 14, 30, 25, 10, 14, 11, 18, 48, 20, 12, 32, 7, 13, 15, 41, 23, 19, 24, 28, 12, 9, 33, 17, 16, 8, 29, 15, 11, 40.

За даними вибірки побудувати інтервальний статичний розподіл, полігон і гістограму частот, а також емпіричну функцію абсолютно неперервного розподілу.

Відповідь. Інтервальний статичний розподіл вибірки подано у *табл. 12.34*:

Таблиця 12.34

Номер інтервалу i	**Частинний інтервал** $[x_i; x_{i+1})$	**Сума частот варіант інтервалу** n_i
1	[5,1; 11,5)	11
2	[11,5; 17,9)	13
3	[17,9; 24,3)	10
4	[24,3; 30,7)	5
5	[30,7; 37,1)	5
6	[37,1; 43,5)	3
7	[43,5; 49,9)	3

Шукані полігон і гістограму частот зображено на *рис. 72* і *73*.

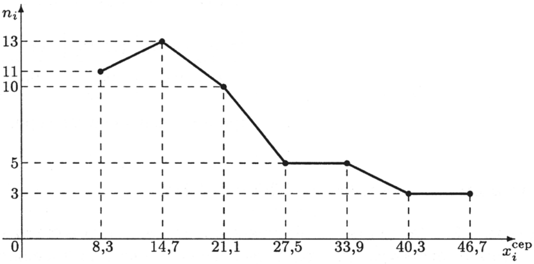


Рис. 72

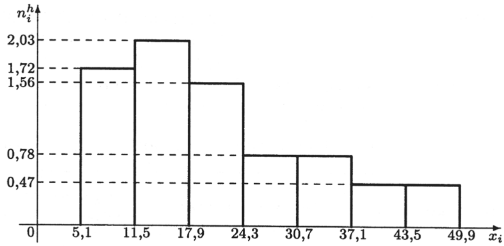


Рис. 73

Задача 10. Задано статичний розподіл вибірки (*табл. 12.35*).

Таблиця 12.35

x_i	2	3	5	8	11	12	18
n_i	2	7	15	32	21	14	9

Знайти вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та середнє квадратичне відхилення вибірки.

Відповідь. $\overline{x}_в = 9{,}17$; $D_B = 15{,}5811$; $\sigma \approx 3{,}95$.

Задача 11. Задано інтервальний статистичний розподіл вибірки (*табл. 12.36*).

Таблиця 12.36

$[x_i; x_{i+1})$	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
w_i	0,15	0,05	0,2	0,1	0,05	0,25	0,2

Знайти вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та середнє квадратичне відхилення вибірки.

Відповідь. $\bar{x}_\text{в} = 8{,}8$; $D_B = 17{,}76$; $\sigma \approx 4{,}214$.

Задача 12. На одному з відрізків автостради планується створити зупинку автобуса. Розподіл населених пунктів із чисельністю їх населення наведено в таблиці (*табл. 12.37*).

Таблиця 12.37

Кілометр автостради, на якому розташований населений пункт, км	3	6	8	14	20	22	25
Чисельність населення, тис. чол.	4	3	5	6	2	3	1

На якому кілометрі автостради потрібно розташувати зупинку, щоб сумарна відстань, яку покриватимуть потенційні пасажири до цієї зупинки, була найменшою.

Відповідь. На 11-му кілометрі.

Задача 13. Задано інтервальний статистичний розподіл вибірки (*табл. 12.38*).

Таблиця 12.38

$[x_i; x_{i+1})$	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24)	[24; 28)	[28; 32)
n_i	3	6	6	10	14	5	1

.

Знайти медіану, моду, варіаційний розмах.

Відповідь. $Me = 19$; $Mo = \dfrac{276}{13} \approx 21{,}23$; $R = 28$.

Задача 14. Знайти методом добутків вибіркове середнє та вибіркову дисперсію для такого розподілу вибірки об'єму $n = 100$ (*табл. 12.39*).

Таблиця 12.39

x_i	40	45	50	55	60	65	70
n_i	12	18	20	24	14	7	5

.

Вказівка. Як хибний нуль вибрати значення четвертої варіанти: $C = x_4 = 55$.

Відповідь. $\bar{x}_\text{в} = 52{,}55$; $D_B = 65{,}7475$.

Задача 15. Знайти методом добутків вибіркове середнє та вибіркову дисперсію для такого розподілу вибірки об'єму $n = 100$ (*табл. 12.40*).

Таблиця 12.40

x_i	5	7	10	11	14	15	18	20	22	25
n_i	6	8	11	18	22	11	7	7	5	5

.

Вказівка. Розбити весь інтервал на п'ять частинних інтервалів, як хибний нуль вибрати значення середини третього інтервалу. При визначенні вибіркової дисперсії урахувати поправку Шеппарда.

Відповідь. $\bar{x}_в = 14,08$; $D_B \approx 20,06$.

Задача 16. Знайти методом сум вибіркове середнє та вибіркову дисперсію за заданим статичним розподілом вибірки об'єму $n = 100$ (*табл. 12.41*).

Таблиця 12.41

x_i	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
n_i	2	5	8	19	26	14	10	8	5	3

.

Вказівка. Як хибний нуль вибрати значення п'ятої варіанти: $C = x_5 = 70$.

Відповідь. $\bar{x}_в = 72,45$; $D_B = 194,4075$.

Питання для самоконтролю до розділу 12

1. Що називають генеральною сукупністю?
2. Що називають вибіркою об'єму n?
3. Що таке варіаційний ряд?
4. Що таке варіанти варіаційного ряду?
5. Що розуміють під частотою варіанти?
6. Що розуміють під відносною частотою варіанти?
7. Що називають статистичним розподілом частот?
8. Що називають емпіричною функцією розподілу дискретної випадкової величини X?
9. Що розуміють під полігоном частот (відносних частот)?

10. Що таке гістограма частот (відносних частот)?
11. Як обчислити вибіркове середнє значення?
12. Як обчислити вибіркову дисперсію?
13. Як обчислити середнє квадратичне відхилення?
14. Що таке мода статистичного розподілу і як її обчислити для точкового (інтервального) розподілу?
15. Що таке медіана статистичного розподілу і як її обчислити для точкового (інтервального) розподілу?
16. Що називають розмахом варіації?
17. Розкажіть суть методу добутків обчислення вибіркового середнього та вибіркової дисперсії.
18. Розкажіть суть методу сум обчислення вибіркового середнього та вибіркової дисперсії.

Тест 10

Задано вибірку:
2, 3, 7, 2, 7, 3, 3, 2, 7, 1, 5, 9, 8, 3, 1, 9, 8, 5, 7, 2.

1. Визначити об’єм вибірки:
а) 7;
б) 4;
в) 20;
г) визначити неможливо;
д) відповідь відсутня.

2. Для того, щоб задану вибірку перетворити на варіаційний ряд, потрібно:
а) виписати один раз ті варіанти, які зустрічаються у виборці;
б) нічого не змінювати;
в) записати всі варіанти у порядку зростання;
г) перетворити на варіаційний ряд задану вибірку неможливо;
д) відповідь відсутня.

3. Сума відносних частот усіх варіант дорівнює:
а) об’єму вибірки;
б) одиниці;
в) кількості різних варіант вибірки;
г) відповідь відсутня.

4. Побудувати статистичний розподіл для заданої вибірки:

Таблиця 12.42, а

а)

x_i	2	3	7	2	7	3	3	2	7	1	5	9	8	3	1	9	8	5	7	2
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

;

Таблиця 12.42, б

б)

x_i	2	3	7	1	5	9	8
ni	4	4	4	2	2	2	2

;

Таблиця 12.42, в

в)

x_i	1	2	3	5	7	8	9
n_i	2	4	4	2	4	2	2

;

г) побудувати неможливо;
д) відповідь відсутня.

5. Для заданої вибірки обчислити $F^*(7)$:
а) 4;
б) 10;
в) 14;
г) обчислити неможливо;
д) відповідь відсутня.

6. Побудувати полігон частот для заданої вибірки:

а)

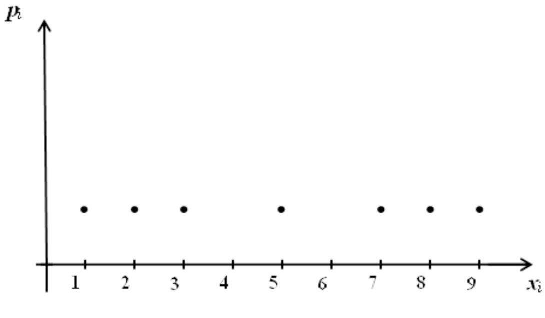
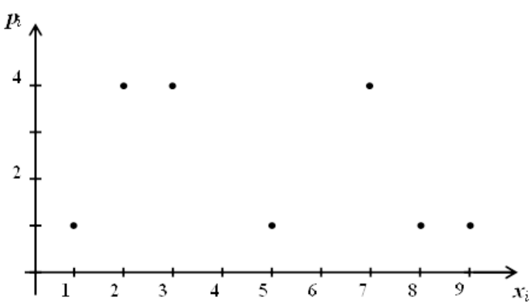


Рис. 74 (початок)

б)



в)

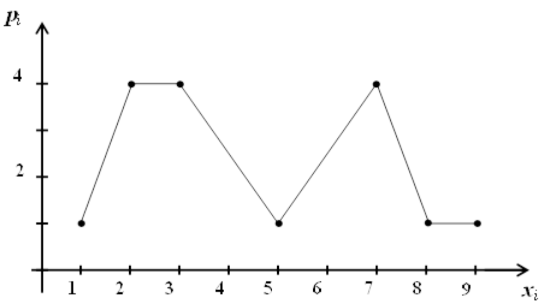


Рис. 74 (закінчення)

г) побудувати неможливо;
д) відповідь відсутня.

7. Сума площ всіх прямокутників, із яких складається гістограма частот статистичного розподілу дорівнює:
а) одиниці;
б) об'єму вибірки;
в) найбільшій частоті;
г) визначити неможливо;
д) відповідь відсутня.

8. Для заданої вибірки обчислити середнє арифметичне $\overline{x}_{в}$:
а) 5;
б) 4,7;
в) 4,5;
г) обчислити неможливо;
д) відповідь відсутня.

9. Дано розрахункову таблицю для деякої вибірки (*табл. 12.43*).

Таблиця 12.43

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \overline{x_B}$	$(x_i - \overline{x_B})^2$	$(x_i - \overline{x_B})^2 n_i$
1	2	2	–2,2	4,84	9,68
2	4	8	–1,2	1,44	5,76
3	6	18	–0,2	0,04	0,24
4	4	16	0,8	0,64	2,56
5	4	20	1,8	3,24	12,96
Σ	20	64			31,20

Обчислити $D(x)$:

а) 11,2;

б) 31,2;

в) 1,56;

г) обчислити неможливо;

д) відповідь відсутня.

10. Для вибірки, що задана в розрахунковій *таблиці 12.43* , знайти моду M_o:

а) будь-яка варіанта є модою;

б) 3;

в) 6;

г) обчислити неможливо;

д) відповідь відсутня.

Розділ 13. Статистичні оцінки параметрів розподілу

13.1. Статистичні оцінки параметрів розподілу ймовірності

Нехай X — випадкова величина з множиною значень Ω_X, $\Omega_X^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \in \Omega_X, \forall k \in \overline{1,n} \right\}$, $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k, k = 1, 2, \ldots, n$, тобто для кожного k випадкова величина X_k визначена на Ω_X^* та набуває значення x_k, що є значенням випадкової величини X у k-му випробуванні (серед n послідовних незалежних випробувань).

Статистичною оцінкою параметра θ розподілу ймовірностей на множині значень X називають випадкову величину $\theta^* = \theta^*(X_1, X_2, \ldots X_n)$.

Якщо проведено n послідовних незалежних випробувань, у яких спостерігалися значення $x_{\text{сп}\,1}$, $x_{\text{сп}\,2}$, …, $x_{\text{сп}\,n}$ випадкової величини X, то $\theta_0^* = \theta^*(x_{\text{сп}\,1}, x_{\text{сп}\,2}, \ldots, x_{\text{сп}\,n})$ є спостережуваним значенням статистичної функції θ^*.

Статистична оцінка θ^* параметра θ називається *незміщеною*, якщо $M[\theta^*] = \theta$, тобто математичне сподівання випадкової величини θ^* дорівнює оцінюваному параметру θ для будь-якого об'єму n вибірки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В іншому разі статистична оцінка θ^* називається *зміщеною*.

Незміщеною оцінкою математичного сподівання $M(X)$ випадкової величини X (*або незміщеною оцінкою генерального середнього*) називають випадкову величину

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots. + X_n}{n}, \tag{78}$$

значеннями якої від $(x_{\text{сп.}1}, x_{\text{сп.}2}, \ldots, x_{\text{сп.}n})$ є вибіркові середні

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{x_{\text{сп.}1} + x_{\text{сп.}2} + \ldots + x_{\text{сп.}n}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \tag{79}$$

де x_i — варіанта відповідної вибірки, n_i — частота варіанти x_i, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — об'єм вибірки.

Зміщеною оцінкою генеральної дисперсії $D(X)$ (тобто дисперсії випадкової величини X) називають випадкову величину

$$\bar{D}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2 ,$$

значеннями якої від $(x_{\text{сп }1}, x_{\text{сп }2}, \ldots, x_{\text{сп }n})$ є вибіркові дисперсії.

Ця оцінка зміщена, оскільки

$$M\left(\bar{D}_n\right) = \frac{n-1}{n} D(x).$$

Для обчислення вибіркової дисперсії можна скористатися формулою

$$D_{\text{в}} = \overline{x_{\text{в}}^2} - \overline{x_{\text{в}}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2}{n^2} . \qquad (80)$$

П р и м і т к а 1. Для спрощення процедури обчислення $\overline{x_{\text{в}}}$ та $\overline{D_{\text{в}}}$ іноді доцільно перейти від варіант x_i до умовних варіант $u_i = \dfrac{x_i - C}{b}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, де C — число, розміщене приблизно посередині варіаційного ряду (за умови, що воно досить велике за модулем, а в іншому разі вважають $C = 0$). Після вибору C вибирають число $b > 1$, коли $\left|x_i - C\right|$ досить великі числа для більшості номерів $i = 1, 2, \ldots, k$, $0 < b < 1$, коли $\left|x_i - C\right|$ досить малі для більшості номерів i, а в іншому разі $b = 1$.

Незміщеною оцінкою генеральної дисперсії є випадкова величина

$$\tilde{D}_n = \frac{n}{n-1}\bar{D}_n ,$$

значеннями якої є виправлені вибіркові дисперсії $s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_{\text{в}}$.

Поправку $\dfrac{n}{n-1}$ називають *поправкою Бесселя*, а число $s = \sqrt{\dfrac{n}{n-1} D_{\text{в}}}$ — *виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням.*

Приклад 1. З генеральної сукупності отримано деяку вибірку об'єму $n = 100$ (*табл. 13.1*).

Таблиця 13.1

x_i	50	80	90	110	120	140	170
n_i	12	7	6	6	15	24	30

Знайти відповідне значення незміщеної оцінки генерального середнього.

Розв'язання. Відповідне значення незміщеної оцінки генерального середнього $M(X)$ є вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}}$. Оскільки варіанти є досить великими числами, перейдемо до умовних варіант

$$u_i = \frac{x_i - 110}{10}$$

(як C ми вибрали значення четвертої варіанти $x_4 = 110$, а як b — число 10, оскільки всі варіанти кратні десяти):

$$u_1 = \frac{x_1 - 110}{10} = \frac{50 - 110}{10} = -6\,;\; u_2 = \frac{x_2 - 110}{10} = \frac{80 - 110}{10} = -3\,;$$

$$u_3 = \frac{x_3 - 110}{10} = \frac{90 - 110}{10} = -2\,;\; u_4 = \frac{x_4 - 110}{10} = \frac{110 - 110}{10} = 0\,;$$

$$u_5 = \frac{x_5 - 110}{10} = \frac{120 - 110}{10} = 1\,;\, u_6 = \frac{x_6 - 110}{10} = \frac{140 - 110}{10} = 3\,;$$

$$u_7 = \frac{x_7 - 110}{10} = \frac{170 - 110}{10} = 6\,.$$

Тепер можна легко знайти відповідне вибіркове середнє:

$$\overline{x}_{\text{в}} = b\frac{\sum_{i=1}^{7} n_i u_i}{n} + C = 10\frac{\sum_{i=1}^{7} n_i u_i}{100} + 110 =$$

$$= \frac{12\cdot(-6) + 7\cdot(-3) + 6\cdot(-2) + 6\cdot 0 + 15\cdot 1 + 24\cdot 3 + 30\cdot 6}{10} + 110 =$$

$$= \frac{-72 + (-21) + (-12) + 0 + 15 + 72 + 180}{10} + 110 = \frac{162}{10} + 110 = 126{,}2.$$

Приклад 2. З генеральної сукупності отримано деяку вибірку об'єму $n = 100$ (*табл. 13.2*).

Таблиця 13.2

x_i	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01	0,012	0,014
n_i	7	29	35	12	9	5	3

Знайти відповідне значення зміщеної оцінки генеральної дисперсії.

Розв'язання. Значення зміщеної оцінки генеральної дисперсії $D(X)$ дорівнює значенню вибіркової дисперсії D_B. Оскільки варіанти вибірки є близькими до нуля числами, перейдемо до умовних варіант

$$u_i = x_i \cdot 1000$$

(як b вибрано число 1000, оскільки в такому разі варіанти стають цілими числами):

$$u_1 = x_1 \cdot 1000 = 0{,}002 \cdot 1000 = 2;$$
$$u_2 = x_2 \cdot 1000 = 0{,}004 \cdot 1000 = 4;$$
$$u_3 = x_3 \cdot 1000 = 0{,}006 \cdot 1000 = 6;$$
$$u_4 = x_4 \cdot 1000 = 0{,}008 \cdot 1000 = 8;$$
$$u_5 = x_5 \cdot 1000 = 0{,}01 \cdot 1000 = 10;$$
$$u_6 = x_6 \cdot 1000 = 0{,}012 \cdot 1000 = 12;$$
$$u_7 = x_7 \cdot 1000 = 0{,}014 \cdot 1000 = 14.$$

Тепер можна легко знайти відповідну вибіркову дисперсію:

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i u_i^2}{b^2 n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{7} n_i u_i\right)^2}{(bn)^2} =$$

$$= \frac{7 \cdot 2^2 + 29 \cdot 4^2 + 35 \cdot 6^2 + 12 \cdot 8^2 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 12^2 + 3 \cdot 14^2}{1000^2 \cdot 100} -$$

$$-\left[\frac{7 \cdot 2 + 29 \cdot 4 + 35 \cdot 6 + 12 \cdot 8 + 9 \cdot 10 + 5 \cdot 12 + 3 \cdot 14}{1000 \cdot 100}\right]^2 =$$

$$= \frac{28 + 232 + 1260 + 768 + 900 + 720 + 588}{100000000} -$$

$$-\left[\frac{14 + 116 + 210 + 96 + 90 + 60 + 42}{100000}\right]^2 = 4496 \cdot 10^{-8} -$$

$$-394384 \cdot 10^{-10} = 5{,}5216 \cdot 10^{-6}$$

Приклад 3. За даними вибірки об'єму n = 21 знайдено вибіркову дисперсію $D_B = 5$.

Знайти відповідне значення незміщеної оцінки генеральної дисперсії.

Розв'язання. Значенням незміщеної оцінки генеральної дисперсії є виправлена дисперсія:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{21}{21-1} \cdot 5 = 5{,}25 .$$

Приклад 4. У результаті статистичних досліджень випадкової величини X отримано таку вибірку: 47, 45, 46, 46, 45, 47, 44, 46, 45, 45, 46, 46, 44, 46, 48, 46, 46, 45, 46, 44, 46, 45, 47, 46, 46, 47, 46, 46, 48, 44, 46, 45, 46, 45, 46, 44, 47, 46, 46, 45, 47, 48, 44, 46, 46, 45, 46, 47, 45.

Знайти відповідне значення незміщеної оцінки генерального середнього та генеральної дисперсії.

Розв'язання. Знайдемо об'єм вибірки: n = 50. Побудуємо статистичний розподіл вибірки (*табл. 13.3*).

Таблиця 13.3

x_i	44	45	46	47	48
n_i	6	11	23	7	3

Контроль: $n = 6 + 11 + 23 + 7 +3 = 50$.

Значенням незміщеної оцінки генерального середнього є вибіркове середнє, обчислене за допомогою умовних варіант $u_i = x_i$-46:

$$\overline{x}_{\text{в}} = 46 + \frac{-2 \cdot 6 + (-1) \cdot 11 + 0 \cdot 23 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 3}{50} = 46 - \frac{10}{50} = 45{,}8 .$$

Щоб знайти значення незміщеної оцінки генеральної дисперсії — виправлену вибіркову дисперсію (*рис. 75*), — визначимо вибіркову дисперсію й помножимо її на поправку Бесселя:

$$D_{\text{в}} = \frac{(-2)^2 \cdot 6 + (-1)^2 \cdot 11 + 0^2 \cdot 23 + 1^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 3}{50} -$$

$$-\left[\frac{-2 \cdot 6 + (-1) \cdot 11 + 0 \cdot 23 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 3}{50}\right]^2 = \frac{54}{50} - \left[\frac{-10}{50}\right]^2 = 1{,}04;$$

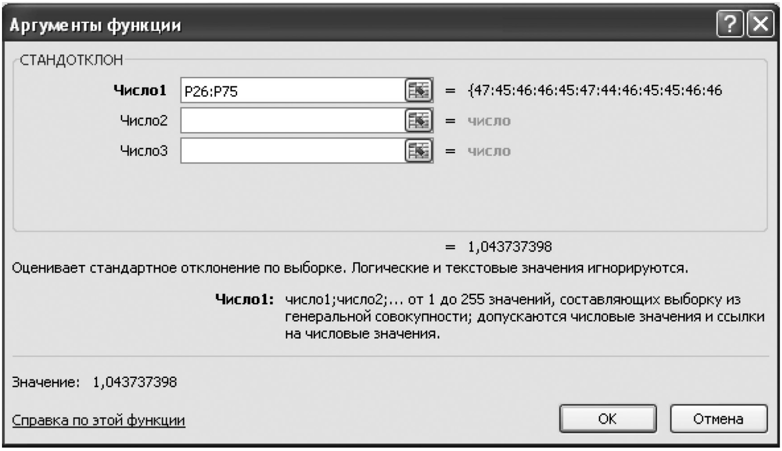


Рис. 75. MS Excel. Вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{50}{49} \cdot 1{,}04 = \frac{52}{49} \approx 1{,}06.$$

Отже, значеннями незміщених оцінок генерального середнього та генеральної дисперсії є числа:

$$\overline{x}_{\text{в}} = 45{,}8;\ s^2 \approx 1{,}06.$$

13.2. Метод моментів

Методом моментів знаходження *точкових оцінок* (певних значень статистичних оцінок) невідомих параметрів називають метод, при якому для наближеного обчислення невідомих параметрів заданого розподілу прирівнюють відповідні теоретичні та емпіричні моменти.

Якщо розподіл визначається одним параметром — математичним сподіванням, то точковою оцінкою цього математичного сподівання є вибіркове середнє:

$$M(X) = \overline{x}_{\text{в}}. \tag{81}$$

Якщо розподіл визначається двома параметрами — математичним сподіванням та дисперсією, то їх точковими оцінками є відповідно вибіркове середнє та вибіркова дисперсія:

$$\begin{cases} M(X) = \overline{x}_{\text{в}}; \\ D(X) = D_{\text{в}}. \end{cases}$$

Приклад 1. Випадкова величина X (кількість бракованих деталей у партії товару) розподілена за законом Пуассона з параметром λ. У результаті статистичних досліджень отримано статистичний розподіл кількості бракованих деталей у n = 1000 партіях товару (*табл. 13.4*).

Таблиця 13.4

Кількість бракованих деталей	0	1	2	3	4	5	6
Кількість партій товару	505	284	131	63	12	3	2

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомого параметра λ розподілу Пуассона.

Розв'язання. Оскільки розподіл Пуассона залежить лише від одного параметра λ, що дорівнює відповідному математичному сподіванню, то вибіркове середнє

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{0 \cdot 505 + 1 \cdot 284 + 2 \cdot 131 + 3 \cdot 63 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{1000} = 0,81 ,$$

тобто

$$\lambda^{*} = 0,81.$$

Приклад 2. Випадкова величина X (зріст дорослої людини) розподілена за нормальним розподілом з параметрами a, σ. У результаті статистичних досліджень отримано статистичний розподіл зросту дорослих людей для n = 1000 осіб (*табл. 13.5*).

Таблиця 13.5

Зріст, см	Кількість осіб
(145; 155]	24
(155; 165]	112
(165; 175]	263
(175; 185]	322
(185; 195]	202
(195; 205]	66
(205; 215]	11

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомих параметрів *a* і σ нормального розподілу.

Розв'язання. Перетворимо інтервальний статистичний розподіл на точковий, вибравши у якості варіант середини частинних інтервалів (*табл. 13.6*).

Таблиця 13.6

Зріст, см	150	160	170	180	190	200	210
Кількість осіб	24	112	263	322	202	66	11

Оскільки нормальний закон розподілу залежить від двох параметрів *a* і σ, причому $a = M(X)$, а $\sigma^2 = D(X)$, то точковими оцінками цих параметрів є відповідно вибіркове середнє та вибіркова дисперсія.

Перейдемо до умовних варіант

$$u_i = \frac{x_i - 180}{10}$$

(x_i — зріст людини):

$$u_1 = \frac{150-180}{10} = -3; \qquad u_2 = \frac{160-180}{10} = -2;$$

$$u_3 = \frac{170-180}{10} = -1; \qquad u_4 = \frac{180-180}{10} = 0;$$

$$u_5 = \frac{190-180}{10} = 1; \qquad u_6 = \frac{200-180}{10} = 2;$$

$$u_7 = \frac{210-180}{10} = 3.$$

Знайдемо вибіркове середнє та вибіркову дисперсію:

$$\overline{u}_в = \frac{-3\cdot 24 - 2\cdot 112 - 1\cdot 263 + 0\cdot 322 + 1\cdot 202 + 2\cdot 66 + 3\cdot 11}{1000} = -0{,}192;$$

$$\overline{x}_в = 10\cdot \overline{u}_в + 180 = 178{,}08;$$

$$D_в = 10^2\cdot([(-3)^2\cdot 24 + (-2)^2\cdot 112 + (-1)^2\cdot 263 + 0^2\cdot 322 + 1^2\cdot 202 +$$
$$+2^2\cdot 66 + 3^2\cdot 11]/1000 - [-0{,}192]^2) = 145{,}5136.$$

Таким чином,

$$a^* = \overline{x}_в = 178{,}08; \ \sigma^* = \sqrt{D_в} = \sqrt{145{,}5136} \approx 12{,}0629.$$

13.3. Метод найбільшої правдоподібності

Метод найбільшої (максимальної) правдоподібності полягає в знаходженні максимуму функції одного або кількох оцінюваних параметрів.

Припустимо, що X — дискретна випадкова величина з відомим типом закону розподілу, однак невідомим є параметр θ, який визначає цей закон розподілу. За даними вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отриманої в результаті спостережень над випадковою величиною X, необхідно знайти точкову оцінку $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра θ.

Функцією правдоподібності дискретної випадкової величини називають функцію аргументу θ

$$L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = p\,(x_1; \theta)\cdot p\,(x_2; \theta)\cdot \ldots \cdot p\,(x_n; \theta), \qquad (82)$$

де $p\,(x_i; \theta)$ — імовірність (згідно з типом розподілу) того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення x_i.

Оцінкою найбільшої або максимальної правдоподібності параметра θ називають таке його значення θ*, при якому функція правдоподібності досягає свого максимуму.

Логарифмічною функцією правдоподібності називають функцію $\ln L$.

Оскільки функції L і $\ln L$ досягають свого максимуму при одному й тому самому значені аргументу θ, здебільшого зручніше знаходити максимум функції $\ln L$, а не L.

Якщо випадкова величина X абсолютно неперервна, то відомим вважається тип щільності розподілу ймовірностей $f(x)$, а невідомим — параметри, від яких залежить така щільність.

Функцією правдоподібності абсолютно неперервної випадкової величини називають функцію аргументу θ

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta).$$

Оцінку найбільшої правдоподібності невідомого параметра розподілу неперервної випадкової величини шукають так само, як і в разі дискретної випадкової величини, а саме:

1) визначають похідну $\dfrac{d\ln L}{d\theta}$ (або $\dfrac{dL}{d\theta}$);

2) знаходять корені θ_i^* рівняння $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = 0$ (або $\dfrac{dL}{d\theta} = 0$). Такі рівняння називають *рівняннями правдоподібності*;

3) визначають другу похідну $\dfrac{d^2\ln L}{d\theta^2}$ (або $\dfrac{d^2 L}{d\theta^2}$). Корінь θ* рівняння правдоподібності, для якого друга похідна від'ємна, приймають як оцінку θ* найбільшої правдоподібності параметра θ.

Якщо параметр θ двовимірний, тобто $\theta = \theta_1, \theta_2$), то для відшукання максимуму функції правдоподібності складають і розв'язують систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0; \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases} \qquad (83)$$

та застосовують достатні умови екстремуму.

Приклад 1. Випадкова величина X (кількість розбитого скляного посуду в одній упаковці) розподілена за законом Пуассона з невідомим параметром λ. У результаті статистичних досліджень отримано емпіричний розподіл кількості розбитого скляного посуду в $n = 1000$ упаковках (*табл. 13.7*).

Таблиця 13.7

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	554	324	98	19	3	1	1

Знайти методом найбільшої правдоподібності точкову оцінку невідомого параметра λ розподілу Пуассона.

Розв'язання. Оскільки випадкова величина X розподілена за законом Пуассона, то функція правдоподібності має вигляд

$$L = \left(\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}\right)^{554} \left(\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}\right)^{324} \left(\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}\right)^{98} \left(\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}\right)^{19} \left(\frac{\lambda^4 e^{-\lambda}}{4!}\right)^{3} \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda^5 e^{-\lambda}}{5!}\right)^{1} \left(\frac{\lambda^6 e^{-\lambda}}{6!}\right)^{1} = \frac{\lambda^{600} e^{-1000\lambda}}{2^{133} \cdot 3^{25} \cdot 5^2}.$$

Запишемо логарифмічну функцію правдоподібності:

$$\ln L = 600 \ln \lambda - 1000\lambda - \ln(2^{133} \cdot 3^{25} \cdot 5^2).$$

Визначимо похідну логарифмічної функції розподілу за змінною λ:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{600}{\lambda} - 1000.$$

Прирівнявши її до нуля, знайдемо корінь рівняння правдоподібності:

$$\lambda^* = 0,6\,.$$

Оскільки друга похідна логарифмічної функції правдоподібності

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{600}{\lambda^2} < 0$$

завжди від'ємна, точковою оцінкою максимальної правдоподібності параметра λ розподілу Пуассона буде

$$\lambda^* = 0,6\,.$$

Приклад 2. Випадкова величина X (довжина деталі) розподілена за нормальним законом з невідомими параметрами a та σ. У результаті статистичних досліджень отримано емпіричний розподіл довжини n = 1000 деталей (*табл. 13.8*).

Таблиця 13.8

Довжина деталі, см	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7
Кількість деталей	7	78	289	392	195	36	3

Знайти методом найбільшої правдоподібності точкову оцінку невідомих параметрів a та σ нормального розподілу.

Розв'язання. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Запишемо функцію правдоподібності:

$$L = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5,1-a)^2}{2\sigma^2}}\right)^7 \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5,2-a)^2}{2\sigma^2}}\right)^{78} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5,3-a)^2}{2\sigma^2}}\right)^{289} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5,4-a)^2}{2\sigma^2}}\right)^{392} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5,5-a)^2}{2\sigma^2}}\right)^{195} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5,6-a)^2}{2\sigma^2}}\right)^{36} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5,7-a)^2}{2\sigma^2}}\right)^{3} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{1000} \times$$

$$\times \exp\{[-7 \cdot (5,1-a)^2 + 78 \cdot (5,2-a)^2 + 289 \cdot (5,3-a)^2 +$$

$$+392 \cdot (5,4-a)^2 + 195 \cdot (5,5-a)^2 + 36 \cdot (5,6-a)^2 +$$

$$+78 \cdot (5,2-a)^2] / [2\sigma^2] = (2\pi\sigma^2)^{-500} \cdot e^{-\frac{1000a^2 - 10762a + 28965,1}{2\sigma^2}}.$$

Запишемо логарифмічну функцію правдоподібності:

$$\ln L = -500 \ \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1000a^2 - 10762a + 28965,1}{2\sigma^2}.$$

Визначимо частинні похідні логарифмічної функції розподілу за a і σ^2:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = -\frac{2000a - 10762}{2\sigma^2};$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\left(\frac{500}{\sigma^2} + \frac{1000a^2 - 10762a + 28965,1}{2\sigma^4}\right) 2\sigma.$$

Прирівнявши їх до нуля, знайдемо розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} -\dfrac{2000a - 10762}{2\sigma^2} = 0; \\ -\dfrac{500}{\sigma^2} + \dfrac{1000a^2 - 10762a + 28965,1}{2\sigma^4} = 0. \end{cases}$$

Розв'язком буде:

$$a = 5{,}381;\ \sigma^2 = 0{,}009939.$$

За достатніми умовами екстремуму переконуємось, що точковими оцінками максимальної правдоподібності параметрів a та σ нормального розподілу є

$$a^* = 5{,}381;\ \sigma^* = \sqrt{0{,}009939} \approx 0{,}1.$$

13.4. Інтервальні оцінки

Інтервальною називають оцінку, яка визначається числовим інтервалом.

Довірчим називають інтервал $(\theta_1,\ \theta_2)$, у який із заданою надійністю α (ймовірністю, близькою до одиниці) потрапляє оцінюваний параметр θ:

$$P\,(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \alpha,\ \alpha \approx 1.$$

1. *Інтервальною оцінкою з надійністю* α *математичного сподівання а нормально розподіленої випадкової величини X за вибірковим середнім* $\bar{x}_в$ *при відомому середньому квадратичному відхиленні* σ називають довірчий інтервал, що визначається нерівностями

$$\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{84}$$

де $t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ — точність оцінки; t — значення аргументу функції Лапласа $\Phi\,(t)$ (**д о д а т о к 1**), при якому $\mathbf{\Phi(t)} = \dfrac{\alpha}{2}$; n — об'єм вибірки.

При невідомому σ довірчий інтервал для a визначається нерівностями

$$\bar{x}_в - t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{85}$$

де t_α знаходять за таблицею **д о д а т к у 4** відповідно заданим n і α; s — «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення.

2. *Інтервальною оцінкою з надійністю* α *середнього квадратичного відхилення* σ *нормально розподіленої випадкової величини X за «виправленим»* *вибірковим середнім квадратичним відхиленням s* називають довірчий інтервал, що визначається нерівностями

$$s\,(1-q) < \sigma < s\,(1+q) \text{ при } q < 1;$$

$$0 < \sigma < s\,(1+q) \text{ при } q > 1, \qquad (86)$$

де q знаходять за таблицею **д о д а т к у 5** відповідно заданим n і α.

3. *Інтервальною оцінкою з надійністю* α *невідомої ймовірності* $p = P\,(A)$ *біноміального розподілу за відносною частотою* $w = P_n^*(A)$ називають довірчий інтервал

$$p_1 < p < p_2,$$

де

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left(w + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right);$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left(w + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right);$$

n — загальна кількість випробувань; t — значення аргументу функції Лапласа $\Phi\,(t)$ (**д о д а т о к 1**), при якому $\Phi(t) = \frac{\alpha}{2}$; $w = \frac{m}{n} = P_n^*(A)$ — відносна частота події A для проведених n незалежних випробувань.

П р и м і т к а. При досить великих значеннях n за межі довірчого інтервалу можна прийняти такі значення:

$$p_1 = w - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\,;\; p_2 = w + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\,.$$

Приклад 1. Знайти довірчий інтервал з надійністю 0,95 для оцінки невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини X, якщо дисперсія цієї випадкової величини $\sigma^2 = 16$, вибіркове середнє $\overline{x}_в = 15$, а об'єм вибірки $n = 25$.

Розв'язання. Шуканий довірчий інтервал визначається нерівностями

$$\overline{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Обчислимо значення t і σ. Із співвідношення

$$\Phi(t) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$$

за таблицею значень функції Лапласа $\Phi(t)$ (**додаток** 1) знаходимо:

$$t = 1,96.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Підставивши одержані значення до подвійної нерівності, маємо:

$$15 - 1,96\cdot\frac{4}{\sqrt{25}} < a < 15 + 1,96\cdot\frac{4}{\sqrt{25}},$$

тобто шуканий довірчий інтервал визначається нерівностями

$$13,432 < a < 16,568.$$

Приклад 2. З конвеєра надходять електричні лампи. Яким має бути мінімальний розмір партії електроламп для того, щоб з надійністю 0,99 точність оцінки математичного сподівання a випадкової величини X, що характеризує тривалість горіння лампи, за вибірковим середнім становила $\varepsilon = 1$ год, якщо відомо середнє квадратичне відхилення випадкової величини X: $\sigma = 3$ год? Вважається, що випадкова величина X має нормальний закон розподілу.

Розв'язання. Оскільки довірчий інтервал для математичного сподівання a випадкової величини X визначається нерівностями

$$\overline{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

то точність ε оцінки визначається так:

$$\varepsilon = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot$$

Звідси отримуємо формулу для обчислення мінімального об’єму вибірки, який забезпечує задану точність оцінювання:

$$n = \min\left\{n : n > t^2\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right\}.$$

Знайдемо t із співвідношення

$$\Phi(t) = \frac{0,99}{2} = 0,495.$$

Використовуючи таблицю значень функції Лапласа Φ (t) (**д о д а т о к 1**):

$$t = 2,58.$$

Отже, мінімальний об’єм вибірки

$$n = \min\left\{n : n > 2,58^2\frac{3^2}{1^2} = 23,22\right\} = 24\cdot$$

Приклад 3. У результаті статистичних досліджень випадкової величини X отримано вибірку об’єму n = 25 із статистичним розподілом (*табл. 13.9*).

Таблиця 13.9

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	1	3	4	6	5	4	2

Знайти з надійністю α = 0,99 інтервальну оцінку математичного сподівання a випадкової величини X за вибірковим середнім. Вважається, що випадкова величина X нормально розподілена.

Розв’язання. Перш ніж визначити довірчий інтервал для математичного сподівання a випадкової величини X за нерівностями

$$\overline{x}_в - t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}$$

необхідно визначити вибіркове середнє $\overline{x}_в$, «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення s і t_α (використовуючи таблиці значень функції t_α, які розміщені в **д о д а т к у 4**).

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i}{n} = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 5 + 5\cdot 4 + 6\cdot 2}{25} = 3,24;$$

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2}{n} - \left[\overline{x}_{\text{в}}\right]^2\right)} =$$

$$= \left[\frac{25}{25-1}\left(\frac{0^2\cdot 1 + 1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 4 + 3^2\cdot 6 + 4^2\cdot 5 + 5^2\cdot 4 + 6^2\cdot 2}{25} - 3,24^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{24}\cdot 2,5024} \approx 1,6145;$$

$$t_\alpha = t_\alpha(n, \alpha) = t_{0,99}(25; 0,99) = 2,797.$$

Таким чином,

$$3,24 - 2,797\cdot\frac{1,6145}{25} < a < 3,24 + 2,797\cdot\frac{1,6145}{25},$$

тобто шуканий довірчий інтервал визначається нерівностями

$$2,337 < a < 4,143.$$

Приклад 4. За даними вибірки об'єму $n = 20$ визначено «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 2$ нормально розподіленої випадкової величини X.

Знайти довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ випадкової величини X з надійністю $\alpha = 0,95$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо значення функції $q(\alpha, n)$ з таблиці, що розміщена у **додатку 5**:

$$q = q(\alpha, n) = q(0,95; 20) = 0,37.$$

Оскільки $q < 1$, довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ випадкової величини X з надійністю $\alpha = 0,95$ визначається нерівностями

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q),$$

тобто

$$1,26 < \sigma < 2,74.$$

Приклад 5. У результаті статистичних досліджень випадкової величини X отримано вибірку об'єму n = 15 із статистичним розподілом (*табл. 13.10*).

Таблиця 13.10

x_i	1	2	3	4	5
n_i	1	4	6	3	1

Знайти з надійністю α = 0,99 інтервальну оцінку середнього квадратичного відхилення σ випадкової величини X. Вважається, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом.

Розв'язання. Спочатку знайдемо значення функції q (α, n) і обчислимо «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення s:

$$q = q(\alpha, n) = q(0,999; 15) = 1,15;$$

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x^2{}_i}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} n_i x_i\right)^2}{n^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{15}{14}\left(\frac{144}{15} - \frac{44^2}{15^2}\right)} = \sqrt{\frac{16}{15}} \approx 1,0328.$$

Оскільки q > 1, то довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ випадкової величини X з надійністю α = 0,999 визначається нерівностями

$$0 < \sigma < s\,(1 + q),$$

тобто

$$0 < \sigma < 2,22.$$

Приклад 6. Проводяться незалежні випробування з однаковою, але невідомою ймовірністю p успіху.

Знайти довірчий інтервал для оцінки ймовірності p з надійністю σ = 0,99, якщо з 50 випробувань успішними були 12.

Розв'язання. Для того, щоб знайти довірчий інтервал для оцінки ймовірності p, необхідно визначити межі цього інтервалу за формулами

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left(w+\frac{t^2}{2n}-t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right);$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left(w+\frac{t^2}{2n}+t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right).$$

Знайдемо значення t із співвідношення

$$\Phi(t) = \frac{\alpha}{2} = 0,495,$$

скориставшись таблицею значень функції Лапласа $\Phi(t)$, що розміщена у **д о д а т к у 1**, t:

$$t = 2,58;$$

Відносна частота $w = \frac{12}{50} = 0,24$.

Об'єм вибірки $n = 50$. Використавши значення t, w, n, визначимо кінці довірчого інтервалу:

$$p_1 = \frac{50}{2,58^2+50}\left[0,24+\frac{2,58^2}{2\cdot 50}-2,58\sqrt{\frac{0,24(1-0,24)}{50}+\left(\frac{2,58}{2\cdot 50}\right)^2}\right] \approx 0,12;$$

$$p_2 = \frac{50}{2,58^2+50}\left[0,24+\frac{2,58^2}{2\cdot 50}+2,58\sqrt{\frac{0,24(1-0,24)}{50}+\left(\frac{2,58}{2\cdot 50}\right)^2}\right] \approx 0,42.$$

Отже, шуканий довірчий інтервал визначається нерівностями:

$$0,12 < p < 0,42.$$

Приклад 7. Після того, як киплячу воду розлили у склянки, із 1000 склянок виявилися пошкодженими 24.

Знайти з надійністю $\alpha = 0,95$ інтервальну оцінку ймовірності пошкодження склянки при заливанні киплячої води.

Розв'язання. Визначимо відносну частоту пошкодження склянки:

$$w = \frac{24}{1000} = 0,024\,.$$

Знайдемо значення t із співвідношення

$$\Phi(t) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475\,,$$

скориставшись таблицею значень функції Лапласа $\Phi(t)$ (**д о д а т о к 1**):

$$t = 1,96.$$

Ураховуючи, що об'єм вибірки досить великий ($n = 1000$), для обчислення значень кінців довірчого інтервалу оцінки ймовірності пошкодження склянки використаємо формули:

$$p_1 = w - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} = 0,024 - 1,96\sqrt{\frac{0,024(1-0,024)}{1000}} \approx 0,0145;$$

$$p_2 = w + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} = 0,024 + 1,96\sqrt{\frac{0,024(1-0,024)}{1000}} \approx 0,0335.$$

Отже, шуканий довірчий інтервал такий:

$$0,0145 < p < 0,0335.$$

Задачі до розділу 13

Задача 1. Із генеральної сукупності отримано вибірку (*табл. 13.11*).

Таблиця 13.11

x_i	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
n_i	15	10	9	4	12	21	29

Знайти значення незміщеної оцінки генерального середнього.
В к а з і в к а. Перейдіть до умовних варіант $u_i = 100x_i - 6$.
Відповідь. $\overline{x}_в = 0,067\,.$

Задача 2. Із генеральної сукупності отримано вибірку (*табл. 13.12*).

Таблиця 13.12

x_i	260	300	340	380	420	460	500
n_i	8	30	36	11	8	4	3

Знайти значення незміщеної оцінки генеральної дисперсії.

В к а з і в к а. Перейдіть до умовних варіант $u_i = \dfrac{x_i - 380}{40}$.
Відповідь. $D_B = 3020$.

Задача 3. За даними вибірки об'єму $n = 51$ знайдено вибіркову дисперсію $D_B = 15$.

Знайти значення незміщеної оцінки генеральної дисперсії.
Відповідь. $s^2 = 15{,}3$.

Задача 4. У результаті статистичних досліджень випадкової величини X отримано вибірку: 0,01; 0,03; 0,02; 0,02; 0,03; 0,04; 0,01; 0,05; 0,04; 0,03; 0,03; 0,03; 0,02; 0,03; 0,01; 0,04; 0,03; 0,02; 0,05; 0,03; 0,03; 0,04; 0,02; 0,01; 0,03; 0,02; 0,03; 0,04; 0,02; 0,01; 0,03; 0,03; 0,03; 0,05; 0,04; 0,02; 0,02; 0,03; 0,03; 0,05; 0,03; 0,02; 0,03; 0,01; 0,03; 0,04; 0,02; 0,03; 0,03.

Знайти відповідне значення незміщених оцінок генерального середнього та генеральної дисперсії.

В к а з і в к а. Перейдіть до умовних варіант $u_i = 100x_i - 3$.

Відповідь. $\overline{x}_в = 0,282,\ s^2 = \dfrac{2869}{24500000} \approx 0,001.$

Задача 5. Випадкова величина X (кількість знайдених самородків в одного старателя за один день) розподілена за законом Пуассона з параметром λ. У результаті статистичних досліджень отримано статистичний розподіл кількості знайдених самородків (*табл. 13.13*).

Таблиця 13.13

Кількість знайдених самородків	0	1	2	3	4	5	6
Кількість старателів	369	367	183	62	15	3	1

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомого параметра λ розподілу Пуассона.

Відповідь. $\lambda^* = 1$.

Задача 6. Випадкова величина X (кількість бракованих одиниць товару) розподілена за законом Пуассона з невідомим параметром λ. У результаті статистичних досліджень отримано емпіричний розподіл кількості браку в одиницях товару (*табл. 13.14*).

Таблиця 13.14

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	82	208	261	217	136	68	28

Знайти методом найбільшої правдоподібності точкову оцінку невідомого параметра λ розподілу Пуассона.

Відповідь. $\lambda^* = 2{,}433$.

Задача 7. Випадкова величина X (маса тіла дорослої людини) розподілена за нормальним законом з параметрами a, σ. У результаті статистичних досліджень отримано статистичний розподіл маси тіла дорослих людей (*табл. 13.15*).

Таблиця 13.15

Маса тіла, кг	Кількість осіб
(45; 55]	57
(55; 65]	136
(65; 75]	223
(75; 85]	249
(85; 95]	191
(95; 105]	100
(105; 115]	36
(115; 125]	8

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомих параметрів a, σ нормального розподілу.

В к а з і в к а. Перетворити інтервальний статистичний розподіл на точковий і перейти до умовних варіант $u_i = \dfrac{x_i - 80}{10}$ (x_i — маса тіла людини).

Відповідь. $a^* = 78{,}65;\ \sigma^* \approx 15{,}18$.

Задача 8. Випадкова величина X (дальність польоту ракети) розподілена за нормальним законом із невідомими параметрами a, σ. У результаті статистичних досліджень отримано емпіричний розподіл дальності польоту ракет (*табл. 13.16*).

Таблиця 13.16

Дальність польоту, км	32	33	34	35	36	37	38
Кількість ракет	7	78	289	392	195	36	3

Знайти методом найбільшої правдоподібності точкову оцінку невідомих параметрів a, σ нормального розподілу.

Відповідь. $a^* = 35{,}34;\ \sigma^* \approx 0{,}991$.

Задача 9. Знайти довірчий інтервал з надійністю 0,999 для оцінки невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини X, якщо дисперсія випадкової величини $\sigma^2 = 25$, вибіркове середнє $\overline{x}_в = 3$, а об’єм вибірки $n = 36$.

Відповідь. $0{,}25 < a < 5{,}75$.

Задача 10. На одному й тому самому верстаті виготовляються деталі. Якою має бути мінімальна кількість деталей для того, щоб з надійністю 0,95 точність оцінки математичного сподівання a випадкової величини X, що характеризує довжину деталі, за вибірковим середнім становила $\varepsilon = 3$ мм, якщо відомо середнє квадратичне відхилення випадкової величини X: $\sigma = 5$ мм? Вважається, що випадкова величина X має нормальний закон розподілу.

Відповідь. $n = 11$.

Задача 11. У результаті статистичних досліджень випадкової величини X отримано вибірку із статистичним розподілом (*табл. 13.17*).

Таблиця 13.17

x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
n_i	2	4	8	11	11	9	5

Знайти з надійністю $\alpha = 0{,}999$ інтервальну оцінку математичного сподівання a випадкової величини X за вибірковим середнім. Вважається, що випадкова величина X нормально розподілена.

Відповідь. $-0{,}349 < a < 1{,}229$.

Задача 12. За даними вибірки об'єму $n = 25$ знайдено «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 1$ нормально розподіленої випадкової величини X.

Знайти довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ випадкової величини X з надійністю $\alpha = 0{,}99$.

Відповідь. $0{,}27 < \sigma < 1{,}73$.

Задача 13. У результаті статистичних досліджень випадкової величини X отримано вибірку із статистичним розподілом (*табл. 13.18*).

Таблиця 13.18

x_i	–1	0	1	2
n_i	1	3	4	2

Знайти з надійністю $\alpha = 0{,}99$ інтервальну оцінку середнього квадратичного відхилення σ випадкової величини X. Вважається, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом.

Відповідь. $0 < \sigma < 1{,}872$.

Задача 14. Проводяться незалежні випробування з однаковою, але невідомою ймовірністю p успіху.

Знайти довірчий інтервал для оцінки ймовірності p з надійністю $\alpha = 0{,}95$, якщо із 100 випробувань успішними були 27.

Відповідь. $0{,}193 < p < 0{,}364$.

Задача 15. Під час випробовування сталі на міцність виявилося, що із 1000 сталевих прутів не витримали випробування 57.

Знайти з надійністю $\alpha = 0,99$ інтервальну оцінку ймовірності того, що сталевий прут не пройде випробування на міцність.

Відповідь. $0,0328 < p < 0,0812$.

Питання для самоконтролю до розділу 13

1. Що розуміють під статистичною оцінкою деякого параметра?
2. Яка оцінка називається зміщеною і незміщеною?
3. Що є незміщеною оцінкою математичного сподівання?
4. Що є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії?
5. Для чого використовують поправку Бесселя?
6. Які функції програми MS Excel можна використовувати для обчислення оцінок параметрів?
7. У чому полягає суть методу моментів знаходження точкових оцінок?
8. У чому суть методу найбільшої правдоподібності?
9. Що розуміють під інтервальною оцінкою параметра?
10. Що таке довірчий інтервал?
11. Якими нерівностями визначається довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини? (Два випадки.)
12. Якими нерівностями визначається довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини?

Розділ 14. Елементи теорії регресії і кореляції

14.1. Рівняння прямої регресії. Лінійна кореляція

Нехай X і Y — випадкові величини, що спостерігаються. *Вибірковим рівнянням прямої регресії* Y на X (X на Y) називають рівняння

$$y - \overline{y} = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \qquad \left(x - \overline{x} = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y})\right), \tag{87}$$

де $\overline{x}$ і $\overline{y}$ — вибіркові середні випадкових величин X і Y відповідно; σ_x і σ_y — вибіркові середні квадратичні відхилення; r_{xy} — вибірковий коефіцієнт кореляції. При цьому

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}x_i y_i - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x\sigma_y}, \; |r_{xy}| \le 1, \tag{88}$$

де w_{ij} — емпірична ймовірність появи значення (x_i, y_j); n — кількість спостережуваних варіант випадкової величини X; m — кількість спостережуваних варіант випадкової величини Y.

Чим ближчий $|r_{xy}|$ до 1, тим більш лінійно корельованими є випадкові величини. Якщо $r_{xy} = 0$, то X і Y називають некорельованими. Якщо $|r_{xy}| = 1$, то рівняння регресії X на Y та Y на X та відповідні прямі співпадають. Зокрема, це так коли залежність між X та Y є лінійною.

Якщо дані спостереження над випадковими величинами X і Y задані кореляційною таблицею з рівновіддаленими варіантами, доцільно перейти до умовних варіант:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}; \; v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де C_1 — «хибний нуль» варіант випадкової величини X; h_1 — крок варіант випадкової величини X ($h_1 = x_{i+1} - x_i$)); C_2 — «хибний нуль» варіант випадкової величини Y; h_2 — крок варіант випадкової величини Y ($h_2 = y_{j+1} - y_j$).

У такому разі вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}u_i v_i - \overline{u}\cdot\overline{v}}{\sigma_u\sigma_v} = r_{u,v}.$$

Величини $\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u, σ_v знаходять за формулами

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i; \qquad w_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}; \qquad \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \overline{u}^2};$$

$$\overline{v} = \sum_{j=1}^{m} w_j v_j; \qquad w_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}; \qquad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - \overline{v}^2},$$

а при великій кількості даних — методом добутків.

Знаючи ці значення, можна перейти назад до величин, які входять до рівняння регресії, за допомогою формул

$$\overline{x} = \overline{u}h_1 + C_1; \quad \sigma_x = \sigma_u h_1;$$

$$\overline{y} = \overline{v}h_2 + C_2; \quad \sigma_y = \sigma_v h_2.$$

Приклад 1. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії Y на X та X на Y за даними кореляційної таблиці (*табл. 14.1*).

Таблиця 14.1

X	Y					n_x
	12	15	18	21	24	
45	8	12	–	–	–	20
55	1	9	11	–	–	21
65	–	3	15	14	–	32
75	–	–	4	10	8	22
85	–	–	–	1	4	5
n_y	9	24	30	25	12	$n = 100$

Розв'язання. Перетворимо кореляційну таблицю:

- уведемо умовні варіанти $u_i = \dfrac{x_i - 65}{10}$, $v_j = \dfrac{y_j - 18}{3}$;
- усі частоти замінимо емпіричними ймовірностями.

Отже, отримаємо таблицю (*табл. 14.2*).

Таблиця 14.2

U	V					w_u
	–2	–1	0	1	2	
–2	0,08	0,12	–	–	–	0,2
–1	0,01	0,09	0,11	–	–	0,21
0	–	0,03	0,15	0,14	–	0,32
1	–	–	0,04	0,1	0,08	0,22
2	–	–	–	0,01	0,04	0,05
w_v	0,09	0,24	0,30	0,25	0,12	$w = 1$

Знайдемо $\overline{u}$, $\overline{v}$:

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{5} w_i u_i = 0,2 \cdot (-2) + 0,21 \cdot (-1) + 0,32 \cdot 0 + 0,22 \cdot 1 + 0,05 \cdot 2 = -0,29;$$

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{5} w_i v_i = 0,09 \cdot (-2) + 0,24 \cdot (-1) + 0,3 \cdot 0 + 0,25 \cdot 1 + 0,12 \cdot 2 = 0,07.$$

Визначимо $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2} = \sum_{i=1}^{5} w_i u_i^2 = 0,2 \cdot (-2)^2 + 0,21 \cdot (-1)^2 + 0,32 \cdot 0^2 + 0,22 \cdot 1^2 + +0,05 \cdot 2^2 = 1,43;$$

$$\overline{v^2} = \sum_{i=1}^{5} w_i v_i^2 = 0,09 \cdot (-2)^2 + 0,24 \cdot (-1)^2 + 0,3 \cdot 0^2 + 0,25 \cdot 1^2 + +0,12 \cdot 2^2 = 1,33.$$

Знайдемо σ_u, σ_v:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \overline{u}^2} = \sqrt{1,43 - (-0,29)^2} \approx 1,16;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - \overline{v}^2} = \sqrt{1,33 - 0,07^2} \approx 1,15.$$

Визначимо $\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} w_{ij} u_i v_j$:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} w_{ij}u_i v_j = 0,08\cdot(-2)\cdot(-2)+0,12\cdot(-2)\cdot(-1)+0,01\cdot(-1)\cdot(-2)+$$
$$+0,09\cdot(-1)\cdot(-1)+0,11\cdot(-1)\cdot 0+0,03\cdot 0\cdot(-1)+$$
$$+0,15\cdot 0\cdot 0+0,14\cdot 0\cdot 1+0,04\cdot 1\cdot 0+0,1\cdot 1\cdot +0,08\cdot 1\cdot 2+$$
$$+0,01\cdot 2\cdot 1+0,04\cdot 2\cdot 2=1,11\,.$$

Знайдемо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = r_{uv} = \frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} w_{ij}u_i v_i - \overline{u}\cdot\overline{v}}{\sigma_u\sigma_v} = \frac{1,11-(-0,29)\cdot 0,07}{1,16\cdot 1,15} \approx 0,85.$$

Визначимо $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$\overline{x} = \overline{u}\cdot 10+65 = -0,29\cdot 10+65 = 65,1;$$
$$\overline{y} = \overline{v}\cdot 3+18 = 0,07\cdot 3+18 = 18,21\,.$$

Обчислимо σ_x, σ_y:

$$\sigma_x = 10\cdot\sigma_u \approx 10\cdot 1,16 = 11,6;$$
$$\sigma_y = 3\cdot\sigma_v \approx 3\cdot 1,15 = 3,45.$$

Підставивши всі значення у вибіркове рівняння прямої регресії, отримаємо

$$y-18,21 = 0,85\cdot\frac{3,45}{11,6}(x-62,1),$$

звідки

$$y = 0,25x+2,56.$$

14.2. Рівняння параболічної регресії. Параболічна кореляція

Вибіркове рівняння параболічної регресії Y на *X* має вигляд

$$y = Ax^2+Bx+C. \tag{89}$$

Невідомі параметри A, B, C рівняння параболічної регресії знаходять з системи рівнянь:

$$\begin{cases} A\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i^4 + B\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i^3 + C\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} n_{x_i} \overline{y}_{x_i} x_i^2; \\ A\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i^3 + B\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i^2 + C\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{m} n_{x_i} \overline{y}_{x_i} x_i; \\ A\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i + Cn = \sum_{i=1}^{m} n_{x_i} \overline{y}_{x_i}, \end{cases} \tag{90}$$

де n_{x_i} — частота варіанти x_i; $\overline{y}_{x_i} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} n_{x_i y_j} y_j}{n_{x_i}}$ — умовне середнє; k — кількість спостережуваних варіант випадкової величини Y; $n_{x_i y_j}$ — частота варіанти $(x_i; y_j)$; n — об'єм вибірки; m — кількість спостережуваних варіант випадкової події X.

У такому випадку говорять про *параболічну кореляцію другого порядку*.

Для оцінки кореляції Y на X знаходять *вибіркове кореляційне відношення* — відношення групового вибіркового середнього квадратичного відхилення до загального вибіркового середнього квадратичного відхилення:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y},$$

де

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{D_{\text{міжгр}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} (\overline{y}_{x_i} - \overline{y})^2}{n}};$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k} n_{y_j} (\overline{y}_j - \overline{y})^2}{n}}.$$

Аналогічно визначаються рівняння параболічної регресії X на Y і η_{xy} — вибіркове кореляційне відношення X до Y.

Приклад 1. Дано кореляційну таблицю (*табл. 14.3*):

Таблиця 14.3

X	Y					n_x
	2	3	5	7	8	
12	5	–	–	2	6	13
14	1	8	–	12	3	24
17	–	6	11	10	1	28
18	–	4	15	8	–	27
20	–	–	7	1	–	8
n_y	6	18	33	33	10	$n = 100$

Знайти вибіркове рівняння параболічної регресії Y на X.

Оцінити коефіцієнт кореляції за допомогою вибіркового кореляційного відношення.

Розв'язання. Складемо розрахункову таблицю (*табл. 14.4*).

Таблиця 14.4

X	n_{x_i}	$\overline{y}_{x_i}$	$n_{x_i}x_i$	$n_{x_i}x_i^2$	$n_{x_i}x_i^3$	$n_{x_i}x_i^4$	$n_{x_i}\overline{y}_{x_i}$	$n_{x_i}\overline{y}_{x_i}x_i$	$n_{x_i}\overline{y}_{x_i}x_i^2$
12	13	5,538	156	1872	22464	269568	72	864	10368
14	24	5,583	336	4704	65856	921984	134	1876	26264
17	28	5,393	476	8092	137564	2338588	151	2567	43639
18	27	5,296	486	8748	157464	2834352	143	2574	46332
20	8	5,25	160	3200	64000	1280000	42	840	16800
Σ	100		1614	26616	447348	7644492	542	8721	143403

Підставивши числа з останнього рядка *таблиці 14.4* у систему рівнянь (89), маємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{cases} 7644492A + 447348B + 26616C = 143403; \\ 447348A + \quad 26616B + \quad 1614C = 8721; \\ 26616A + \quad 1614B + \quad 100C = 542. \end{cases}$$

Розв’язавши одержану систему рівнянь, маємо:

$$A \approx -0{,}00434;\ B \approx 0{,}08868;\ C \approx 5{,}1434,$$

тоді рівняння параболічної регресії $y = Ax^2 + Bx + \mathrm{C}$ має вигляд:

$$y = -0{,}0434x^2 + 0{,}08868x + 5{,}1434.$$

Для того щоб знайти вибіркове кореляційне відношення η_{xy}, визначимо вибіркове середнє $\overline{y}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_y і міжгрупове середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\overline{y}_x}$:

$$\overline{y} = \frac{\sum_{j=1}^{5} n_{y_j} y_j}{n} = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 18 + 5 \cdot 33 + 7 \cdot 33 + 8 \cdot 10}{100} = 5{,}42;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k} n_{y_j} y_j^2}{n} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 18 + 5^2 \cdot 33 + 7^2 \cdot 33 + 8^2 \cdot 10}{100} - 5{,}42^2} \approx 1{,}82;$$

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} (\overline{y}_{x_i} - \overline{y})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\begin{gathered}\frac{13(5{,}54 - 5{,}42)^2 + 24(5{,}58 - 5{,}42)^2}{100} + \\ + \frac{28(5{,}39 - 5{,}42)^2 + 27(5{,}3 - 5{,}42)^2 + 8(5{,}25 - 5{,}42)^2}{100}\end{gathered}} \approx 0{,}122.$$

Отже, шукане вибіркове кореляційне відношення

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{0{,}122}{1{,}82} \approx 0{,}067.$$

Задачі до розділу 14

Задача 1. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії Y на X та X на Y за даними кореляційної таблиці (*табл. 14.5*).

Таблиця 14.5

X	Y					n_x
	27	31	35	39	43	
5	–	–	–	3	5	8
7	–	–	2	8	4	14
9	–	3	18	7	–	28
11	1	6	11	3	–	21
13	10	13	6	–	–	29
n_y	11	22	37	21	9	$n = 100$

Відповідь. $y = -1{,}39x^2 + 48{,}68$.

Задача 2. Знайти вибіркове рівняння параболічної регресії Y на X та X на Y за даними кореляційної таблиці.

Оцінити силу кореляційного зв'язку за допомогою вибіркового кореляційного відношення.

Таблиця 14.6

X	Y					n_x
	12	15	17	18	20	
3	–	–	15	–	–	15
4	–	12	3	15	–	30
6	9	3	–	5	11	28
8	7	1	–	2	9	19
9	3	–	–	–	5	8
n_y	19	16	18	22	25	$n = 100$

Відповідь. $y = 0{,}05x^2 - 0{,}62x + 18{,}39$; $\eta_{xy} \approx 0{,}0632$.

Питання для самоконтролю до розділу 14

1. Що розуміють під прямою регресією? Вигляд рівняння.
2. Як обчислити коефіцієнт кореляції?
3. Який вигляд має рівняння параболічної регресії?
4. Що розуміють під параболічною кореляцією?
5. Що таке вибіркове кореляційне відношення?

Розділ 15. Статистична перевірка статистичних гіпотез

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про невідомі параметри відомих розподілів.

Нульовою (основною) гіпотезою H_0 називають висунуту гіпотезу.

Альтернативною (конкуруючою) гіпотезою H_0 називають протилежну до нульової гіпотезу.

Похибка першого роду полягає у відхиленні правильної нульової гіпотези внаслідок її перевірки.

Рівень значущості α — це ймовірність похибки першого роду (число $\alpha > 0$, проте близьке до нуля).

Похибка другого роду полягає у прийнятті неправильної нульової гіпотези внаслідок її перевірки. Імовірність похибки другого роду позначають β.

Статистичним критерієм (або просто критерієм) називають випадкову величину K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези.

Спостережуваним (емпіричним) значенням $K_{сп}$ є значення критерію, обчислене за вибірками.

Критична область — це сукупність значень критерію, при яких відхиляють нульову гіпотезу.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) є сукупність значень критерію, при яких приймають нульову гіпотезу.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез такий: якщо спостережуване значення критерію належить критичній області, нульову гіпотезу відхиляють; якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези, гіпотезу приймають.

Критичними точками (межами) $k_{кр}$ називають такі, що відділяють критичну область від області прийняття гіпотези.

Правостороння критична область визначається нерівністю

$$K > k_{кр}.$$

Лівостороння критична область визначається нерівністю

$$K < k_{кр}.$$

Двостороння критична область визначається нерівностями

$$K < k_1, K > k_2,$$

де $k_1 < k_2$. Зокрема, якщо критичні точки симетричні відносно нуля, то двостороння область визначається нерівностями

$$K < -k_{кр},\ K > k_{кр}\ \text{(вважається, що } k_{кр} > 0)$$

або рівносильною нерівністю

$$|K| > k_{кр}.$$

Для відшукання критичної області задають рівень значущості і знаходять критичні точки із таких співвідношень:

а) для правосторонньої критичної області

$$P(K > k_{кр}) = \alpha,\ k_{кр} > 0;$$

б) для лівосторонньої критичної області

$$P(K < k_{кр}) = \alpha,\ k_{кр} < 0;$$

в) для двосторонньої симетричної критичної області

$$P(K < -k_{кр}) = \frac{\alpha}{2};\ P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2};\ k_{кр} > 0\,.$$

Потужністю критерію називають ймовірність того, що значення критерію попаде в критичну область за умови, що правильною є конкуруюча гіпотеза. Іншими словами, потужність критерію — це ймовірність того, що нульова гіпотеза буде відхилена, якщо справджується конкуруюча гіпотеза.

15.1. Перевірка гіпотези про значення генерального середнього нормальної генеральної сукупності

Нехай дано нормальну генеральну сукупність (тобто множину значень Ω_X нормально розподіленої випадкової величини X) з відомою дисперсією σ^2 і невідомим генеральним середнім (математичним сподіванням) a. З цієї сукупності отримано вибірку об'єму n і підраховано вибіркове середнє $\overline{x}_в$.

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову (або основну) гіпотезу $H_0 : a = a_0$, потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$U_{сп} = \frac{(\overline{x}_в - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

і скористатися наступними правилами.

Правило 1. Якщо конкуруюча гіпотеза має вигляд $H_1 : a \neq a_0$, то за таблицею значень функції Лапласа (**додаток 1**) знайти критичну точку $u_{кр}$ двосторонньої критичної області з рівності

$$\Phi\left(u_{кр}\right) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

У випадку $|U_{сп}| \leq u_{кр}$ немає підстав відхиляти нульову гіпотезу, а у випадку $|U_{сп}| > u_{кр}$ нульова гіпотеза не узгоджується із статистичними даними, і тому приймається конкуруюча гіпотеза.

Правило 2. Коли напевне відомо, що $a \geq \overline{x}_в$, то число a_0 вибирають так, щоб $a_0 \leq \overline{x}_в$, конкуруюча гіпотеза має вигляд $H_1 : a > a_0$. Критичну точку $u_{кр}$ правосторонньої критичної області знаходять з рівності

$$\Phi\left(u_{кр}\right) = \frac{1}{2} - \alpha,$$

і у випадку $U_{сп} \leq u_{кр}$ немає підстав відхиляти нульову гіпотезу, а у випадку $U_{сп} > u_{кр}$ приймається конкуруюча гіпотеза.

Правило 3. Коли напевне відомо, що $a \leq \overline{x}_в$, то число a_0 вибирають так, щоб $a_0 \geq \overline{x}_в$, а конкуруюча гіпотеза має вигляд $H_1 : a < a_0$. Критичну точку $u_{кр}$ лівосторонньої критичної області знаходять з рівності

$$\Phi\left(-u_{кр}\right) = \frac{1}{2} - \alpha,$$

і у випадку $U_{сп} > u_{кр}$ немає підстав відхиляти нульову гіпотезу, а у випадку $U_{сп} < u_{кр}$ приймається конкуруюча гіпотеза.

Потужність критерію перевірки основної гіпотези $H_0 : a = a_0$ про рівність генерального середнього a гіпотетичному значенню a_0 при відомому середньому квадратичному відхиленні σ знаходять залежно від вигляду альтернативної гіпотези.

При альтернативній гіпотезі $H_1 : a > a_0$ для гіпотетичного значення генерального середнього $a = a_1 > a_0$ потужність правостороннього критерію:

$$1-\beta=\frac{1}{2}-\Phi\left(u_{\text{кр}}-\lambda\right),$$

де $u_{\text{кр}}$ знаходять з рівності $\Phi(u_{\text{кр}})=\frac{1}{2}-\alpha,\ \lambda=\frac{|a_1-a_0|\sqrt{n}}{\sigma}$. При різних значеннях a_1 функція потужності одностороннього критерію така:

$$\pi_1(a_1)=\frac{1}{2}-\Phi\left(u_{\text{кр}}-\lambda\right).$$

При альтернативній гіпотезі $H_1 : a \neq a_0$ для гіпотетичного значення генерального середнього $a = a_1$ потужність двостороннього критерію:

$$1-\beta=1-[\Phi\,(u_{\text{кр}}-\lambda)+\Phi\,(u_{\text{кр}}+\lambda)],$$

де $u_{\text{кр}}$ знаходять з рівності $\Phi(u_{\text{кр}})=\frac{1-\alpha}{2},\ \lambda=\frac{|a_1-a_0|\sqrt{n}}{\sigma}$. При різних значеннях a_1 функція потужності одностороннього критерію така:

$$\pi_1\,(a_1)=1-[\Phi\,(u_{\text{кр}}-\lambda)+\Phi\,(u_{\text{кр}}+\lambda)].$$

Приклад 1. Із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$ отримано вибірку об'єму $n = 100$, за якою знайдено вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}}=29$. Потрібно при рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 30$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : a \neq 30$.

Розв'язання. Знайдемо спостережуване значення критерію

$$U_{\text{сп}}=\frac{(\overline{x}_{\text{в}}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}=\frac{(29-30)\sqrt{100}}{4}=-2{,}5\,.$$

Оскільки за умовою конкуруюча гіпотеза має вигляд $H_1 : a \neq a_0$, критична область — двостороння.

Обчислимо критичну точку з рівності

$$\Phi(u_{\text{кр}})=\frac{1-\alpha}{2}=\frac{1-0{,}01}{2}=0{,}495.$$

За таблицею значень функції Лапласа (**д о д а т о к 1**) знаходимо критичну точку:

$$u_{кр} \approx 2{,}58.$$

Оскільки $| U_{сп} | < u_{кр}$, підстав відхиляти нульову гіпотезу немає. Іншими словами, нема підстав вважати, що вибіркове та гіпотетичне генеральні середні різняться суттєво.

Приклад 2. Із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4{,}8$ отримано вибірку об'єму $n = 144$, за якою знайдено вибіркове середнє $\overline{x}_в = 16$.

1. При рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 15$ при конкуруючій гіпотезі:

а) $H_1 : a \neq 15$;

б) $H_1 : a > 15$;

в) $H_1 : a < 15$.

2. Знайти потужності правостороннього та двостороннього критеріїв.

Розв'язання.

1. Обчислимо спостережуване значення критерію

$$U_{сп} = \frac{(\overline{x}_в - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(16-15)\sqrt{144}}{4,8} = 2,5\,.$$

а) Скористаємося **правилом 1**. Знайдемо критичну точку з рівності

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1 = 0,05}{2} = 0,475\,.$$

За таблицею значень функції Лапласа (**д о д а т о к 1**) визначимо критичну точку:

$$u_{кр} \approx 1{,}96.$$

Оскільки $| U_{сп} | > u_{кр}$, основна гіпотеза відхиляється. Іншими словами, є підстава вважати, що вибіркове та гіпотетичне генеральне середні різняться суттєво.

б) Скористаємося **правилом 2**. Знайдемо критичну точку з рівності

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} - 0,05 = 0,45\,.$$

За таблицею значень функції Лапласа (**додаток 1**) визначимо критичну точку:

$$u_{\text{кр}} \approx 1{,}64.$$

Оскільки $U_{\text{сп}} > u_{\text{кр}}$, основна гіпотеза відхиляється. Іншими словами, є підстави вважати вибіркове та гіпотетичне генеральні середні різняться суттєво.

в) Оскільки $a_0 = 15 < \overline{x}_{\text{в}}$, то конкуруюча гіпотеза випадку в) за **правилом 3** неможлива.

2. Знайдемо потужності правостороннього та двостороннього критеріїв. Нагадаємо, що критичні точки в цих випадках різні та дорівнюють відповідно 1,64 і 1,96.

Знайдемо параметр λ, який входить в обидва рівняння, для визначення потужності критеріїв:

$$\lambda = \frac{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(16-15)\sqrt{144}}{4,8} = 2,5\,.$$

Отже, потужності відповідно правостороннього та двостороннього критеріїв будуть такими:

$$\pi_1^{\text{правост}}(16) = \frac{1}{2} - \Phi\left(u_{\text{кр}} - \lambda\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(1,64 - 2,5\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \Phi(0,86) = \frac{1}{2} = 0,3051 = 0,8051;$$
$$\pi_1^{\text{правост}}(16) = 1 - \left[\Phi\left(u_{\text{кр}} - \lambda\right) + \Phi\left(u_{\text{кр}} + \lambda\right)\right] =$$
$$= 1 - \left[\Phi\left(1,96 - 2,5\right) + \Phi\left(1,96 + 2,5\right)\right] =$$
$$= 1 - \left[-\Phi(0,54) + \Phi(4,46)\right] \approx 1 + 0,2054 - 5,5 = 0,7054.$$

Іншими словами, ймовірності того, що нульова гіпотеза буде відхилена, якщо правильною є конкуруюча гіпотеза, дорівнюють 0,8051 і 0,7054 відповідно до правостороннього та двостороннього критеріїв.

Якщо дисперсія σ^2 генеральної сукупності невідома, то у **правилах 1–3** замінюють:

1) $U_{\text{сп}}$ на $T_{\text{сп}} = \dfrac{(\overline{x}_{\text{в}} - a_0)\sqrt{n}}{s}$, де $s = \sqrt{\dfrac{n\sum\limits_i n_i x_i^2 - \left(\sum\limits_i n_i x_i\right)^2}{n(n-1)}}$ — виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення;

2) у **правилі 1** замість знаходження $u_{\text{кр}}$ знаходять $t_{\text{двост.кр}}$ (α, k) за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (**додаток 6**) при заданому рівні значущості α, розміщеному у верхній частині таблиці, і кількості ступенів вільності $k = n - 1$; якщо $|T_{\text{сп}}| < t_{\text{двост.кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу, а якщо $|T_{\text{сп}}| > t_{\text{двост.кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють;

3) у **правилі 2** (**правилі 3**) замість знаходження $u_{\text{кр}}$ знаходять $t_{\text{одност.кр}}$ (α, k) ($-t_{\text{одност.кр}}$ (α, k)) за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (**додаток 6**) за рівнем значущості, розміщеному у нижній частині таблиці, і числом $k = n - 1$; якщо $T_{\text{сп}} < t_{\text{одност.кр}}$ ($T_{\text{сп}} > -t_{\text{одност.кр}}$), немає підстав відхиляти нульову гіпотезу, а якщо $T_{\text{сп}} > t_{\text{одност.кр}}$ ($T_{\text{сп}} < -t_{\text{одност.кр}}$), нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 3. Для вибірки об'єму $n = 25$, отриманої з нормальної генеральної сукупності, знайдені вибіркове середнє $\overline{x} = 43$ і «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 4$. Потрібно при рівні значущості α = 0,01 перевірити основну гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 45$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : a \neq 45$.

Розв'язання. Обчислимо спостережуване значення критерію

$$|T_{\text{сп}}| = \frac{|\overline{x} - a_0|\sqrt{n}}{s} = \frac{|43 - 45|\sqrt{25}}{4} = 2,5 .$$

Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : a \neq a_0$, то критична область — двостороння.

За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (**додаток 6**) при рівні значущості α = 0,01 і кількості ступенів свободи:

$$k = n - 1 = 25 - 1 = 24$$

знаходимо критичну точку

$$t_{\text{двост.кр}}\ (0,01;\ 24) = 2,80.$$

Для відшукання критичної точки $t_{\text{двост.кр}}$ (0,01; 24) можна, окрім зазначених таблиць, скористатись функцією СТЬЮДРАСПОБР програми MS Excel, як це відображено на *рис. 76*.

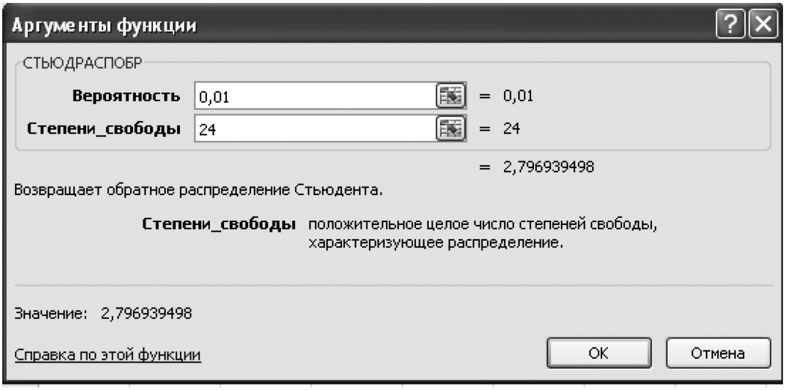


Рис. 76. MS Excel. Критична точка розподілу Стьюдента

Оскільки $|\ T_{сп}\ | < t_{двост.кр}$, підстав відхиляти основну гіпотезу немає. Іншими словами, нема підстав вважати, що вибіркове та гіпотетичне генеральне середні різняться суттєво.

Приклад 4. Контрольна маса хлібини, що випікається на заводі, має становити $a = a_0 = 1250$ г. Контрольні вимірювання 20 випадково відібраних хлібин виявили такі результати (*табл. 15.1*):

Таблиця 15.1

Маса, г	1240	1245	1250	1255	1260
Кількість хлібин	3	5	6	4	2

При рівні значущості 0,001 перевірити основну гіпотезу $H_0 : a \neq a_0 = 1250$ при конкуруючій гіпотезі:

а) $H_1 : a \neq a_0$;
б) $H_1 : a > a_0$;
в) $H_1 : a < a_0$.

Розв'язання. Обчислимо вибіркові середнє $\overline{x}$ і «виправлене» середнє квадратичне відхилення *s:*

$$\overline{x} = \frac{1240 \cdot 3 + 1245 \cdot 5 = +1250 \cdot 6 + 1255 \cdot 4 + 1260 \cdot 2}{20} = 1249,25\,;$$

$$s = \left(\frac{1240^2 \cdot 3 + 1245^2 \cdot 5 = 1250^2 \cdot 6 + 1255^2 \cdot 4 + 1260^2 \cdot 2}{19} - \right.$$

$$\left. - \frac{20}{19} \cdot 1249{,}5^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx 6{,}13.$$

Знайдемо спостережуване значення критерію:

$$T_{\text{сп}} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(1289{,}25 - 1250)\sqrt{20}}{6{,}13} \approx -0{,}547 \cdot$$

а) Скористаємося **правилом 1.** За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (**додаток 6**) при рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ і кількості ступенів свободи:

$$k = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

знайдемо критичну точку розподілу Стьюдента:

$$t_{\text{двост.кр}}\ (0{,}001;\ 19) = 3{,}88.$$

Оскільки $|\ T_{\text{сп}}\ | < t_{\text{двост.кр}}$, підстав відхиляти основну гіпотезу немає. Іншими словами, вибіркове та гіпотетичне генеральні середні різняться несуттєво.

б) Оскільки $a_0 > \overline{x}$, то конкуруюча гіпотеза випадку б) неможлива.

в) Скористаємося **правилом 3**. Критичну точку знаходимо за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента при $\alpha = 0{,}001$, $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$:

$$t_{\text{одност.кр}}\ (0{,}001\$;\ 19) = 3{,}58.$$

Оскільки $T_{\text{сп}} > -t_{\text{одност.кр}}$, підстав відхиляти основну гіпотезу немає. Іншими словами, нема підстав вважати, що вибіркове та гіпотетичне генеральні середні різняться суттєво.

15.2. Перевірка гіпотези про значення дисперсії нормальної генеральної сукупності

Нехай з нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об’єму *n,* для якої знайдено «виправлену» вибіркову дисперсію s^2.

Правило 1. Для того щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ про рівність невідомої генеральної дисперсії σ^2 гіпотетичному (пропонованому) значенню σ_0^2 при конкуруючі гіпотезі $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$\chi^2_{\text{сп}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

і за таблицею критичних точок розподілу Пірсона χ^2 (**додаток 7**), при заданому рівні значущості α і кількості ступенів свободи $k = n - 1$ знайти критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$.

Якщо $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 2. При конкуруючій гіпотезі $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ знаходять ліву $\chi^2_{\text{лів.кр}}(1-\alpha/2, k)$ і праву $\chi^2_{\text{прав.кр}}(\alpha/2; k)$ критичні точки.

Якщо $\chi^2_{\text{лів.кр}} < \chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{прав.кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{лів.кр}}$ або $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{прав.кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 3. При конкуруючій гіпотезі $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ знаходять критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha; k)$.

Якщо $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha; k)$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha; k)$, нульову гіпотезу відхиляють.

Примітка 1. Якщо кількість ступенів свободи $k > 30$, критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ можна знайти з нерівності Вілсона — Гілферті:

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k) = k\left(1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3,$$

де z_α визначають, використовуючи таблицю значень функції Лапласа (**додаток 1**), з рівності

$$\Phi(z_\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha.$$

Приклад 1. Із нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму n = 25, для якої знайдено вибіркову «виправлену» дисперсію s^2 = 12,3. Перевірити при рівні значущості α = 0,01 гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : \sigma_0^2 > 12$.

Розв'язання. Знайдемо спостережуване значення критерію:

$$\chi^2_{\text{сп}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\cdot 12,3}{12} = 24,6 \cdot$$

Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma_0^2 > 12$, критична область правостороння (**правило 1**). За таблицею значень критерію Пірсона χ^2 (**додаток 7**) при рівні значущості α = 0,01 і кількості ступенів свободи

$$k = n - 1 = 25 - 1 = 24$$

знаходимо критичну точку:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,01; 24) = 42,98 \cdot$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичному значенню $\sigma_0^2 = 12$. Іншими словами, є підстави вважати, що різниця між «виправленою» вибірковою дисперсією s^2 = 12,3 і гіпотетичною генеральною дисперсією $\sigma_0^2 = 12$ незначуща.

Приклад 2. Із нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму n = 20, для якої знайдено вибіркову «виправлену» дисперсію s^2 = 2,7. Перевірити при рівні значущості α = 0,05 гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 3$, якщо альтернативна гіпотеза:

а) $H_1 : \sigma_0^2 > 3$;

б) $H_1 : \sigma_0^2 \neq 3$;

в) $H_1 : \sigma_0^2 < 3$.

Розв'язання. Знайдемо спостережуване значення критерію:

$$\chi^2_{\text{сп}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)\cdot 2,7}{3} = 17,1 .$$

а) Скористаємося **правилом 1.** За таблицею значень критерію Пірсона χ^2 (**додаток 7**) при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількості ступенів свободи

$$k = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

знайдемо критичну точку:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,05;19) = 30,14 \cdot$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти основну гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичному значенню $\sigma = $. Іншими словами, є підстави вважати, що різниця між «виправленою» вибірковою дисперсією $s^2 = 2{,}7$ і гіпотетичною генеральною дисперсією $\sigma_0^2 = 3$ незначуща.

б) Скористаємося **правилом 2.** За таблицею з **додатку 7** при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількості ступенів вільності

$$k = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

знаходимо критичні точки:

$$\chi^2_{\text{лів.кр}}(1 - \alpha / 2, k) = \chi^2_{\text{лів.кр}}(0,975;19) = 8,91;$$

$$\chi^2_{\text{прав.кр}}(\alpha / 2; k) = \chi^2_{\text{прав.кр}}(0,025;19) = 32,85.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{лів.кр}} < \chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{прав.кр}}$, немає підстав відхиляти гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичному значенню $\sigma_0^2 = 3$. Іншими словами, є підстави вважати, що різниця між «виправленою» вибірковою дисперсією $s^2 = 2{,}7$ і гіпотетичною генеральною дисперсією $\sigma_0^2 = 3$ незначуща.

в) Скористаємося правилом 3. За таблицею з **додатку 7** при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількості ступенів вільності

$$k = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

знаходимо критичну точку:

$$\chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha; k) = \chi^2_{\text{лів.кр}}(0,95;19) = 10,12 \cdot$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha; k)$, немає підстав відхиляти гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичному значенню $\sigma_0^2 = 3$. Іншими словами, є підстави вважати, що різниця між «виправленою» вибірковою дисперсією $s^2 = 2{,}7$ і гіпотетичною генеральною дисперсією $\sigma_0^2 = 3$ незначуща.

Приклад 3. Із нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму $n = 100$ (*табл. 15.2*):

Таблиця 15.2

x_i	5	6	7	8	9	10	11
n_i	9	15	19	20	17	13	7

Перевірити при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ основну гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 4$, якщо альтернативна гіпотеза $H_1 : \sigma_0^2 > 4$.

Розв'язання. За даними вибірки знайдемо «виправлену» вибіркову дисперсію s^2:

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 9 + 6 \cdot 15 + 7 \cdot 19 + 8 \cdot 20 + 9 \cdot 17 + 10 \cdot 13 + 11 \cdot 7}{100} = 7{,}88;$$

$$s^2 = \frac{5^2 \cdot 9 + 6^2 \cdot 15 + 7^2 \cdot 19 + 8^2 \cdot 20 + 9^2 \cdot 17 + 10^2 \cdot 13^2 + 11^2 \cdot 7}{100} -$$

$$-7{,}88^2 = 2{,}9056.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$\chi^2_{\text{сп}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(100-1) \cdot 2{,}9056}{4} = 71{,}9136 .$$

Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma_0^2 > 4$, критична область правостороння (**правило 1**).

Знайдемо кількості ступенів свободи k:

$$k = n - 1 = 100 - 1 = 99.$$

Оскільки кількість ступенів свободи $k > 30$, критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ знайдемо з рівності Вілсона—Гілферті:

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k) = k\left(1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3,$$

де z_α визначимо з рівності

$$\Phi(z_\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} - 0{,}01 = 0{,}49,$$

використовуючи таблицю значень функції Лапласа (**додаток 1**):

$$z_\alpha \approx 2{,}33.$$

Отже,

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,01;99) = 99\left(1 - \frac{2}{9\cdot 99} + 2,33\sqrt{\frac{2}{9\cdot 99}}\right)^3 = 113,0187.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти основну гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичному значенню $\sigma_0^2 = 4$. Іншими словами, є підстави вважати, що різниця між «виправленою» вибірковою дисперсією $s^2 = 2,9$ і гіпотетичною генеральною дисперсією $\sigma_0^2 = 4$ незначуща.

15.3. Перевірка рівності відносної частоти гіпотетичної ймовірності

Нехай при достатньо великій кількості n незалежних випробувань, у кожному із яких ймовірність p появи події стала, але невідома, знайдено відносну частоту $\frac{m}{n}$. Потрібно при заданому рівні значущості α перевірити основну гіпотезу, яка полягає в тому, що невідома ймовірність p дорівнює гіпотетичній ймовірності p_0.

Правило 1. Для того щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : p = p_0$ про рівність невідомої ймовірності p гіпотетичної ймовірності p_0 при конкуруючій гіпотезі $H_1 : p \neq p_0$, потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$U_{\text{сп}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

і за таблицею значень функції Лапласа (**додаток 1**) знайти критичну точку $u_{\text{кр}}$ двосторонньої критичної області з рівності

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Якщо $|U_{\text{сп}}| < u_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|U_{\text{сп}}| > u_{\text{кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 2. При альтернативній гіпотезі $H_1 : p > p_0$ (p_0 повинно бути меншим за $\frac{m}{n}$) критичну точку правосторонньої критичної області знаходять з рівності

$$\Phi\left(u_{\text{кр}}\right) = \frac{1}{2} - \alpha \cdot$$

Якщо $U_{\text{сп}} < u_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $U_{\text{сп}} > u_{\text{кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 3. При альтернативній гіпотезі $H_1 : p < p_0$ (p_0 повинно бути меншим за $\frac{m}{n}$) спочатку знаходять «допоміжну» критичну точку $u_{\text{кр}}$ за **правилом 2**, а потім вважають межею лівосторонньої критичної області.

$$u'_{\text{кр}} = -u_{\text{кр}}.$$

Якщо $U_{\text{сп}} > -u_{\text{кр}}$ немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $U_{\text{сп}} < -u_{\text{кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

П р и м і т к а. Коректні результати отримують за умови виконання нерівності $np_0q_0 > 9$.

Приклад 1. Для деякої події в результаті 100 незалежних випробувань знайдено відносну частоту $\frac{m}{n} = 0,34$. При рівні значущості 0,05 перевірити гіпотезу $H_0 : p = p_0 = 0,3$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : p \neq 0,3$.

Розв'язання. Знайдемо q_0:

$$q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,3 = 0,7,$$

тобто

$$np_0q_0 = 100 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 21 > 9.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$U_{\text{сп}} = \frac{(\frac{m}{n} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}} = \frac{(0,34 - 0,3)\sqrt{100}}{\sqrt{0,3 \cdot 0,7}} \approx 0,87 \cdot$$

Оскільки за умовою альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : p \neq p_0$, критична область — двостороння (**правило 1**).

Визначимо критичну точку $u_{\text{кр}}$ з рівності

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,05}{2} = 0,475\,.$$

За таблицею значень функції Лапласа (**д о д а т о к 1**) заходимо

$$u_{\text{кр}} \approx 1,96.$$

Оскільки $|\, U_{\text{сп}} \,| < u_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти гіпотезу H_0. Іншими словами, є підстави вважати, що спостережувана відносна частота $\frac{m}{n} = 0,34$ незначуще відрізняється від гіпотетичної імовірності $p_0 = 0,3$.

Приклад 2. Для деякої події в результаті 400 незалежних випробувань було знайдено відносну частоту $\frac{m}{n} = 0,44$. При рівні значущості 0,01 перевірити основну гіпотезу $H_0 : p = p_0 = 0,5$ при конкуруючій гіпотезі:

а) $H_1 : p > 0,5$;
б) $H_1 : p < 0,5$.

Розв'язання. Знайдемо q_0:

$$q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,5 = 0,5,$$

тобто

$$np_0q_0 = 400 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 100 > 9.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$U_{\text{сп}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}} = \frac{(0,44-0,5)\sqrt{400}}{\sqrt{0,5\cdot 0,5}} \approx -2,4\,.$$

а) Застосовувати **правило 2** не можна, оскільки $p_0 > \frac{m}{n}$.

б) Застосуємо **правило 3**. Використовуючи дані пункту а), знаходимо критичну точку

$$u_{\text{кр}} \approx 2,33.$$

Оскільки $U_{\text{сп}} < u_{\text{кр}}$, основна гіпотеза відхиляється. Іншими словами, є підстави вважати, що спостережувана відносна частота $\frac{m}{n} = 0,47$ значуще відрізняється від гіпотетичної імовірності $p_0 = 0,5$.

15.4. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл за критерієм Пірсона

Нехай статистичний розподіл вибірки задано у вигляді послідовності рівновіддалених варіант і відповідних їм частот (*табл. 15.3*):

Таблиця 15.3

x_i	x_1	x_2	…	x_N
n_i	n_1	n_2	…	n_N

.

Необхідно за допомогою *критерію Пірсона* перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Правило 1. Для того щоб при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, необхідно:

1) обчислити вибіркове середнє $\overline{x}_\text{в}$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_\text{В}$;

2) визначити теоретичні частоти

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_\text{в}} \cdot \varphi(u_i),$$

де n — об'єм вибірки; h — крок (різниця між двома сусідніми варіантами); $\varphi(u)$ — значення диференціальної функції Лапласа (**д о д а т о к 2**);

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_\text{в}}{\sigma_\text{в}};$$

3) порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього:

а) складають розрахункову таблицю, за якою знаходять спостережуване значення критерію Пірсона

$$\chi^2_\text{сп} = \sum_i \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'};$$

б) за таблицею критичних точок розподілу Пірсона χ^2 (**д о д а т о к 7**) при заданому рівні значущості α і кількості ступенів свободи $k = s - 3$ (s — кількість варіант вибірки) знаходять критичну точку $\chi^2_\text{кр}(\alpha; k)$ правосторонньої критичної області.

Якщо $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$, немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності тобто вважати, що емпіричні та теоретичні частоти різняться несуттєво. Якщо $\chi^2_{сп} > \chi^2_{кр}$, гіпотезу відхиляють, тобто вважають, що емпіричні та теоретичні частоти різняться суттєво.

Примітка. Малочисельні частоти вибірки ($n_i < 5$) слід об'єднати; у цьому разі відповідні їм теоретичні частоти також потрібно додати. Якщо відбувалося об'єднання частот, то при визначенні кількості ступенів свободи за формулою $k = s - 3$ слід за s узяти кількість варіант вибірки, що залишилася після об'єднання частот.

Приклад 1. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X, якщо з цієї сукупності отримано вибірку об'єму $n = 100$ (*табл. 15.4*):

Таблиця 15.4

x_i	–5	–3	–1	1	3	5	7	9
n_i	5	9	13	18	21	18	10	6

Розв'язання. Обчислимо вибіркове середнє $\bar{x}_в$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma_В$:

$$\bar{x}_в = \frac{-5\cdot 5 - 3\cdot 9 - 1\cdot 13 + 1\cdot 18 + 3\cdot 21 + 5\cdot 18 + 7\cdot 10 + 9\cdot 6}{100} = 2{,}3;$$

$$\sigma_в = \left(\left[5^2\cdot 5 + 3^2\cdot 9 + 1\cdot 13 + 1\cdot 18 + 3^2\cdot 21 + 5^2\cdot 18 + 7^2\cdot 10 + 9^2\cdot 6\right]/100 - \right.$$
$$\left. - \;\; 2{,}3\right)^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}64.$$

Визначимо теоретичні частоти, ураховуючи, що $n = 100$, $h = 2$, $\sigma_В = 3{,}64$, за формулою

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_в}\cdot\varphi\left(\frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right).$$

Для зручності складемо розрахункову таблицю (*таблиця 15.5*) (значення функції Лапласа $\varphi(u)$ беремо з **додатку 2**).

Таблиця 15.5

i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = \dfrac{nh}{\sigma_в} \cdot \varphi(u_i)$
1	–5	–2,01	0,0529	2,91
2	–3	–1,46	0,1374	7,56
3	–1	–0,91	0,2637	14,50
4	1	–0,36	0,3739	20,56
5	3	0,19	0,3918	21,54
6	5	0,74	0,3034	16,68
7	7	1,29	0,1736	9,55
8	9	1,84	0,0734	4,04

Необхідно порівняти емпіричні та теоретичні частоти. Для цього обчислимо спостережуване значення критерію

$$\chi^2_{сп} = \sum_i \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

Обчислення зручно оформити у вигляді розрахункової таблиці (*табл. 15.6*)

Таблиця 15.6

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	5	2,91	2,09	4,37	1,50
2	9	7,56	1,44	2,07	0,27
3	13	14,50	–1,50	2,25	0,16
4	18	20,56	–2,56	6,55	0,32
5	21	21,54	–0,54	0,29	0,01
6	18	16.68	1,32	1,74	0,10

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
7	10	9,55	0,45	0,20	0,02
8	6	4,04	1,96	8,34	0,95
Σ	100				$\chi^2_{\text{сп}} = 3,33$

Із *таблиці 15.6* знаходимо

$$\chi^2_{\text{сп}} = 3,33\ .$$

За таблицею критичних точок розподілу Пірсона χ^2 (**додаток 7**), при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількості ступенів свободи

$$k = s - 3 = 8 - 3 = 5.$$

знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,05;5) = 11,07\ .$$

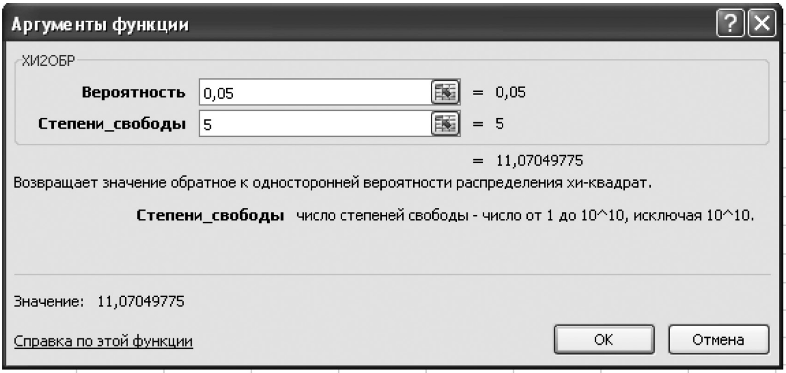


Рис. 77. MS Excel. Критичні точки розподілу Пірсона

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, гіпотезу про нормальний розподіл не відхиляємо, тобто вважаємо, що емпіричні та теоретичні частоти різняться несуттєво.

Для проведення розрахунків доволі зручно використовувати програми MS Excel, причому як для знаходження $\chi^2_{\text{сп}}$, так і для визначення $\chi^2_{\text{кр}}$. Обчислення $\chi^2_{\text{кр}}$ (0,05;5) за допомогою вбудованої функції ХИ2ОБР відображено на *рис. 77*. Нехай статистичний розподіл вибірки задано в вигляді послідовності інтервалів і відповідних їм частот (*табл. 15.7*):

Таблиця 15.7

$[x_i; x_{i+1})$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_N; x_{N+1})$
n_i	n_1	n_2	...	n_N

.

Необхідно за допомогою *критерію Пірсона* перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Правило 2. Для того щоб при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, необхідно:

1) обчислити вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}}$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{В}}$, при цьому за варіанти x_i^* беруть середнє арифметичне кінців інтервалу:

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2};$$

2) пронормувати досліджувану випадкову величину X, тобто перейти до випадкової величини $Z = \frac{X - \overline{x^*}}{\sigma^*}$, і обчислити кінці інтервалів: $z_i = \frac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}$, причому найменше значення Z, тобто z_1, вважають рівним $-\infty$, а найбільше, тобто z_{N+1}, — рівним ∞;

3) обчислити теоретичні частоти

$$n_i' = n \cdot P_i,$$

де n — об'єм вибірки; $P_i = \Phi\,(z_{i+1}) - \Phi\,(z_i)$ — ймовірності потрапляння X в інтервали $(x_i;\ x_{i+1}]$; $\Phi\,(z)$ — функція Лапласа (**додаток 1**);

4) порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього:

а) складають розрахункову таблицю, за якою знаходять спостережуване значення критерію Пірсона

$$\chi^2_{\text{сп}} = \sum_i \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'};$$

б) за таблицею критичних точок розподілу χ^2 (**додаток 7**) при заданому рівні значущості α і кількості ступенів свободи $k = s - 3$ (s — кількість варіант вибірки) знаходять критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ правосторонньої критичної області.

Якщо $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, тобто вважаємо, що емпіричні та теоретичні частоти різняться несуттєво (випадково). Якщо $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{кр}}$, гіпотезу відхиляють, тобто вважаємо, що емпіричні та теоретичні частоти різняться суттєво.

Примітка. Інтервали, які містять малочисельні частоти вибірки ($n_i < 5$), слід об'єднувати, а частоти цих інтервалів додавати. Якщо відбувалося об'єднання інтервалів, при визначенні кількості ступенів свободи за формулою $k = s - 3$ слід за s узяти кількість інтервалів вибірки, що залишилася після об'єднання інтервалів.

Приклад 2. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X, якщо з цієї сукупності отримано таку вибірку об'єму $n = 100$ (*табл.15 8*).

Таблиця 15.8

$[x_i; x_{i+1})$	[3; 7)	[7; 11)	[11; 15)	[15; 19)	[19; 23)	[23; 27)	[27; 31)
n_i	6	16	19	17	15	14	13

.

Розв'язання. Обчислимо вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}}$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{В}}$. Для цього перетворимо інтервальний статистичний розподіл вибірки на точковий (*таблиця 15.9*).

Таблиця 15.9

x_i	5	9	13	17	21	25	29
n_i	6	16	19	17	15	14	13

Отже,

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{5 \cdot 6 - 9 \cdot 16 - 13 \cdot 19 + 17 \cdot 17 + 21 \cdot 15 + 25 \cdot 14 + 29 \cdot 13}{100} = 17{,}52;$$

$$\sigma_{\text{в}} = \Big(\big[5^2 \cdot 6 - 9^2 \cdot 16 - 13^2 \cdot 19 + 17^2 \cdot 17 + 21^2 \cdot 15 + 25^2 \cdot 14 +$$

$$+ 29^2 \cdot 13\big] / 100 - 17{,}52^2\Big)^{\frac{1}{2}} \approx 7{,}19.$$

Знайдемо нормовані інтервали $(z_i; z_{i+1}]$, ураховуючи, що вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}} = 17{,}52$ і середнє квадратичне відхилення вибірки $\sigma_{\text{В}} = 7{,}19$. Для цього складемо розрахункову таблицю (*табл.15.10*) (лівий кінець першого інтервалу покладемо рівним $-\infty$, а правий кінець останнього інтервалу — рівним ∞).

Таблиця 15.10

i	x_i	x_{i+1}	$x_i - \overline{x}_{\text{в}}$	$x_{i+1} - \overline{x}_{\text{в}}$	$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}$
1	3	7	–14,5	–10,5	$-\infty$	–1,46
2	7	11	–10,5	–6,5	–1,46	–1,90
3	11	15	–6,5	–2,5	–0,90	–0,35
4	15	19	–2,5	1,5	–0,35	0,21
5	19	23	1,5	5,5	0,21	0,76
6	23	27	5,5	9,5	0,76	1,32
7	27	31	9,5	13,5	1,32	∞

Визначимо теоретичні ймовірності P_i і теоретичні частоти:

$$n_i' = n \cdot P_i .$$

Для цього складемо розрахункову таблицю (*табл. 15.11*)

Таблиця 15.11

i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i' = n \cdot P_i$
1	$-\infty$	–1,48	–0,5000	–0,4306	0,0684	6,94
2	–1,48	–0,92	–0,4306	–0,3212	0,1094	10,94
3	–0,92	–0,35	–0,3212	–0,1368	0,1844	18,44
4	–0,35	0,21	–0,1368	0,0832	0,2200	22,00
5	0,21	0,78	0,0832	0,2823	0,1991	19,91
6	0,78	1,34	0,2823	0,4099	0,1276	12,76
7	1,34	∞	0,4099	0,5000	0,0901	9,01
Σ					1	100

Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти, використовуючи критерій Пірсона. Для цього обчислимо спостережуване значення критерію Пірсона за допомогою розрахункової таблиці (*табл. 15.12*). Стовпці 7 і 8 цієї таблиці введено для контролю обчислень за формулою

$$\chi^2_{\text{сп}} = \sum_i \frac{n_i^2}{n_i'} - n.$$

Таблиця 15.12

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	6,94	–0,94	0,8836	0,1273	36	5,1873
2	16	10,94	5,06	25,6036	2,3404	256	23,4004
3	19	18,44	0,56	0,3136	0,0170	361	19,5770
4	17	22,00	–5,00	25,0000	1,1364	289	13,1364
5	15	19,91	–4,91	24,1981	1,2109	225	11,3009
6	14	12,76	1,24	1,5376	0,1205	196	15,3605
7	13	9,01	3,99	15,9201	1,7669	169	18,7568
Σ	100	100			$\chi^2_{\text{сп}} = 6,7194$		106,7194

Контроль: Оскільки

$$\sum_i \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 106,7194 - 100 = 6,7194 = \chi^2_{\text{сп}},$$

обчислення проведено правильно.

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (**додаток 7**) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів свободи

$$k = s - 3 = 7 - 3 = 4$$

знайдемо критичну точку правосторонньої критичної області:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 4) = 9,49.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності не відхиляємо, тобто вважаємо, що емпіричні та теоретичні частоти різняться несуттєво.

15.5. Перевірка гіпотези про рівномірний розподіл

Нехай задано інтервальний статистичний розподіл вибірки (*табл. 15.13*),

Таблиця 15.13

$[x_i; x_{i+1})$	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	...	$[x_{N-1}; x_N)$
n_i	n_0	n_1	...	n_{N-1}

при чому n — об'єм вибірки.

Потрібно за допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про рівномірний розподіл генеральної сукупності.

Правило 1. Для того щоб перевірити гіпотезу про рівномірний розподіл досліджуваної випадкової величини X, тобто про те, що щільність X має вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b]; \\ 0, & x \notin [a; b], \end{cases}$$

необхідно:

1) оцінити параметри a і b — кінці інтервалу, у якому спостерігалися можливі значення X, за формулами (a^* і b^* — оцінки параметрів)

$$a^* = \bar{x}_{\text{в}} - \sqrt{3}\sigma_{\text{в}},\ b^* = \bar{x}_{\text{в}} + \sqrt{3}\sigma_{\text{в}};$$

2) знайти щільність імовірності передбачуваного розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b^* - a^*}, & x \in [a^*; b^*]; \\ 0, & x \notin [a^*; b^*]; \end{cases}$$

3) визначити теоретичні частоти:

$$n_1' = nP_1 = n\frac{1}{b^* - a^*}(x_1 - a^*);$$

$$n_i' = n\frac{1}{b^* - a^*}(x_i - x_{i-1}),\ i = 2, 3, \ldots, N-1;$$

$$n_N' = n\frac{1}{b^* - a^*}(b^* - x_{N-1});$$

4) порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона, узявши кількість ступенів свободи $k = s - 3$, де s — кількість інтервалів у вибірці.

Приклад 1. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X, якщо з цієї сукупності отримано вибірку об'єму $n = 200$ (*табл. 15.14*):

Таблиця 15.14

$[x_i; x_{i+1})$	$[-4; -2)$	$[-2; 0)$	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10)$
n_i	28	27	34	23	25	31	32

Розв'язання. Обчислимо вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}}$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{В}}$. Для цього перетворимо інтервальний статистичний розподіл вибірки на точковий (*табл. 15.15*).

Таблиця 15.15

x_i^*	-3	-1	1	3	5	7	9
n_i	28	27	34	23	25	31	32

Отже,

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{-3\cdot 28 - 1\cdot 27 + 1\cdot 34 + 3\cdot 23 + 5\cdot 25 + 7\cdot 31 + 9\cdot 32}{200} = 3{,}11;$$

$$\sigma_{\text{в}} = \left(\frac{3^2\cdot 28 + 1\cdot 27 + 1\cdot 34 + 3^2\cdot 23 + 5^2\cdot 25 + 7^2\cdot 31 + 9^2\cdot 32}{200} - 3{,}11^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx 4{,}075.$$

Знайдемо оцінки параметрів *a* і *b* рівномірного розподілу:

$$a^* = \bar{x}_в - \sqrt{3}\sigma_в \approx 3{,}11 - \sqrt{3} \cdot 4{,}075 \approx -3{,}95;$$
$$b^* = \bar{x}_в + \sqrt{3}\sigma_в \approx 3{,}11 + \sqrt{3} \cdot 4{,}075 \approx 10{,}17.$$

Визначимо щільність рівномірного розподілу, що припускається:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b^* - a^*}, & x \in [a^*; b^*]; \\ 0, & x \notin [a^*; b^*] \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{10{,}17 + 3{,}95}, & x \in [-3{,}95; 10{,}17]; \\ 0, & x \notin [-3{,}95; 10{,}17] \end{cases} \approx$$
$$\approx \begin{cases} 0{,}07, & x \in [-3{,}95; 10{,}17]; \\ 0, & x \notin [-3{,}95; 10{,}17]. \end{cases}$$

Обчислимо теоретичні частоти:

$$n_1' = n\frac{1}{b^* - a^*} \cdot (x_1 - a^*) = 200 \cdot 0{,}07 \cdot (-2 + 3{,}95) = 27{,}3;$$
$$n_2' = n\frac{1}{b^* - a^*} \cdot (x_2 - x_1) = 200 \cdot 0{,}07 \cdot (0 + 2) = 28;$$
$$n_3' = \ldots = n_6' = n_2' = 28;$$
$$n_7' = n\frac{1}{b^* - a^*} \cdot (b^* - x_6) = 200 \cdot 0{,}07 \cdot (10{,}17 - 8) = 30{,}38.$$

Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти, використовуючи критерій Пірсона. Для цього обчислимо спостережуване значення критерію Пірсона за допомогою розрахункової *таблиці 15.16*.

Таблиця 15.16

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	28	27,3	–0,7	0,49	0,02
2	27	28	1	1	0,04
3	34	28	–6	36	1,29
4	23	28	5	25	0,89
5	25	28	3	9	0,32
6	31	28	–3	9	0,32
7	32	30,38	–1,62	2,62	0,09
Σ	200				$\chi^2_{сп} = 2{,}97$

Із розрахункової *таблиці 15.16* маємо

$$\chi^2_{\text{сп}} = 2,97 .$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (**додаток 7**) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів свободи

$$K = s - 3 = 7 - 3 = 4$$

знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 4) = 9,49 .$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, гіпотезу про рівномірний нормальний розподіл не відхиляємо, тобто вважаємо, що емпіричні та теоретичні частоти різняться несуттєво.

15.6. Перевірка гіпотези про показниковий розподіл

Нехай, задано інтервальний статистичний розподіл вибірки (*табл. 15.17*):

Таблиця 15.17

$[x_i; x_{i+1})$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	…	$[x_N; x_{N+1})$
n_i	n_1	n_2	…	n_N

(n– об'єм вибірки).

Необхідно за допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про показниковий розподіл генеральної сукупності.

Правило 1. Для того щоб при рівні значущості α перевірити гіпотезу про показниковий розподіл досліджуваної випадкової величини X, необхідно:

1) обчислити вибіркове середнє $\bar{x}_{\text{в}}$, узявши за варіанти середини інтервалів

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} - x_i}{2};$$

2) узяти як оцінку параметра λ показникового розподілу величину, обернену до вибіркового середнього:

$$\lambda^* = \frac{1}{\overline{x}_{\text{в}}};$$

3) знайти ймовірності потрапляння випадкової величини X у частинні інтервали $[x_i; x_{i+1})$ за формулою

$$P_i = P\left(x_i \leq X < x_{i+1}\right) = e^{-\lambda^* x_i} - e^{-\lambda^* x_{i+1}};$$

4) обчислити теоретичні частоти:

$$n_i' = n \cdot P_i;$$

5) порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона, узявши кількість ступенів свободи $k = s$ — 2, де s — кількість інтервалів у вибірці.

Примітка 1. Інтервали, які містять малочисельні частоти вибірки ($n_i < 5$), потрібно об'єднати, а частоти цих інтервалів додати. Якщо відбувалося об'єднання інтервалів, при визначенні кількості ступенів вільності за формулою $k = s$ — 2 слід як s узяти кількість інтервалів вибірки, що залишилася після об'єднання інтервалів.

Приклад 1. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про показниковий розподіл генеральної сукупності X, якщо з цієї сукупності отримано таку вибірку об'єму $n = 200$ (*табл. 15.18*):

Таблиця 15.18

$[x_i; x_{i+1})$	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)	[30; 36)	[36; 42)
n_i	115	51	18	9	4	2	1

Розв'язання. Оскільки маємо інтервали з малочисельними частотами, то попередньо об'єднаємо їх. Отримаємо такий розподіл вибірки (*табл. 15.19*):

Таблиця 15.19

$[x_i; x_{i+1})$	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 42)
n_i	115	51	18	9	7

Щоб знайти вибіркове середнє $\overline{x}_в$, перетворимо інтервальний статистичний розподіл на точковий (*табл. 15.20*):

Таблиця 15.20

x_i	3	9	15	21	33
n_i	115	51	18	9	7

Отже,

$$\overline{x}_в = \frac{3 \cdot 115 + 9 \cdot 51 + 15 \cdot 18 + 21 \cdot 9 + 33 \cdot 7}{200} = 7,47 .$$

Знайдемо оцінку параметра показникового розподілу, що припускається:

$$\lambda^* = \frac{1}{\overline{x}_в} = \frac{1}{7,47} \approx 0,13 .$$

Іншими словами, щільність показникового розподілу, що припускається, має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0,13 \cdot e^{-0,13x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Обчислимо ймовірності потрапляння випадкової величини X у кожний з інтервалів за формулою

$$P_i = P(x_i \leq X < x_{i+1}) = e^{-\lambda^* x_i} - e^{-\lambda^* x_{i+1}} .$$

Отже,

$$P_1 = P\,(0 \leq X < 6) = e^{-0,13 \cdot 0} - e^{-0,13 \cdot 6} \approx 0,5565;$$
$$P_2 = P\,(6 \leq X < 12) = e^{-0,13 \cdot 6} - e^{-0,13 \cdot 12} \approx 0,2468;$$
$$P_3 = P\,(12 \leq X < 18) = e^{-0,13 \cdot 12} - e^{-0,13 \cdot 18} \approx 0,1095;$$
$$P_4 = P\,(18 \leq X < 24) = e^{-0,13 \cdot 18} - e^{-0,13 \cdot 24} \approx 0,0486;$$
$$P_5 = P\,(24 \leq X < 42) = e^{-0,13 \cdot 24} - e^{-0,13 \cdot 42} \approx 0,0353.$$

Знайдемо теоретичні частоти:

$$n_1' = n \cdot P_1 = 200 \cdot 0,5565 = 111,3;$$
$$n_2' = n \cdot P_2 = 200 \cdot 0,2468 = 49,36;$$
$$n_3' = n \cdot P_3 = 200 \cdot 0,1095 = 21,9;$$
$$n_4' = n \cdot P_4 = 200 \cdot 0,0486 = 9,72;$$
$$n_5' = n \cdot P_5 = 200 \cdot 0,0353 = 7,06.$$

Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти, використовуючи критерій Пірсона. Для цього обчислимо спочатку спостережуване значення критерію Пірсона за допомогою розрахункової *таблиці 15.21*.

Таблиця 15.21

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	115	111,3	–3,7	13,69	0,1230
2	51	49,36	–1,64	2,6896	0,0545
3	18	21,9	3,9	15,21	0,6945
4	9	9,72	0,72	0,5184	0,0533
5	7	7,06	0,06	0,0036	0,0005
Σ	200				$\chi^2_{сп} = 0,9258.$

Із розрахункової *таблиці 15.21* отримуємо

$$\chi^2_{сп} = 0,9258.$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (**додаток 7**) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів свободи

$$k = s - 2 = 5 - 2 = 3$$

знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області:

$$\chi^2_{кр}(0,05;3) = 7,81.$$

Оскільки $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$, гіпотезу про показниковий розподіл не відхиляємо, тобто вважаємо, що емпіричні та теоретичні частоти різняться несуттєво.

15.7. Перевірка гіпотези про біноміальний розподіл

Нехай проведено n дослідів. Кожен дослід складається з N незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи деякої події A одна й та сама. Реєструється кількість появ події A в кожному досліді. У підсумку отримано статистичний розподіл дискретної випадкової величини X *(табл.15.22)*, яка характеризує кількість появ події A (у першому рядку наведено кількість появ події A в одному досліді, а в другому рядку — частоту n_i, тобто кількість дослідів, у яких зареєстровано x_i появ події).

Таблиця 15.22

x_i	0	1	…	N
n_i	n_0	n_1	…	n_N

Потрібно за допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X.

Правило 1. Для того щоб при рівні значущості α перевірити гіпотезу про біноміальний розподіл дискретної випадкової величини X з відомим або невідомим параметром p, необхідно:

1) знайти за формулою Бернуллі

$$P_N(i) = C_N^i p^i (1-p)^{N-i}$$

ймовірності $P_N(i)$ появи події A рівно i раз у N випробуваннях ($i = 0, 1, \ldots, s$, де s — максимальна кількість спостережених появ події A в одному досліді, тобто $s \le N$);

2) знайти теоретичні частоти:

$$n_i' = n \cdot P_N(i),$$

де n — кількість дослідів;

3) у випадку відомого p порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона, поклавши кількість ступенів свободи $k = s - 2$.

Якщо параметр p невідомий і оцінений за вибіркою, то $k = s - 2$. Якщо, крім того, було об’єднано малочисельні частоти, то s — кількість варіант вибірки, що залишилися після об’єднання частот.

Приклад 1. Над подією A, ймовірність появи якої дорівнює 0,3, проведено $n = 100$ незалежних випробувань, кожне з яких складається з $N = 7$ дослідів. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про біноміальний розподіл випадкової величини X (кількість появ події A), якщо отримано таку вибірку (*табл. 15.23*):

Таблиця 15.23

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	4	23	31	23	11	5	2	1

Розв'язання. Ураховуючи, що

$$p = 0,3; \; q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7,$$

за формулою Бернуллі

$$P_N(i) = C_N^i p^i (1-p)^{N-i}$$

обчислимо ймовірності $P_N(i)$:

$$P_7(0) = C_7^0 0,3^0 0,7^7 \approx 0,0824; \; P_7(1) = C_7^1 0,3^1 0,7^6 \approx 0,2471;$$

$$P_7(2) = C_7^2 0,3^2 0,7^5 \approx 0,3177; \; P_7(3) = C_7^3 0,3^3 0,7^4 \approx 0,2269;$$

$$P_7(4) = C_7^4 0,3^4 0,7^3 \approx 0,0972; \; P_7(5) = C_7^5 0,3^5 0,7^2 \approx 0,0250;$$

$$P_7(6) = C_7^6 0,3^6 0,7^1 \approx 0,0036; \; P_7(7) = C_7^7 0,3^7 0,7^0 \approx 0,0002.$$

Зайдемо теоретичні частоти $n_i' = n \cdot P_N(i)$:

$$n_0' = 100 \cdot P_7(0) = 8,24; \quad n_1' = 100 \cdot P_7(1) = 24,71;$$
$$n_2' = 100 \cdot P_7(2) = 31,77; \quad n_3' = 100 \cdot P_7(3) = 22,69;$$
$$n_4' = 100 \cdot P_7(4) = 9,72; \quad n_5' = 100 \cdot P_7(5) = 2,5;$$
$$n_6' = 100 \cdot P_7(6) = 0,36; \quad n_7' = 100 \cdot P_7(7) = 0,02.$$

Оскільки частоти $n_0 = 4$, $n_6 = 2$ і $n_7 = 1$ малочисельні (менші п'яти), об'єднаємо їх з іншими частотами, а саме:

$$n_1 = 23 + 4 = 27; \; n_5 = 5 + 2 + 1 = 8.$$

За теоретичні частоти, що відповідають об'єднаним частотам, візьмемо суму відповідних теоретичних частот:

$$n_1' = 24,71 + 8,24 = 32,95; \; n_5' = 2,5 + 0,36 + 0,02 = 2,88.$$

Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього складемо розрахункову таблицю (*табл. 15.24*):

Таблиця 15.24

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	27	32,95	5,95	35,4025	1,0744
2	31	31,77	0,77	0,5929	0,0187
3	23	22,69	–0,31	0,0961	0,0042
4	11	9,72	–1,28	1,6384	0,1686
5	8	2,88	–5,12	26,2144	9,1022
Σ	100				$\chi^2_{\text{сп}} = 10,3681$

Із розрахункової *таблиці 15.24* отримуємо

$$\chi^2_{\text{сп}} = 10,3681 .$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (**додаток 7**) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів вільності

$$k = s - 1 = 5 - 1 = 4$$

знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 4) = 9,49 .$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{кр}}$, гіпотезу про біноміальний розподіл відхиляємо.

15.8. Перевірка гіпотези про розподіл Пуассона

Нехай задано точковий статистичний розподіл вибірки. Потрібно за допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про розподіл генеральної сукупності за законом Пуассона.

Правило 1. Для того щоб при рівні значущості α перевірити гіпотезу про те, що досліджувана випадкова величина X розподілена за законом Пуассона необхідно:

1) знайти за даним статистичним розподілом вибіркове середнє $\bar{x}_в$;

2) узяти як оцінку параметра λ розподілу Пуассона вибіркове середнє значення $\lambda^* = \bar{x}_в$;

3) знайти за формулою Пуассона (або за існуючою таблицею, наприклад, **додатку 3**) ймовірності P_i появи рівно i подій у n випробуваннях ($i = 1, 2, \ldots, r$, де r — максимальна кількість спостережених подій; n — об'єм вибірки);

4) визначити теоретичні частоти

$$n_i' = n \cdot P_i;$$

5) порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона, узявши кількість ступенів свободи $k = s - 2$, де s — кількість варіант вибірки (якщо проводилося об'єднання малочисельних частот в одну групу, то s — кількість варіант, що залишилися після об'єднання частот).

Приклад 1. У $n = 1000$ перевірках партій товару реєструвалася кількість x_i неякісної продукції, внаслідок чого було отримано статистичний розподіл (*табл. 15.25*) кількості x_i браку в n_i партіях товару:

Таблиця 15.25

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	242	349	234	107	43	21	3	1

Потрібно при рівні значущості 0,05 перевірити гіпотезу про те, що кількість неякісної продукції X розподілена за законом Пуассона.

Розв'язання. Спочатку знайдемо вибіркове середнє:

$$\bar{x}_в = \frac{0 \cdot 242 + 1 \cdot 349 + 2 \cdot 234 + 3 \cdot 107 + 4 \cdot 43 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1}{1000} = 1,44.$$

Візьмемо за оцінку параметра λ розподілу Пуассона вибіркове середнє:

$$\lambda^* = \bar{x}_{\text{в}} = 1,44.$$

Отже, закон Пуассона, що припускається, має такий вигляд:

$$P_{1000(i)} = 1,44^i \cdot \frac{e^{-1,4}}{i!}.$$

Поклавши $i = 1, 2, \ldots, 7$, обчислимо ймовірності $P_i = P_{1000}\,(i)$:

$$P_0 = 1,44^0 \cdot \frac{e^{-1,44}}{0!} \approx 0,2369; \qquad P_1 = 1,44^1 \cdot \frac{e^{-1,44}}{1!} \approx 0,2412;$$

$$P_2 = 1,44^2 \cdot \frac{e^{-1,44}}{2!} \approx 0,2456; \qquad P_3 = 1,44^3 \cdot \frac{e^{-1,44}}{3!} \approx 0,1179;$$

$$P_4 = 1,44^4 \cdot \frac{e^{-1,44}}{4!} \approx 0,0424; \qquad P_5 = 1,44^5 \cdot \frac{e^{-1,44}}{5!} \approx 0,0122;$$

$$P_6 = 1,44^6 \cdot \frac{e^{-1,44}}{6!} \approx 0,0029; \qquad P_7 = 1,44^7 \cdot \frac{e^{-1,44}}{7!} \approx 0,0006.$$

Знайдемо теоретичні частоти $n'_i = n \cdot P_i$:

$$n'_0 = 100 \cdot P_0 = 236,9; \qquad n'_1 = 100 \cdot P_1 = 341,2;$$

$$n'_2 = 100 \cdot P_2 = 245,6; \qquad n'_3 = 100 \cdot P_3 = 0,1179;$$

$$n'_4 = 100 \cdot P_4 = 42,4; \qquad n'_5 = 100 \cdot P_5 = 12,2;$$

$$n'_6 = 100 \cdot P_6 = 2,9; \qquad n'_7 = 100 \cdot P_7 = 0,6.$$

Оскільки частоти $n_6 = 3$ і $n_7 = 1$ малочисельні (менші п'яти), об'єднаємо їх з частотою n_5, а саме

$$n_5 = 21 + 3 + 1 = 25.$$

За теоретичну частоту, що відповідає об'єднаній частоті, візьмемо суму відповідних теоретичних частот:

$$n'_5 = 12,2 + 2,9 + 0,6 = 15,7.$$

Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього складемо розрахункову таблицю (*табл. 15.26*).

Таблиця 15.26

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
0	242	236,9	–5,1	26,01	0,1098
1	349	341,2	–7,8	60,84	0,1783
2	234	245,6	11,6	134,56	0,5479
3	107	117,9	10,9	118,81	1,0077
4	43	42,4	–0,6	0,36	0,0085
5	25	15,7	–9,3	86,49	5,5089
Σ	1000				$\chi^2_{\text{сп}} = 7,3611$

Із розрахункової *таблиці 15.26* отримуємо

$$\chi^2_{\text{сп}} = 7,3611.$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (**додаток 7**) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів свободи

$$k = s - 1 = 6 - 2 = 4$$

знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 4) = 9,49.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти гіпотезу про розподіл випадкової величини X (кількість неякісного товару в партії) за законом Пуассона.

Задачі до розділу 15

Задача 1. Із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3,2$ отримано вибірку об'єму $n = 64$, за якою знайдено вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}} = 13$. При рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 12$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : a \neq 12$.

Відповідь. Нульова гіпотеза відхиляється.

Задача 2. Із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3{,}3$ отримано вибірку об'єму $n = 121$, за якою знайдено вибіркове середнє $\bar{x}_в = 10{,}6$ При рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 10$ при конкуруючій гіпотезі

а) $H_1 : a \neq 10$;

б) $H_1 : a > 10$;

в) $H_1 : a < 10$.

Крім того, знайти потужності правостороннього та двостороннього критеріїв.

Відповідь. Нульові гіпотези відхиляються в усіх трьох випадках. Потужності правостороннього та двостороннього критеріїв дорівнюють відповідно 0,3721 і 0,2824.

Задача 3. Для вибірки об'єму $n = 20$, отриманої з нормальної генеральної сукупності, знайдено вибіркове середнє $\bar{x} = 37$ і «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 4{,}2$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $a = a_0 = 35$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : a \neq 35$.

Відповідь. Нульова гіпотеза відхиляється.

Задача 4. Контрольна довжина деякої деталі має становити $a = a_0 = 12$ мм. Контрольні вимірювання 25 випадково відібраних деталей показали такі результати (*табл. 15.27*):

Таблиця 15.27

Довжина, мм	11	11,5	12	12,5	13
Кількість деталей	6	8	7	3	1

Потрібно при рівні значущості 0,001 перевірити основну гіпотезу $H_0 : a \neq a_0 = 1250$ при конкуруючій гіпотезі:

а) $H_1 : a \neq a_0$;

б) $H_1 : a > a_0$;

в) $H_1 : a < a_0$.

Відповідь. а), б) Основна гіпотеза не відхиляється; в) основна гіпотеза відхиляється.

Задача 5. Із нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму $n = 31$, для якої знайдено вибіркову виправлену дисперсію $s^2 = 44$. Перевірити при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ основну гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 25$, якщо альтернативна гіпотеза $H_1 : \sigma_0^2 > 25$.

Відповідь. Основна гіпотеза відхиляється.

Задача 6. Із нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму $n = 26$, для якої знайдено вибіркову «виправлену» дисперсію $s^2 = 3{,}2$. Перевірити при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ основну гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2$, якщо альтернативна гіпотеза:

а) $H_1 : \sigma_0^2 > 2$;

б) $H_1 : \sigma_0^2 \neq 2$;

в) $H_1 : \sigma_0^2 < 2$;

Відповідь. а) Основна гіпотеза відхиляється; б), в) основна гіпотеза не відхиляється.

Задача 7. Із нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму $n = 200$ (*табл. 15.28*):

Таблиця 15.28

x_i	−1	0	1	2	3	4	5
n_i	17	24	30	34	35	33	27

Потрібно перевірити при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ основну гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 3$, якщо альтернативна гіпотеза $H_1 : \sigma_0^2 > 3$.

Відповідь. Основна гіпотеза відхиляється.

Задача 8. Для деякої події в результаті 100 незалежних випробувань було знайдено відносну частоту $\frac{m}{n} = 0{,}34$. При рівні значущості 0,05 потрібно перевірити основну гіпотезу $H_0 : p = p_0 = 0{,}25$ при конкуруючій гіпотезі $H_0 : p \neq 0{,}25$.

Відповідь. Основна гіпотеза відхиляється.

Задача 9. Для деякої події в результаті 256 незалежних випробувань було знайдено відносну частоту $\frac{m}{n} = 0{,}375$. При рівні значущості 0,01 потрібно перевірити основну гіпотезу $H_0 : p = p_0 = 0{,}4$ при конкуруючій гіпотезі:

а) $H_1 : p > 0{,}4$;

б) $H_1 : p < 0{,}4$.

Відповідь. Основна гіпотеза не відхиляється в обох випадках.

Задача 10. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності *X*, якщо з цієї сукупності отримано таку вибірку об'єму $n = 200$ (*табл. 15.29*):

Таблиця 15.29

x_i	15	16	17	18	19	20	21	22
n_i	8	28	31	41	33	28	24	7

Відповідь. Гіпотеза про нормальний розподіл відхиляється.

Задача 11. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності *X*, якщо з цієї сукупності отримано таку вибірку об'єму $n = 200$ (*табл. 15.30*):

Таблиця 15.30

$[x_i; x_{i+1})$	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)	[18; 21)
n_i	15	25	45	51	34	22	8

Відповідь. Гіпотеза про нормальний розподіл відхиляється.

Задача 12. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про рівномірний розподіл генеральної сукупності *X*, якщо з цієї сукупності отримано таку вибірку об'єму $n = 200$ (*табл. 15.31*):

Таблиця 15.31

$[x_i; x_{i+1})$	[4; 7)	[7; 10)	[10; 13)	[13; 16)	[16; 19)	[19; 22)	[22; 25)
n_i	12	9	21	8	11	19	20

Відповідь. Гіпотеза про рівномірний розподіл відхиляється.

Задача 13. Над подією A, імовірність появи якої дорівнює 0,4, проведено $n = 200$ незалежних випробувань, кожне з яких складається з $N = 10$ дослідів. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05 перевірити, чи справджується гіпотеза про біноміальний розподіл випадкової величини X (кількість появ події A), якщо отримано таку вибірку (*табл. 15.32*):

Таблиця 15.32

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	12	31	42	39	35	27	5	4	3

Вказівка. Слід об'єднати малочисельні частоти: n_0 об'єднати з n_1, а n_8, n_9 і n_{10} — з n_7.

Відповідь. Гіпотеза про біноміальний розподіл не відхиляється.

Задача 14. У $n = 1000$ перевірках партій товару реєструвалася кількість x_i неякісної продукції, внаслідок чого було отримано такий статистичний розподіл кількості x_i браку в n_i партіях товару (*табл. 15.33*):

Таблиця 15.33

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	427	363	154	41	9	3	2	1

Потрібно при рівні значущості 0,05 перевірити гіпотезу про те, що кількість неякісної продукції X розподілена за законом Пуассона.

Вказівка. Слід об'єднати малочисельні частоти: n_6 і n_7 з n_5.

Відповідь. Гіпотеза про розподіл Пуассона не відхиляється.

Питання для самоконтролю до розділу 15

1. Що називають статистичною гіпотезою?
2. Яку гіпотезу приймають за нульову, а яку — за альтернативну?
3. Що таке похибка першого роду?
4. Що таке похибка другого роду?
5. Що таке рівень значущості?
6. Що розуміють під статистичним критерієм?
7. Що таке критична область?
8. Що таке область прийняття гіпотези?
9. В чому полягає основний принцип перевірки статистичних гіпотез?
10. Що таке критичні точки?
11. Що таке правостороння, лівостороння, двостороння області?
12. Що таке потужність критерію?

Тест 11

1. Статистична оцінка θ^*параметра θ називається незміщеною, якщо
а) випадкова величина θ^* набуває тільки одного значення;
б) $M(\theta^*) = \theta$;
в) $M(\theta^*) = 1$;
г) $M(\theta^*)$ не існує;
д) відповідь відсутня.

2. Якщо деякий розподіл визначається одним параметром, то за методом моментів для оцінки параметру математичне сподівання прирівнюється до
а) будь-якого числа;
б) до вибіркового середнього;
в) до нуля;
г) для відповіді недостатньо умов;
д) відповідь відсутня.

3. Метод найбільшої правдоподібності полягає
а) у знаходженні критичних точок функції розподілу ймовірностей;
б) у знаходженні екстремумів будь-якої функції, що пов’язує оцінювані параметри;
в) у відшуканні максимуму функції правдоподібності від одного або кількох оцінюваннях параметрів;
г) залежно від виду випадкової величини змінюється і те, в чому полягає метод найбільшої правдоподібності.

4. Якщо (θ_1; θ_2) — довірчий інтервал для деякого оцінюваного параметра θ і $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \alpha$, то

а) $\alpha \approx 1$;

б) $\alpha \approx 0$;

в) $\alpha \approx 0{,}5$;

г) α — будь-яке число відрізку [0;1];

д) відповідь відсутня.

5. Формулу $\overline{x}_в - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ використовують для оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини X за вибірковим середнім $\overline{x}_в$ при

а) невідомому середньому квадратичному відхиленні σ;

б) відомому середньому квадратичному відхиленні σ;

в) будь-якому середньому квадратичному відхиленні, як відомому, так і не відомому;

г) $\sigma = 1$;

д) відповідь відсутня.

6. Формулу $\overline{x}_в - t_\alpha\dfrac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t_\alpha\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ (S — виправлене середнє квадратичне відхилення) використовують для оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини X за вибірковим середнім $\overline{x}_в$ при

а) невідомому середньому квадратичному відхиленні σ;

б) відомому середньому квадратичному відхиленні σ;

в) будь-якому середньо квадратичному відхиленні, як відомому так і не відомому;

г) $\sigma = 1$;

д) відповідь відсутня.

7. Серед запропонованих гіпотез виберіть ту, яка не є статистичною

а) про значення генерального середнього нормальної генеральної сукупності;

б) про значення дисперсії нормальної генеральної сукупності;

в) про рівність відносної частоти гіпотетичній ймовірності

г) про нормальний розподіл за критерієм Пірсона;

д) про рівноймовірність подій A і B.

8. Нульова (основна) і альтернативна (конкуруюча) гіпотези

а) доповнюють одна одну;
б) протилежні;
в) не взаємопов'язані;
г) можуть бути, як протилежними, так і перетинатись;
д) відповідь відсутня.

9. Відхилення правильної нульової гіпотези внаслідок перевірки називають

а) похибкою першого року;
б) похибкою другого року;
в) похибкою третього року;
г) критичною помилкою;
д) відповідь відсутня.

10. Виберіть термін, який не має відношення до перевірки статистичних гіпотез:

а) критична область;
б) потужність критерію;
в) умовна ймовірність;
г) рівень значущості *a;*
д) розподіл Стьюдента.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. *Бешелев С.Д.* Математико-статистические методи экспертных оценок / С.Д. Бешелев, Ф.Г. Гурвич. – М. : Статистика, 1980. – 263 с.
2. *Вайнеберг Дж.* Статистика : Пер. с англ. / Дж. Вайнеберг, Дж. Шуменер. — М. : Статистика, 1979. — 389 с.
3. *Вентцель Е.С.* Теорія вероятностей / Е.С. Вентцель. — М. : Физматгиз, 1963.
4. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 6-е, доп. / В.Е. Гмурман. — М. : Высш. шк., 2002. — 405 с.
5. *Гмурман В.Е.* Теорія вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. — М. : Высш. шк., 1999.
6. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. — М. : Физматгиз, 1961.
7. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. — М. : Наука, 1976. — 168 с.
8. *Горбань С.Ф.* Теория вероятностей и математическая статистика / С.Ф. Горбань, Н.В. Снижко. — К. : МАУП, 1999. – 168 с.
9. *Громыко Г.Л.* Статистика / Г.Л. Громыко. – М. : Изд-во МГУ, 1981. — С. 3–166.
10. *Гурский Е.М.* Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е.М. Гурский. — М. : Высш. шк., 1971.
11. *Жалдак М.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. — Полтава : «Довкілля-К», 2009. — 509 с.
12. *Жлуктенко В.І.* Практикум з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. — К. : КІНГ, 1991.
13. *Жлуктенко В.І.* Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. — К. : НМК ВО, 1991.
14. *Карасев А.И.* Теория вероятности и математическая статистика / А.И. Карасев. — М. : Статистика, 1977.
15. *Кимбл Г.* Как правильно пользоваться статистикой : Пер. с англ. / Г. Кимбл. — М. : Финансы и статистика, 1982. — 294 с.
16. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. — М. : ЮНИТИ, 2000.
17. *Лбов Г.С.* Методы обработки разнотипных эксперементальных данних / Г.С. Лбов. — Новосибирск : Наука, 1981.
18. Математическая статистика : Учебн. / В.М. Иванова [и др.]. — М. : Высш. шк., 1981. — 371 с.
19. *Мюллер П.* Таблицы по математической статистике : Пер. с нем. / П. Мюллер, П. Нойман, Р. Шторм. — М. : Финансы и статистика, 1982. — 178 с.

20. *Окунь Я.* Факторный аналіз : Пер. с польск. / Я. Окунь. — М. : Статистика, 1974.
21. *Сидоренко Е.В.* Методы математической обработки в психологи / Е.В. Сидоренко. — СПб. : «Речь», 2001. — 350 с.
22. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – К. : Наук. думка, 1978. — 582 с.
23. *Турчин В.М.* Математична статистика. Навч. посіб. / В.М. Турчин. — К. : «Академія», 1999. — 240 с.
24. *Хастинг Н.* Справочник по статистическим распределениям : Пер. с англ. / Н. Хастинг, Дж. Пикон. — М. : Статистика, 1980. — 95 с.
25. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков. — М., 1978.
26. *Шефтель З.Г.* Теорія ймовірностей / *З.Г. Шефтель.* — К., 1994.

Додатки

Додаток 1

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,22	0,0871	0,44	0,1700	0,66	0,2454	0,88	0,3106
0,01	0,0040	0,23	0,0910	0,45	0,1736	0,67	0,2486	0,89	0,3133
0,02	0,0080	0,24	0,0948	0,46	0,1772	0,68	0,2517	0,90	0,3159
0,03	0,0120	0,25	0,0987	0,47	0,1808	0,69	0,2549	0,91	0,3186
0,04	0,0160	0,26	0,1026	0,48	0,1844	0,70	0,2580	0,92	0,3212
0,05	0,0199	0,27	0,1064	0,49	0,1879	0,71	0,2611	0,93	0,3238
0,06	0,0239	0,28	0,1103	0,50	0,1915	0,72	0,2642	0,94	0,3264
0,07	0,0279	0,29	0,1141	0,51	0,1950	0,73	0,2673	0,95	0,3289
0,08	0,0319	0,30	0,1179	0,52	0,1985	0,74	0,2704	0,96	0,3315
0,09	0,0359	0,31	0,1217	0,53	0,2019	0,75	0,2734	0,97	0,3340
1,10	0,0398	0,32	0,1255	0,54	0,2054	0,76	0,2764	0,98	0,3365
0,11	0,0438	0,33	0,1293	0,55	0,2088	0,77	0,2794	0,99	0,3389
0,12	0,0478	0,34	0,1331	0,56	0,2123	0,78	0,2823	1,00	0,3413
0,13	0,0517	0,35	0,1368	0,57	0,2157	0,79	0,2852	1,01	0,3438
0,14	0,0557	0,36	0,1406	0,58	0,2190	0,80	0,2881	1,02	0,3461
0,15	0,0596	0,37	0,1443	0,59	0,2224	0,81	0,2910	1,03	0,3485
0,16	0,0636	0,38	0,1480	0,60	0,2257	0,82	0,2939	1,04	0,3508
0,17	0,0675	0,39	0,1517	0,61	0,2291	0,83	0,2967	1,05	0,3531
0,18	0,0714	0,40	0,1554	0,62	0,2324	0,84	0,2995	1,06	0,3554
0,19	0,0753	0,41	0,1591	0,63	0,2357	0,85	0,3023	1,07	0,3577
0,20	0,0793	0,42	0,1628	0,64	0,2389	0,86	0,3051	1,08	0,3599
0,21	0,0832	0,43	0,1664	0,65	0,2422	0,87	0,3078	1,09	0,3621

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,10	0,3643	1,47	0,4292	1,84	0,4671	2,21	0,4864	2,66	0,4961
1,11	0,3665	1,48	0,4306	1,85	0,4678	2,22	0,4868	2,68	0,4963
1,12	0,3686	1,49	0,4319	1,86	0,4686	2,23	0,4871	2,70	0,4965
1,13	0,3708	1,50	0,4332	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,72	0,4967
1,14	0,3729	1,51	0,4345	1,88	0,4699	2,25	0,4878	2,74	0,4969
1,15	0,3749	1,52	0,4357	1,89	0,4706	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,16	0,3770	1,53	0,4370	1,90	0,4713	2,27	0,4884	2,78	0,4973
1,17	0,3790	1,54	0,4382	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,80	0,4974
1,18	0,3810	1,55	0,4394	1,92	0,4726	2,29	0,4890	2,82	0,4976
1,19	0,3830	1,56	0,4406	1,93	0,4732	2,30	0,4893	2,84	0,4977
1,20	0,3849	1,57	0,4418	1,94	0,4738	2,31	0,4896	2,86	0,4979
1,21	0,3869	1,58	0,4429	1,95	0,4744	2,32	0,4898	2,88	0,4980
1,22	0,3888	1,59	0,4441	1,96	0,4750	2,33	0,4901	2,90	0,4981
1,23	0,3907	1,60	0,4452	1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,92	0,4982
1,24	0,3925	1,61	0,4463	1,98	0,4761	2,35	0,4906	2,94	0,4984
1,25	0,3944	1,62	0,4474	1,99	0,4767	2,36	0,4909	2,96	0,4985
1,26	0,3962	1,63	0,4484	2,00	0,4772	2,37	0,4911	2,98	0,4986
1,27	0,3980	1,64	0,4495	2,01	0,4778	2,38	0,4913	3,00	0,4987
1,28	0,3997	1,65	0,4505	2,02	0,4783	2,39	0,4916	3,05	0,4989
1,29	0,4015	1,66	0,4515	2,03	0,4788	2,40	0,4918	3,10	0,49903
1,30	0,4032	1,67	0,4525	2,04	0,4793	2,41	0,4920	3,15	0,49918
1,31	0,4049	1,68	0,4535	2,05	0,4798	2,42	0,4922	3,20	0,49931
1,32	0,4066	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,43	0,4925	3,25	0,49942
1,33	0,4082	1,70	0,4554	2,07	0,4808	2,44	0,4927	3,30	0,49952
1,34	0,4099	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,45	0,4929	3,35	0,49960
1,35	0,4115	1,72	0,4573	2,09	0,4817	2,46	0,4931	3,40	0,49966
1,36	0,4131	1,73	0,4582	2,10	0,4821	2,47	0,4932	3,50	0,49977
1,37	0,4147	1,74	0,4591	2,11	0,4826	2,48	0,4934	3,60	0,49984
1,38	0,4162	1,75	0,4599	2,12	0,4830	2,49	0,4936	3,70	0,49989
1,39	0,4177	1,76	0,4608	2,13	0,4834	2,50	0,4938	3,80	0,499928
1,40	0,4192	1,77	0,4616	2,14	0,4838	2,52	0,4941	3,90	0,499952
1,41	0,4207	1,78	0,4625	2,15	0,4842	2,54	0,4945	4,00	0,499968
1,42	0,4222	1,79	0,4633	2,16	0,4846	2,56	0,4948	4,20	0,499987
1,43	0,4236	1,80	0,4641	2,17	0,4850	2,58	0,4951	4,40	0,4999946
1,44	0,4251	1,81	0,4649	2,18	0,4854	2,60	0,4953	4,60	0,4999979
1,45	0,4265	1,82	0,4656	2,19	0,4857	2,62	0,4956	4,80	0,4999992
1,46	0,4279	1,83	0,4664	2,20	0,4861	2,64	0,4959	5,00	0,4999997

Додаток 2

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,4	0,0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
4,1	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
4,2	0001	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Додаток 3

Таблиця значень функції Пуассона $P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031
6	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002	0003	0005

m \ λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
0	0,3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1804
4	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5	0045	0062	0084	0111	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6	0008	0012	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0027	0034
8	0000	0000	0001	0001	0001	0002	0003	0005	0006	0009
9	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0002

m \ λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
0	0,1225	1108	1003	0907	0821	0743	0672	0608	0550	0498
1	2572	2438	2306	2177	2052	1931	1815	1703	1596	1494
2	2700	2681	2652	2613	2565	2510	2450	2384	2314	2240
3	1890	1966	2033	2090	2138	2176	2205	2225	2237	2240
4	0992	1082	1169	1254	1336	1414	1488	1557	1622	1680
5	0417	0476	0538	0602	0668	0735	0804	0872	0940	1008
6	0146	0174	0206	0241	0278	0319	0362	0407	0455	0504
7	0044	0055	0068	0083	0099	0118	0139	0163	0188	0216
8	0011	0015	0019	0025	0031	0038	0047	0057	0068	0081
9	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0018	0022	0027
10	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0008
11	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0002	0002

m \ λ	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9	10
0	0,0498	0302	0183	0111	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	1494	1057	0733	0500	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	2240	1850	1465	1125	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	2240	2158	1954	1687	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	1680	1888	1954	1898	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	1008	1322	1563	1708	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0504	0771	1042	1281	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0216	0385	0595	0824	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8	0081	0169	0298	0463	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0027	0066	0132	0232	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	0008	0023	0053	0104	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11	0002	0007	0019	0043	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12	0001	0002	0006	0016	0034	0113	0263	0481	0728	0948
13	0000	0001	0002	0006	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14	0000	0000	0001	0002	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15	0000	0000	0000	0001	0002	0009	0033	0090	0194	0347
16	0000	0000	0000	0000	0000	0003	0014	0045	0109	0217
17	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0006	0021	0058	0128
18	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0009	0029	0071
19	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0004	0014	0037
20	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0006	0019
21	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0003	0009
22	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0004

Додаток 4

Таблиця значень функції $t_\alpha = t(\alpha, n)$

n \ α	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,25	4,78
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92

n \ α	0,95	0,99	0,999
20	2,093	2,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,009	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,991	2,640	3,418
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

Додаток 5

Таблиця значень функції $q = q(\alpha, n)$

n \ α	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92

n \ α	0,95	0,99	0,999
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,211
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

Додаток 6

Критичні точки розподілу Стьюдента

Кількість ступенів вільності k	**Рівень значущості α (двостороння критична область)**					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29	636,58
2	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,-72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (одностороння і критична область)					

Додаток 7
Критичні точки розподілу χ2

Кількість ступенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,63	5,02	3,84	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,21	7,38	5,99	0,103	0,051	0,020
3	11,34	9,35	7,81	0,352	0,216	0,115
4	13,28	11,14	9,49	0,711	0,484	0,297
5	15,09	12,83	11,07	1,15	0,831	0,554
6	16,81	14,45	12,59	1,64	1,24	0,872
7	18,48	16,01	14,07	2,17	1,69	1,24
8	20,09	17,53	15,51	2,73	2,18	1,65
9	21,67	19,02	16,92	3,33	2,70	2,09
10	23,21	20,48	18,31	3,94	3,25	2,56
11	24,73	21,92	19,68	4,57	3,82	3,05
12	26,22	23,34	21,03	5,23	4,40	3,57
13	27,69	24,74	22,36	5,89	5,01	4,11
14	29,14	26,12	23,68	6,57	5,63	4,66
15	30,58	27,49	25,00	7,26	6,26	5,23
16	32,00	28,85	26,30	7,96	6,91	5,81
17	33,41	30,19	27,59	8,67	7,56	6,41
18	34,81	31,53	28,87	9,39	8,23	7,01
19	36,19	32,85	30,14	10,12	8,91	7,63
20	37,57	34,17	31,41	10,85	9,59	8,26
21	38,93	35,48	32,67	11,59	10,28	8,90
22	40,29	36,78	33,92	12,34	10,98	9,54
23	41,64	38,08	35,17	13,09	11,69	10,20
24	42,98	39,36	36,42	13,85	12,40	10,86
25	44,31	40,65	37,65	14,61	13,12	11,52
26	45,64	41,92	38,89	15,38	13,84	12,20
27	46,96	43,19	40,11	16,15	14,57	12,88
28	48,28	44,46	41,34	16,93	15,31	13,56
29	49,59	45,72	42,56	17,71	16,05	14,26
30	50,89	46,98	43,77	18,49	16,79	14,95

Додаток 8

Критичні точки розподілу F Фішера—Снедекора

	Рівень значущості α = 0,01											
k_2 \ k_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
31	7,53	5,36	4,48	3,99	3,67	3,45	3,28	3,15	3,04	2,96	2,88	2,82
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93	2,86	2,80
33	7,47	5,31	4,44	3,95	3,63	3,41	3,24	3,11	3,00	2,91	2,84	2,78
34	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09	2,98	2,89	2,82	2,76

Рівень значущості α = 0,01												
$k_2 \backslash k_1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74
36	7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05	2,95	2,86	2,79	2,72
37	7,37	5,23	4,36	3,87	3,56	3,33	3,17	3,04	2,93	2,84	2,77	2,71
38	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,92	2,83	2,75	2,69
39	7,33	5,19	4,33	3,84	3,53	3,30	3,14	3,01	2,90	2,81	2,74	2,68
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66
41	7,30	5,16	4,30	3,81	3,50	3,28	3,11	2,98	2,87	2,79	2,71	2,65
42	7,28	5,15	4,29	3,80	3,49	3,27	3,10	2,97	2,86	2,78	2,70	2,64
43	7,26	5,14	4,27	3,79	3,48	3,25	3,09	2,96	2,85	2,76	2,69	2,63
44	7,25	5,12	4,26	3,78	3,47	3,24	3,08	2,95	2,84	2,75	2,68	2,62
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61
46	7,22	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,06	2,93	2,82	2,73	2,66	2,60
47	7,21	5,09	4,23	3,75	3,43	3,21	3,05	2,92	2,81	2,72	2,65	2,59
48	7,19	5,08	4,22	3,74	3,43	3,20	3,04	2,91	2,80	2,71	2,64	2,58
49	7,18	5,07	4,21	3,73	3,42	3,19	3,03	2,90	2,79	2,71	2,63	2,57
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,63	2,56
55	7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
65	7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,80	2,69	2,61	2,53	2,47
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,51	2,45
75	6,99	4,90	4,05	3,58	3,27	3,05	2,89	2,76	2,65	2,57	2,49	2,43
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42
85	6,94	4,86	4,02	3,55	3,24	3,02	2,86	2,73	2,62	2,54	2,46	2,40
90	6,93	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,45	2,39
95	6,91	4,84	3,99	3,52	3,22	3,00	2,83	2,70	2,60	2,51	2,44	2,38
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,66	2,55	2,47	2,39	2,33
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63	2,53	2,44	2,37	2,31
175	6,78	4,73	3,90	3,43	3,12	2,91	2,74	2,61	2,51	2,42	2,35	2,29
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,31	2,24
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,68	2,56	2,45	2,37	2,29	2,23
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22
700	6,67	4,64	3,81	3,35	3,04	2,83	2,66	2,54	2,43	2,35	2,27	2,21
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2,20
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

Рівень значущості α = 0,01

k_2 \ k_1	**14**	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**	**∞**
1	6143	6170	6209	6234	6260	6286	6302	6324	6334	6350	6360	6366
2	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,48	99,49	99,49	99,50	99,50
3	26,92	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,35	26,28	26,24	26,18	26,15	26,13
4	14,25	14,15	14,02	13,93	13,84	13,75	13,69	13,61	13,58	13,52	13,49	13,46
5	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,17	9,13	9,08	9,04	9,02
6	7,60	7,52	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,02	6,99	6,93	6,90	6,88
7	6,36	6,28	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,79	5,75	5,70	5,67	5,65
8	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,00	4,96	4,91	4,88	4,86
9	5,01	4,92	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,81	3,74	3,71	3,66	3,62	3,60
12	4,05	3,97	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,50	3,47	3,41	3,38	3,36
13	3,86	3,78	3,66	3,59	3,51	3,43	3,38	3,31	3,27	3,22	3,19	3,17
14	3,70	3,62	3,51	3,43	3,35	3,27	3,22	3,15	3,11	3,06	3,03	3,00
15	3,56	3,49	3,37	3,29	3,21	3,13	3,08	3,01	2,98	2,92	2,89	2,87
16	3,45	3,37	3,26	3,18	3,10	3,02	2,97	2,90	2,86	2,81	2,78	2,75
17	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,87	2,80	2,76	2,71	2,68	2,65
18	3,27	3,19	3,08	3,00	2,92	2,84	2,78	2,71	2,68	2,62	2,59	2,57
19	3,19	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,71	2,64	2,60	2,55	2,51	2,49
20	3,13	3,05	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,57	2,54	2,48	2,44	2,42
21	3,07	2,99	2,88	2,80	2,72	2,64	2,58	2,51	2,48	2,42	2,38	2,36
22	3,02	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,36	2,33	2,31
23	2,97	2,89	2,78	2,70	2,62	2,54	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,37	2,33	2,27	2,24	2,21
25	2,89	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,40	2,33	2,29	2,23	2,19	2,17
26	2,86	2,78	2,66	2,58	2,50	2,42	2,36	2,29	2,25	2,19	2,16	2,13
27	2,82	2,75	2,63	2,55	2,47	2,38	2,33	2,26	2,22	2,16	2,12	2,10
28	2,79	2,72	2,60	2,52	2,44	2,35	2,30	2,23	2,19	2,13	2,09	2,06
29	2,77	2,69	2,57	2,49	2,41	2,33	2,27	2,20	2,16	2,10	2,06	2,03
30	2,74	2,66	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,17	2,13	2,07	2,03	2,01
31	2,72	2,64	2,52	2,45	2,36	2,27	2,22	2,14	2,11	2,04	2,01	1,98
32	2,70	2,62	2,50	2,42	2,34	2,25	2,20	2,12	2,08	2,02	1,98	1,96
33	2,68	2,60	2,48	2,40	2,32	2,23	2,18	2,10	2,06	2,00	1,96	1,93
34	2,66	2,58	2,46	2,38	2,30	2,21	2,16	2,08	2,04	1,98	1,94	1,91
35	2,64	2,56	2,44	2,36	2,28	2,19	2,14	2,06	2,02	1,96	1,92	1,89
36	2,62	2,54	2,43	2,35	2,26	2,18	2,12	2,04	2,00	1,94	1,90	1,87
37	2,61	2,53	2,41	2,33	2,25	2,16	2,10	2,03	1,98	1,92	1,88	1,85
38	2,59	2,51	2,40	2,32	2,23	2,14	2,09	2,01	1,97	1,90	1,86	1,84

Рівень значущості α = 0,01												
k_2 \ k_1	**14**	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**	**∞**
39	2,58	2,50	2,38	2,30	2,22	2,13	2,07	1,99	1,95	1,89	1,85	1,82
40	2,56	2,48	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	1,98	1,94	1,87	1,83	1,80
41	2,55	2,47	2,36	2,28	2,19	2,10	2,04	1,97	1,92	1,86	1,82	1,79
42	2,54	2,46	2,34	2,26	2,18	2,09	2,03	1,95	1,91	1,85	1,80	1,78
43	2,53	2,45	2,33	2,25	2,17	2,08	2,02	1,94	1,90	1,83	1,79	1,76
44	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,07	2,01	1,93	1,89	1,82	1,78	1,75
45	2,51	2,43	2,31	2,23	2,14	2,05	2,00	1,92	1,88	1,81	1,77	1,74
46	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,99	1,91	1,86	1,80	1,76	1,73
47	2,49	2,41	2,29	2,21	2,12	2,03	1,98	1,90	1,85	1,79	1,74	1,71
48	2,48	2,40	2,28	2,20	2,12	2,02	1,97	1,89	1,84	1,78	1,73	1,70
49	2,47	2,39	2,27	2,19	2,11	2,02	1,96	1,88	1,83	1,77	1,72	1,69
50	2,46	2,38	2,27	2,18	2,10	2,01	1,95	1,87	1,82	1,76	1,71	1,68
55	2,42	2,34	2,23	2,15	2,06	1,97	1,91	1,83	1,78	1,71	1,67	1,64
60	2,39	2,31	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,79	1,75	1,68	1,63	1,60
65	2,37	2,29	2,17	2,09	2,00	1,91	1,85	1,77	1,72	1,65	1,60	1,57
70	2,35	2,27	2,15	2,07	1,98	1,89	1,83	1,74	1,70	1,62	1,57	1,54
75	2,33	2,25	2,13	2,05	1,96	1,87	1,81	1,72	1,67	1,60	1,55	1,52
80	2,31	2,23	2,12	2,03	1,94	1,85	1,79	1,70	1,65	1,58	1,53	1,49
85	2,30	2,22	2,10	2,02	1,93	1,83	1,77	1,69	1,64	1,56	1,51	1,47
90	2,29	2,21	2,09	2,00	1,92	1,82	1,76	1,67	1,62	1,55	1,49	1,46
95	2,28	2,20	2,08	1,99	1,90	1,81	1,75	1,66	1,61	1,53	1,48	1,44
100	2,27	2,19	2,07	1,98	1,89	1,80	1,74	1,65	1,60	1,52	1,47	1,43
125	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,76	1,69	1,60	1,55	1,47	1,41	1,37
150	2,20	2,12	2,00	1,92	1,83	1,73	1,66	1,57	1,52	1,43	1,38	1,33
175	2,19	2,10	1,98	1,90	1,81	1,71	1,64	1,55	1,50	1,41	1,35	1,30
200	2,17	2,09	1,97	1,89	1,79	1,69	1,63	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
300	2,14	2,06	1,94	1,85	1,76	1,66	1,59	1,50	1,44	1,35	1,28	1,22
400	2,13	2,05	1,92	1,84	1,75	1,64	1,58	1,48	1,42	1,32	1,25	1,19
500	2,12	2,04	1,92	1,83	1,74	1,63	1,57	1,47	1,41	1,31	1,23	1,16
600	2,11	2,03	1,91	1,82	1,73	1,63	1,56	1,46	1,40	1,30	1,22	1,15
700	2,11	2,03	1,90	1,82	1,72	1,62	1,55	1,45	1,39	1,29	1,21	1,14
800	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,62	1,55	1,45	1,39	1,29	1,20	1,13
1000	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	2,08	2,00	1,88	1,79	1,70	1,59	1,52	1,42	1,36	1,25	1,15	1,00

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,11	2,08
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,06	2,02
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00
41	4,08	3,23	2,83	2,60	2,44	2,33	2,24	2,17	2,12	2,07	2,03	2,00
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99
43	4,07	3,21	2,82	2,59	2,43	2,32	2,23	2,16	2,11	2,06	2,02	1,99
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	2,00	1,97
47	4,05	3,20	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,09	2,04	2,00	1,96
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
49	4,04	3,19	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,08	2,03	1,99	1,96
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95
55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89
75	3,97	3,12	2,73	2,49	2,34	2,22	2,13	2,06	2,01	1,96	1,92	1,88
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,87
85	3,95	3,10	2,71	2,48	2,32	2,21	2,12	2,05	1,99	1,94	1,90	1,86
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,90	1,86
95	3,94	3,09	2,70	2,47	2,31	2,20	2,11	2,04	1,98	1,93	1,89	1,85
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,83
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,87	1,83
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
175	3,90	3,05	2,66	2,42	2,27	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,84	1,81
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,97	1,91	1,86	1,82	1,78
400	3,86	3,02	2,63	2,39	2,24	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,77
600	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	2,02	1,95	1,90	1,85	1,80	1,77
700	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,77
800	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	**14**	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**	**∞**
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
2	19,42	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,48	19,49	19,49	19,49	19,50
3	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,56	8,55	8,54	8,53	8,53
4	5,87	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	5,63
5	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,41	4,39	4,37	4,37
6	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,73	3,71	3,69	3,68	3,67
7	3,53	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,27	3,25	3,24	3,23
8	3,24	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	2,99	2,97	2,95	2,94	2,93
9	3,03	2,99	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
10	2,86	2,83	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,60	2,59	2,56	2,55	2,54
11	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,47	2,46	2,43	2,42	2,40
12	2,64	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,37	2,35	2,32	2,31	2,30
13	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,22	2,21
14	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13
15	2,42	2,38	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,14	2,12	2,10	2,08	2,07
16	2 37	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07	2,04	2,02	2,01
17	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96
18	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	1,92
19	2,26	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,96	1,94	1,91	1,89	1,88
20	2,22	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,93	1,91	1,88	1,86	1,84
21	2,20	2,16	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,90	1,88	1,84	1,83	1,81
22	2,17	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,87	1,85	1,82	1,80	1,78
23	2,15	2,11	2,05	2,01	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
24	2,13	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,77	1,75	1,73
25	2,11	2,07	2,01	1,96	1,92	1,87	1,84	1,80	1,78	1,75	1,73	1,71
26	2,09	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69
27	2,08	2,04	1,97	1,93	1,88	1,84	1,81	1,76	1,74	1,71	1,69	1,67
28	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,75	1,73	1,69	1,67	1,65
29	2,05	2,01	1,94	1,90	1,85	1,81	1,77	1,73	1,71	1,67	1,65	1,64
30	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,70	1,66	1,64	1,62
31	2,03	1,98	1,92	1,88	1,83	1,78	1,75	1,70	1,68	1,65	1,62	1,61
32	2,01	1,97	1,91	1,86	1,82	1,77	1,74	1,69	1,67	1,63	1,61	1,59
33	2,00	1,96	1,90	1,85	1,81	1,76	1,72	1,68	1,66	1,62	1,60	1,58
34	1,99	1,95	1,89	1,84	1,80	1,75	1,71	1,67	1,65	1,61	1,59	1,57
35	1,99	1,94	1,88	1,83	1,79	1,74	1,70	1,66	1,63	1,60	1,57	1,56
36	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,73	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,55
37	1,97	1,93	1,86	1,82	1,77	1,72	1,68	1,64	1,62	1,58	1,55	1,54
38	1,96	1,92	1,85	1,81	1,76	1,71	1,68	1,63	1,61	1,57	1,54	1,53

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
39	1,95	1,91	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,62	1,60	1,56	1,53	1,52
40	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
41	1,94	1,90	1,83	1,79	1,74	1,69	1,65	1,61	1,58	1,54	1,52	1,50
42	1,94	1,89	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,60	1,57	1,53	1,51	1,49
43	1,93	1,89	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,59	1,57	1,53	1,50	1,48
44	1,92	1,88	1,81	1,77	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,52	1,49	1,48
45	1,92	1,87	1,81	1,76	1,71	1,66	1,63	1,58	1,55	1,51	1,49	1,47
46	1,91	1,87	1,80	1,76	1,71	1,65	1,62	1,57	1,55	1,51	1,48	1,46
47	1,91	1,86	1,80	1,75	1,70	1,65	1,61	1,57	1,54	1,50	1,47	1,46
48	1,90	1,86	1,79	1,75	1,70	1,64	1,61	1,56	1,54	1,49	1,47	1,45
49	1,90	1,85	1,79	1,74	1,69	1,64	1,60	1,56	1,53	1,49	1,46	1,44
50	1,89	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
55	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,53	1,50	1,46	1,43	1,41
60	1,86	1,82	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,51	1,48	1,44	1,41	1,39
65	1,85	1,80	1,73	1,69	1,63	1,58	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37
70	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,57	1,53	1,48	1,45	1,40	1,37	1,35
75	1,83	1,78	1,71	1,66	1,61	1,55	1,52	1,47	1,44	1,39	1,36	1,34
80	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32
85	1,81	1,76	1,70	1,65	1,59	1,54	1,50	1,45	1,42	1,37	1,34	1,31
90	1,80	1,76	1,69	1,64	1,59	1,53	1,49	1,44	1,41	1,36	1,33	1,30
95	1,80	1,75	1,68	1,63	1,58	1,52	1,48	1,43	1,40	1,35	1,32	1,29
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,52	1,48	1,42	1,39	1,34	1,31	1,28
125	1,77	1,73	1,66	1,60	1,55	1,49	1,45	1,40	1,36	1,31	1,27	1,25
150	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,48	1,44	1,38	1,34	1,29	1,25	1,22
175	1,75	1,70	1,63	1,58	1,52	1,46	1,42	1,36	1,33	1,27	1,23	1,20
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
300	1,72	1,68	1,61	1,55	1,50	1,43	1,39	1,33	1,30	1,23	1,19	1,15
400	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,17	1,13
500	1,71	1,66	1,59	1,54	1,48	1,42	1,38	1,31	1,28	1,21	1,16	1,11
600	1,71	1,66	1,59	1,54	1,48	1,41	1,37	1,31	1,27	1,20	1,15	1,10
700	1,71	1,66	1,59	1,53	1,48	1,41	1,37	1,30	1,27	1,20	1,15	1,09
800	1,70	1,66	1,58	1,53	1,47	1,41	1,37	1,30	1,26	1,20	1,14	1,09
1000	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00

Додаток 9

Латинський алфавіт

A	a	а
B	B	бе
C	C	це
D	D	де
E	E	е
F	F	еф
G	G	ге (же)
H	h	ха (аш)
I	i	і
J	j	йот (жі)
K	k	ка
L	l	ель
M	m	ем
N	n	ен
O	o	о
P	p	пе
Q	q	ку
R	r	ер
S	s	ес
T	t	те
U	u	у
V	v	ве
W	w	дубль-ве
X	x	ікс
Y	y	ігрек
Z	z	зет

Додаток 10
Грецький алфавіт

Α	α	альфа	Ν	ν	ню (ні)
Β	β	бета	Ξ	ξ	ксі
Γ	γ	гамма	Ο	ο	омікрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пі
Ε	ε	епсілон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	дзета	Σ	σ	сігма
Η	η	ета	Τ	τ	тау
Θ	θ, ϑ	тета	ϒ	υ	юпсілон (іпсілон)
Ι	ι	йота	Φ	φ	фі
Κ	κ	каппа	Χ	χ	хі
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	псі
Μ	μ	мю (мі)	Ω	ω	омега

Зміст

Навчальне видання

Жильцов Олексій Борисович

Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах

Навчальний посібник для студентів нематематичних спеціальностей вищих навчальних закладів

Видання підготовлене до друку в НМЦ видавничої діяльності
Київського університету імені Бориса Грінченка

Завідувач НМЦ видавничої діяльності *М. М. Прядко*
Відповідальна за випуск *А. М. Даниленко*
Дизайн та художнє оформлення *Т. В. Нестерової*
Над виданням працювали *Т. М. Піхота, О. Д. Ткаченко*

Підписано до друку 21.05.2015 р. Формат 60х84$^{1}/_{16}$.
Ум. друк. арк. 19,53. Обл.-вид. арк. 17,38. Наклад 300 пр. Зам. № 5–073.

Київський університет імені Бориса Грінченка,
вул. Бульварно-Кудрявська, 18/2, м. Київ, 04053.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи Серія ДК № 4013 від 17.03.2011 р.