№ 09–10'2015 р.

МАТЕМАТИЧНА ГАЗЕТА

Олександр Борисович РУДИК,
доцент кафедри методики природничо-математичної освіти і технологій
Інституту післядипломної педагогічної освіти
Київського університету ім. Бориса Грінченка

ЗАДАЧІ ЛОГІЧНОГО ХАРАКТЕРУ ДЛЯ 6 КЛАСУ

У цій статті пропонуються завдання логічного характеру з повним і стислим розв'язанням. Цю збірку завдань було запропоновано як завдання на літо учням, переведеним з 5 у 6 (математичний) клас Києво-Печерського ліцею № 171 «Лідер» у червні 2014 року. Автор зіткнувся з цією збіркою як батько учениці, яка розв'язувала ці завдання. Власне з розв'язанням задач в учнів класів з поглибленим вивченням математики проблем немає: понятійний апарат умов та алгоритми розв'язання цих завдань доступні і часто вже відомі учням. Але є проблеми щодо *стислого* опису розв'язання, бо компетенції щодо *фахового* мовлення, символьного запису й унаочнення лише формуються у цей час. І саме під час розв'язування задач логічного характеру. Якщо учень 6 класу самостійно отримає відповідь до такої задачі, він навряд чи зможе самостійно й *коректно* описати її розв'язання.

Запровадження пропедевтичного курсу логіки у початковій школі, наприклад, з другого класу, *ніяк не вирішує і не полегшує розв'язання проблеми мовлення, символьного запису й унаочнення.* Зазвичай у робочих зошитах, відведеного на розв'язання, місця достатньо лише для написання відповіді й натяків на розв'язання. Це стає особливо очевидним, якщо врахувати розмір літер почерку школяра початкової школи. Інакше кажучи, автори посібників не вважають за потрібне навчати учнів початкової школи так, щоб не було потреби їх переучувати. Проблему неможливо вирішити, запровадивши окремі зошити для запису повноцінного розв'язання. Швидкість писання учнів початкової школи така, що записування триватиме суттєво довше від часу, протягом якого учень спроможний концентрувати увагу. Щоб не відбити бажання дітей займатися такими завданнями й математикою взагалі, вчителі зазвичай не звертають увагу на довершеність розв'язання таких задач у початковій школі.

Якщо ще можна і потрібно сподіватися від учнів самостійно породити ідеї розв'язання, то *самостійно* опанувати *загальноприйнятими* прийомами висловлення думки для них буде не під силу. Навіть у старших класах. Колись таки потрібно починати ознайомлювати учнів з прийомами стислого запису розв'язання й *вимагати* від них аналогічного оформлення. Після 8 класу — пізно, бо цьому завадить потужний потік понятійного апарату багатьох предметів. У тому числі й математики. На думку автора публікації, починати краще у 6 класі, а результати такої виснажливої (і для учня, і для вчителя) роботи виявляться не раніше, ніж за три роки при наявності щонайменше 8 годин на тиждень.

Підготовка у педагогічних вишах і у минулому, й зараз не передбачає вироблення *стійких* навичок розв'язування і навчання розв'язування логічних задач. Тому допомагати потрібно і учням, і студентам, і вчителям. Хоча б поданням таких розв'язань, що все *зрозуміло і жодного слова не викинути.*

Завдання 1. Чи можна на дошці 5×5 поставити 3 шахових коня таким чином, щоб вони «били» всі незайняті ними клітини?

Розв'язання. З 25 клітин дошки 12 клітин одного кольору, 13 — іншого. Шаховий кінь б'є поля кольору відмінного від кольору клітини, на якій стоїть. Таких полів під боєм не більше ніж 8. Якщо 3 шахових коня стоять на клітинах одного кольору, то решта клітин цього кольору не знаходяться під боєм. Залишилося розглянути випадок, коли 1 кінь стоїть на полі одного кольору, а 2 інших — на полях іншого кольору. $8 + 2 = 10 < 12$. Таким чином, щонайменше 2 поля не будуть під боєм.

Відповідь: так розташувати шахові фігури неможливо.

Завдання 2. Натуральне число можна множити на 2 і довільним чином переставляти в ньому цифри (заборонено лише ставити 0 на перше місце). Доведіть, що перетворити число 1 в число 74 за допомогою таких операцій неможливо.

Доведення. Подамо на схемі всіх можливих попередників числа 74 при виконанні вказаних дій.

$$\begin{tikzcd} & 74 \arrow[dr, shift left] & \\ 37 \arrow[ur, "\cdot 2"] \arrow[d, shift left] & & 47 \arrow[ul, shift left] \\ 73 \arrow[u, shift left] & & \end{tikzcd}$$

Завдання 3. Двоє мудреців написали на семи картках числа від 5 до 11. Після цього вони змішали картки, перший мудрець взяв собі 3 картки, другий взяв 2, а 2 картки, що залишилися, вони не дивлячись сховали в мішок. Перший мудрець, дослідивши свої картки, сказав іншому: «Я знаю, що сума чисел на твоїх картках парна!» Які числа написано на картках першого мудреця? Чи єдина відповідь у цій задачі?

Розв'язання. Серед чисел 5–11 є 4 непарних (5, 7, 9, 11) і 3 парних (6, 8, 10). Бути впевненим у істинності свого висловлювання перший мудрець може лише за умови, що у нього усі картки з парними номерами.

Відповідь: 6, 8, 10. Відповідь у цій задачі єдина.

Завдання 4. Доведіть, що числа від 1 до 16 можна записати в рядок, але не можна записати по колу так, щоб сума будь-яких двох сусідніх чисел була квадратом натурального числа.

Розв'язання. Доведемо спочатку неможливість розташування чисел по колу. З попарних сум натуральних чисел від 1 до 16 точними квадратами є 4, 9, 16 і 25. Біля 16 має стояти 9 з одного боку. Тоді з іншого боку нема що ставити, щоб утворити суму 25, бо 9 уже використано. Тому для розташування чисел у ряд має починатися (закінчуватися) числом 16.

Відповідь: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8 або ці самі числа у зворотному порядку.

Завдання 5. 10 футбольних команд проводять турнір в одне коло. Доведіть, що в будь-який момент турніру знайдуться 2 команди, які на даний момент зіграли однакову кількість матчів.

Доведення (від супротивного). Припустимо, що у певний момент всі команди зіграють різні кількості матчів. Тоді ці кількості дорівнюють 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При цьому *подвоєна* кількість матчів дорівнює такій сумі:

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ — непарне число. Отримана суперечність свідчить про хибність припущення.

Завдання 6. Чи зможе хлопчик Микола написати на дошці 57 різних двоцифрових чисел так, щоб серед них не було двох чисел, які в сумі давали б 100?

Розв'язання. Всіх двоцифрових чисел 90. З них 10 — таких, для яких немає двоцифрового доповнення до 100: 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 50. Решту 80 чисел можна розбити на 40 пар вигляду: $\{a, 100 - a\}$. З кожної пари Микола може написати лише одне число. Тому на дошці він може записати не більше ніж 50 чисел.

Відповідь: написати на дошці 57 різних двоцифрових чисел з указаною властивістю неможливо.

Завдання 7. Цифри 1–9 розбили на три групи. Доведіть, що добуток чисел в одній із груп не менше 72.

Доведення: $9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$. Припустимо, що для кожної з трьох груп добуток з чисел менший за 72. Добуток у групі цифр, де є 9, не перевищує $9 \cdot 7 = 63$. Тоді добуток чисел у 2 інших групах не менший від $9!/63 = 5760$, що має бути менше за $72 \cdot 72 = 5184$. Отримана суперечність свідчить про хибність припущення.

Завдання 8. Число x — натуральне. З нерівностей $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$, $x > 10$ та $x > 5$ дві справджуються, а три інші хибні. Чому дорівнює x?

Розв'язання. Розв'яжемо всі нерівності відносно x і запишемо їх у вигляді нерівностей одного змісту.

$$\begin{array}{llll}
(1) & 35 < x, & & \\
(2) & & x < 100, & \\
(3) & 6{,}25 < x, & & \\
(4) & 10 < x, & & \\
(5) & 5 < x. & &
\end{array}$$

Маємо:

- зі справдження нерівності (1) випливає справдження нерівності (4);
- зі справдження нерівності (4) випливає справдження нерівності (3);
- зі справдження нерівності (3) випливає справдження нерівності (5).

І всі ці нерівності сумісні (мають спільні розв'язки) з нерівністю (2). Твердження умови справджується тоді й лише тоді, коли справджуються лише нерівності (2), (5), тобто при $5 < x \leq 6{,}25$.

Відповідь: $x = 6$.

Завдання 9. Є два пісочних годинники: на 7 хвилин і на 11 хвилин. Яйце потрібно варити 10 хвилин. Як зварити яйце, перевертаючи годинник найменшу кількість разів?

Розв'язання. Подамо у відповіді таблицею схему перевертання годинника: назви рядків — час, на який розрахований годинник, вміст клітини — час, на який вистачить піску у верхній частині годинника. Переходи: $0 \leftrightarrow 7$ або $0 \leftrightarrow 11$ означають перевертання годинника.

Відповідь:

7	0	7	3	3	0	7	0	0	0
11	4	4	0	11	8	8	1	10	0

Завдання 10. Чи можна розкласти 60 монет по 12 гаманцях так, щоб будь-які два із них містили б різну кількість монет (можливо жодної)?

Розв'язання. Знайдемо суму невід'ємних цілих чисел від 0 до 11 включно:

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11= \\ =65>60.$$

Як бачимо, для потрібного розташування не вистачає монет.

Відповідь: розташувати монети вказаним чином неможливо.

Завдання 11. Кожному з 35 учнів класу дали розв'язати на вибір *лише одну* з 17 задач. Чи буде серед них троє таких, хто розв'язував одну й ту саму задачу?

Розв'язання. Якщо кожну задачу розв'язало не більше 2 учнів, то кількість людей не перевищує $2\cdot 17=34$, що суперечить тому, що учнів 35. Тому щонайменше троє людей розв'язало одну й ту саму задачу.

Відповідь: існує троє учнів, які розв'язали одну й ту саму задачу.

Завдання 12. Знайдіть найменше натуральне число, яке ділиться націло на 100 і сума цифр якого дорівнює 100.

Розв'язання. Шукане число:

- має закінчуватися двома нулями;
- має містити якомога менше розрядів;
- крім двох останніх цифр, цифри мають бути записані у порядку неспадання;
- перша цифра має бути якомога меншою

Відповідь: 19999999999900.

Завдання 13. Четверо хлопців — Антон, Борис, Василь і Гриць — змагалися з бігу. Наступного дня вони заявили:

- Антон: ***«Я не був ні першим, ні останнім»***;
- Борис: ***«Я не був останнім»***;
- Василь: ***«Я був першим»***;
- Гриць: ***«Я був останнім»***;

Відомо, що троє сказали правду, а один збрехав. Хто саме?

Розв'язання. Розглянемо послідовно 4 припущення про те, хто брехав. Подамо міркування таблицею, у якій стовпчик, названий іменем одного з хлопців, описує наслідки справдження або хибності висловлювання цього хлопця щодо розташування на першому (П) і останньому (О) місцях: «+» — істина, «–» — хиба, незаповнена клітина — неможливо зробити однозначний висновок.

1. Збрехав Антон.

	Антон	Борис	Василь	Гриць
П	±		+	–
О	∓	–	–	+

2. Збрехав Борис.

	Антон	Борис	Василь	Гриць
П	–	–	+	–
О	–	+	–	+

3. Збрехав Василь.

	Антон	Борис	Василь	Гриць
П	–		–	–
О	–	–		+

4. Збрехав Гриць.

	Антон	Борис	Василь	Гриць
П	–		+	
О	–	–	–	–

Суперечності у випадках 1, 2, 4 — у рядку є більше одного знака «+» або чотири знаки «–» — свідчать про хибність відповідних припущень.

Відповідь: збрехав Василь.

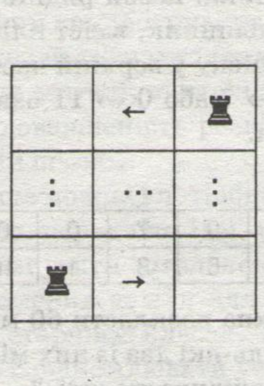
Завдання 14. На шаховій дошці стоять 8 тур таким чином, що жодні дві з них не б'ють одна одну. Доведіть, що на чорних полях стоїть парна кількість тур.

Розв'язання. Доведення складається з трьох частин.

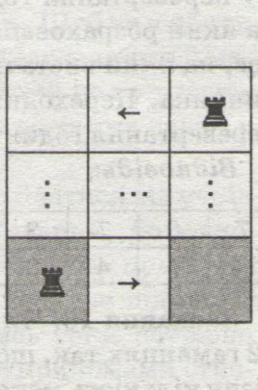
1. Якщо розташувати всі тури на діагоналі, то під 8 турами будуть поля одного кольору. У цьому випадку твердження задачі справджується.

2. Розглянемо 8 випадків переставляння двох тур, розташованих у протилежних вершинах прямокутників, утворених клітинами шахівниці.

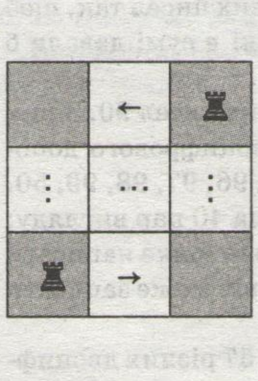
1



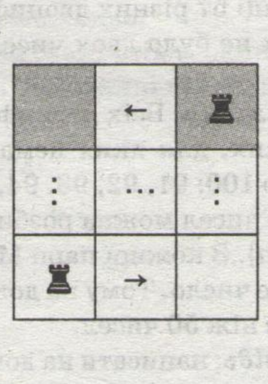
2



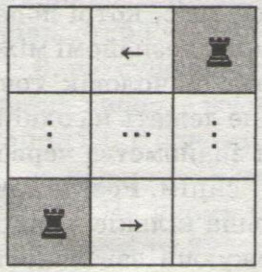
3



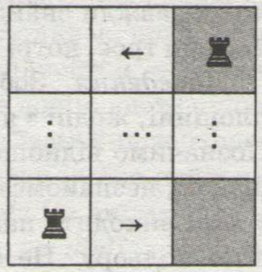
4



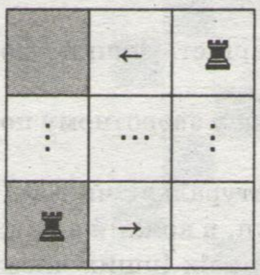
5



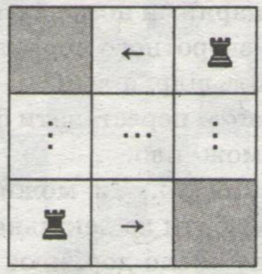
6



7



8



3. Маємо:

- у випадках 1–4, 6–7 кількість полів одного кольору під турами не змінюється;
- у випадку 5 кількість полів чорного кольору під турами зменшується на 2;
- у випадку 8 кількість полів чорного кольору зростає на 2.

В усіх випадках парність чорних полів під турами не змінюється.

4. Доведемо, що будь-яке розташування тур можна звести до діагонального, не змінюючи парності полів під турами, застосовуючи розглянуті переставляння 1–8. Якщо 8 тур не знаходяться під боєм, то в кожному рядку і в кожному стовпчику знаходиться лише 1 тура.

Розглянемо рядок 1. Якщо тура у ньому розташована у першому стовпчику, то її не чіпаємо. Інакше знаходимо туру, розташовану у першому стовпчику. Тури у першому рядку і у першому стовпчику розташовані у протилежних вершинах деякого прямокутника зі сторонами, паралельними краям дошки. Пересунемо тури по горизонталі в інші вершини цього прямокутника. Як показано раніше, парність кількості чорних полів під турами не зміниться.

Аналогічно розглянемо послідовно рядки 2-й, 3-й,..., 8-й. У результаті отримаємо розташування тур на діагоналі.

Завдання 15. Якщо 30 учнів посадити у шкільній актовій залі, то в одному ряді опиниться не менше двох однокласників. Якщо те саме зробити з 26 учнями, то принаймні 3 ряди залишаться порожніми. Скільки рядів у залі?

Розв'язання. Позначимо шукану кількість рядів через x. Згідно з умовою, маємо: $26 + 3 \le x < 30$.

Відповідь: $x = 29$.

Завдання 16. У класі 25 чоловік. Відомо, що серед будь-яких трьох з них є двоє друзів. Доведіть, що є учень, в якого не менше 12 друзів.

Доведення. Розглянемо учня А, у якого найбільша кількість товаришів. Якщо таких учнів кілька, то виберемо будь-якого з них. Усіх учнів класу можна розбити на дві групи:

- друзі вибраного учня А;
- не друзі вибраного учня А.

Серед *не друзів* А виберемо ще одного учня В. Розглянемо трійку учнів А, В, С, де С — довільний *не друг* А, відмінний від В. В цій трійці В і С дружать. Якщо в учня А друзів менше ніж 12, то щонайменше 13 учнів не є його друзями. Тоді у В щонайменше 12 друзів — більше ніж у А. Останнє суперечить вибору А. Отже, в А не менше 12-ти друзів.

Завдання 17. Сергій записав п'ятицефрове число і помножив його на 9. На його подив, він отримав число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Яке число записав Сергій?

Розв'язання. Число, яке задумав Сергій, має бути кратним 9. Перша цифра цього числа 1, а остання 9. Нехай десятковий запис задуманого числа має такий вигляд: $1abc9$. Маємо:

$$(1 + a + b + c) \vdots 9,$$
$$9 \cdot 1abc9 = 9cba1.$$

Здійснимо еквівалентні перетворення останнього рівняння:

$$9\,(9 + 10c + 100b + 1000a + 10000) =$$
$$= 1 + 10a + 100b + 1000c + 90000;$$
$$81 + 90c + 900b + 9000a + 90000 =$$
$$= 1 + 10a + 100b + 1000c + 90000;$$
$$80 + 800b + 8990a = 910c;$$
$$8 + 80b + 899a = 91c.$$

Якщо $1 \le a$, то

$$8 + 80b + 899a \le 8 + 899 = 907 > 819 = 91 \cdot 9 \ge 91c.$$

Тому маємо:

$$a = 0;$$
$$8 + 80b = 91c.$$

З останньої рівності маємо: $c \ne 0$, $c \vdots 8$, звідки:

$$c = 8;$$
$$8 + 80b = 91 \cdot 8;$$
$$1 + 10b = 91;$$
$$b = 9.$$

Відповідь: 10989.

Завдання 18. 100 фішок поставлено в ряд. Дозволено міняти місцями будь-які дві фішки, що стоять через одну. Чи можна поставити фішки у зворотному порядку?

Розв'язання. Пронумеруємо місця, на яких стоять фішки номерами цих фішок для початкового розташування. Після будь-яких перестановок:

- фішки з непарними номерами будуть стояти на полях з непарними номерами;

• фішки з парними номерами стоятимуть на полях з парними номерами.

А для зворотного порядку парність фішки і позиції мають відрізнятися.

Відповідь: переставити фішки у зворотному порядку неможливо.

Завдання 19. Чи можна натуральні числа 1, 2,..., 21 розбити на декілька груп, в кожній з яких найбільше число дорівнює сумі всіх інших чисел цієї групи?

Розв'язання. Припустимо, що можна розбити числа 1, 2,..., 21 на групи вказаним чином. Тоді у кожній групі сума чисел парна. Отже, і сума натуральних чисел від 1 до 27 включно парна. Але це не так:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 20 + 21 = 22 \cdot 10 + 11 = 231.$$

Відповідь: розбити числа на групи вказаним чином неможливо.

Завдання 20. В конференції брало участь 100 чоловік: хіміки й алхіміки. Кожному поставити запитання: «Якщо не рахувати Вас, то кого більше серед інших учасників: хіміків чи алхіміків?» Коли опитали 51 учасника і всі відповіли, що алхіміків більше, опитування припинили. Алхіміки завжди брешуть, а хіміки завжди говорять правду. Скільки хіміків серед учасників?

Розв'язання. Позначимо через a кількість алхіміків, тоді кількість хіміків дорівнює $100 - a$.

- Якщо $a = 50 = 100 - a$, то всі учасники конференції будуть казати, що алхіміків більше. Це не суперечить умові задачі.
- Якщо $a < 50$ і $100 - a > 50$, то алхіміки будуть казати, що алхіміків більше, хіміки будуть казати, що хіміків більше. Це суперечить умові задачі
- Якщо $a > 50$ і $100 - a < 50$, то алхіміки будуть казати, що хіміків більше, а хіміки будуть казати, що алхіміків більше. Це суперечить умові задачі.

Відповідь: 50 хіміків.

Завдання 21. Коник стрибає на 1 см, потім стрибає на 3 см у тому самому чи протилежному напрямку, потім у тому самому чи протилежному напрямку на 5 см, і так далі. Чи може він після 25-го стрибка опинитися у початковій точці?

Розв'язання. На прямій, що містить усі можливі точки приземлення коника, запровадимо координати з початком координат у точці початкового розташування коника. Тоді через 25 стрибків він опиниться у точці з такою координатою: $\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots \pm 25$ (см) — сума 13-ти непарних чисел, що завжди непарна і тому відмінна від нуля.

Відповідь: після 25 стрибка коник не зможе опинитися у початковій точці.

Завдання 22. Доведіть, що з будь-яких шести чоловік завжди знайдуться троє, котрі попарно знайомі чи троє, котрі попарно незнайомі між собою.

Доведення. Зобразимо 6 чоловік точками на площині, жодні з яких не лежать на одній прямій. Позначимо відношення знайомства червоним відрізком, незнайомства — синім. Розглянемо точку, з якої виходить найбільша кількість відрізків одного кольору. Не обмежуючи загальності міркувань, будемо вважати, що вони червоного кольору. Ця кількість може дорівнювати 3, 4, або 5.

Розглянемо кінці цих відрізків червоного кольору, відмінні від вибраної точки. Якщо хоча б одну пару з них сполучено відрізком червоного кольору, то існує трикутник з вершинами у цих двох точках і точці, вибраній на початку. Інакше всі ці точки попарно сполучено відрізками синього кольору, цих точок не менше трьох. У цьому випадку можна утворити трикутник одного кольору, з вершиною у цих точках, сторони якого матимуть синій колір.

У поданих вище міркуваннях назви кольорів можна замінити: червоний на синій і навпаки, що еквівалентне заміні відношення «знайомий» і «незнайомий».

Завдання 23. По колу розташовано 55 чисел, кожне з яких дорівнює сумі сусідніх з ним чисел. Доведіть, що всі числа дорівнюють нулю.

Доведення. Позначимо числа у порядку обходу по колу: $a_1, a_2, \ldots, a_2$. Маємо:

$$a_1 = a_{55} + a_2,$$
$$a_2 = a_1 + a_3,$$
$$a_3 = a_2 + a_4,$$
$$\ldots$$
$$a_{55} = a_{54} + a_1.$$

Додавши праві та ліві частини нерівностей, отримаємо:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{55} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{55});$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{55} = 0.$$

Тому числа не можуть бути лише від'ємними та додатними. Між двома невід'ємними числами не може стояти від'ємне число. Між двома від'ємними числами не може стояти невід'ємне число.

Припустимо, що серед чисел є і додатні і від'ємні числа, а значить і є зміна знаку при русі по колу. Не обмежуючи загальності міркувань, будемо вважати, що справджуються такі нерівності:

$$a_{55} < 0 < a_2.$$

Маємо:

$$a_3 = a_2 - a_1 = a_2 - (a_{55} + a_2) = -a_{55} > 0;$$
$$a_4 = a_3 - a_2 = -a_{55} - a_2 = -a_1;$$
$$a_5 = a_4 - a_3 = -a_1 + a_{55} = -a_2.$$

Маємо таку послідовність чисел у порядку руху по колу: a_1, a_2, a_3, $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$,... з повторенням перших шести членів.

З періодичності (повторюваності) послідовності чисел і рівності $55 = 6 \cdot 9 + 1$ випливає, що $a_{55} = a_1$, тому $a_2 = 0$, що суперечить нерівності $a_2 = 0$. Отже припущення хибне, а всі числа дорівнюють нулю.

Завдання 24. В одному з під'їздів 8-поверхового будинку на першому поверсі розміщено квартири від 97 до 102. На якому поверсі і в якому під'їзді розміщена квартира 222, якщо всі під'їзди побудовано однаково і на кожному поверсі однакова кількість квартир?

Розв'язання. На кожному поверсі кожного під'їзду $102 - 97 + 1 = 6$ квартир. Отже, у кожному під'їзді $6 \cdot 8 = 48$ квартир. Найбільші номери квартир у під'їздах такі: 48, 96, 144, 192, 240,... З рівностей

$$222 = 4 \cdot 48 + 30 = 4 \cdot 48 + 5 \cdot 6$$

випливає, що квартира 222 буде у 5 під'їзді на 5 поверсі.

Відповідь: квартира 222 розташована в 5-му під'їзді на 5-му поверсі.

Завдання 25. На дошці було написано 10 послідовних натуральних чисел. Коли стерли одне із них, то сума решти дев'яти стала дорівнювати 2002. Які числа залишилися на дошці?

Розв'язання. Позначимо через a найменше з початково написаних чисел. Тоді сума всіх початково написаних чисел дорівнює:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + 9) = 10a + 45.$$

Позначимо через $a + j$ витерте число. Маємо:

$$2002 = 10a + 45 - (a + j) = 9a + 45 - j;$$
$$1957 = 9a - j = 9 \cdot 217 + 4 = 9 \cdot 217 + 9 - 9 + 4 =$$
$$= 9 \cdot 218 - 5.$$

Отже, $a = 218$, $j = 5$.

Відповідь: 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227.

Завдання 26. Знайдіть усі трицифрові числа, які в результаті викреслювання середньої цифри зменшуються в 7 разів.

Розв'язання. Позначимо через a, b, c цифри шуканого числа у порядку спадання старшинства розрядів. Маємо:

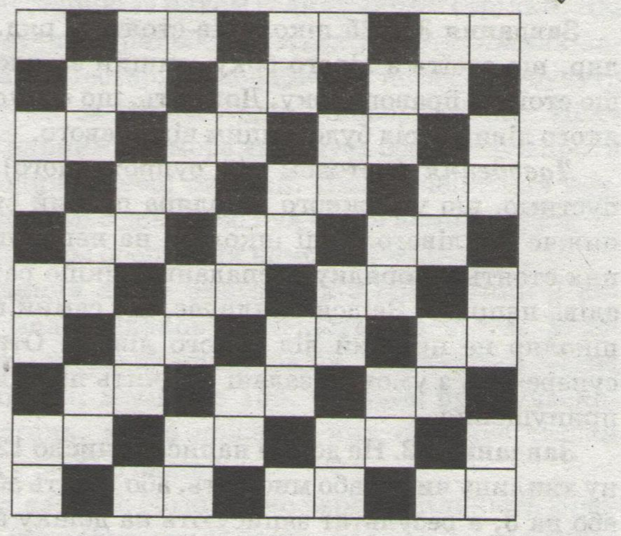
$$100a + 10b + c = 7(10a + c) = 70a + 7c;$$
$$30a + 10b = 6c;$$
$$15a + 5b = 3c.$$

Маємо: $b \vdots 3$, $c \vdots 5$. Але $c \neq 0$, бо інакше $a = b = 0$. Тому $c = 5$, $15a + 5b = 15$, звідки $a = 1$, $b = 0$.

Відповідь: 105.

Завдання 27. На полі 10×10 для гри у «морський бій» поставили корабель розміром 1×3 клітинки. Чи можна, зробивши 33 постріли, гарантовано в нього поцілити?

Відповідь: можна поцілити, якщо «стріляти» по таким зафарбованим полям-клітинам.



Завдання 28. На великій діагоналі шахівниці розміром 10×10 клітинок стоять 10 шашок (усі в різних клітинках). За один хід дозволено вибрати будь-яку пару шашок і пересунути кожну з них на одну клітинку вниз або на одну клітинку вгору. Чи можна за кілька ходів поставити всі шашки на нижню горизонталь дошки?

Розв'язання. Сума відстаней усіх шашок до нижньої горизонталі така:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Парність суми відстаней не змінюється при вказаному пересуванні шашок. Тому суму відстаней неможливо перетворити на 0.

Відповідь: неможливо поставити всі шашки на нижню горизонталь дошки вказаним способом.

Завдання 29. 7 олівців дорожчі за 8 зошитів. Що дорожче: 8 олівців чи 9 зошитів?

Розв'язання. Позначимо через x ціну олівців, через y — ціну зошита. Маємо:

$$7x > 8y;$$
$$x/y > 8/7 = 1 + 1/7 > 1 + 1/8 = 9/8;$$
$$x/y > 9/8;$$
$$8x > 9y.$$

Відповідь: 8 олівців дорожчі за 9 зошитів.

Завдання 30. Записали два числа. До першого додали друге і отримали третє. До другого додали третє і отримали четверте і т.д. Чому дорівнює сума шести написаних чисел, якщо п'яте дорівнює 7?

Розв'язання. Позначимо через a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 числа, про які сказано в умові задачі. Виразимо всі ці числа через a_1 і a_2:

$$a_3 = a_1 + a_2;$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = a_1 + 2a_2;$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 2a_1 + 3a_2;$$
$$a_6 = a_4 + a_5 = 3a_1 + 5a_2.$$

Маємо:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 =$$
$$= (1 + 1 + 1 + 2 + 3) \cdot a_1 + (1 + 1 + 2 + 3 + 5) \cdot a_2 =$$
$$= 8a_1 + 12a_2 = 4 \cdot (2a_1 + 3a_2) = 4a_5 = 4 \cdot 7 = 28.$$

Відповідь: 28.

Завдання 31. 25 школярів стоять у ряд. Школяр, що стоїть з лівого боку, вищий за школяра, що стоїть з правого боку. Доведіть, що є школяр, у якого лівий сусід буде вищим від правого.

Доведення (методом від супротивного). Припустимо, що у кожного школяра правий сусід не нижче від лівого. Тоді школярі на непарних місцях стоять у порядку неспадання, якщо рахувати зліва направо. Звідси випливає, що самий правий школяр не нижчий від самого лівого. Отримана суперечить з умовою задачі свідчить про хибність припущення.

Завдання 32. На дошці написано число 12. Кожну хвилину число або множать, або ділять або на 2, або на 3, а результат записують на дошку замість попереднього числа. Доведіть, що число, яке буде записане на дошці рівно за годину, не буде дорівнювати 54.

Доведення. У результаті виконання вказаних дій через t хвилин можна отримати число $2^{x}_{t} \cdot 3^{x}_{t}$. Тут t — кількість хвилин від написання першого числа, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, бо $12 = 2^2 \cdot 3^1$. Для кожного невід'ємного цілого t справджується одне з двох висловлювань:

$$\text{або } x_{t+1} = x_t \pm 1 \quad \text{і} \quad y_{t+1} = y_t;$$
$$\text{або } x_{t+1} = x_t \quad \text{і} \quad y_{t+1} = y_t \pm 1.$$

Отже, парність суми $xt + yt$ змінюється щохвилини. Вона змінюється через непарну кількість хвилин, а через парну кількість хвилин стає такою самою, якою була спочатку. $x_0 + y_0 = 2 + 1 = 3$ — непарне число. $x_{60} + y_{60}$ також має бути непарним, тому не може дорівнювати $4 = 1 + 3$. Отже, через 60 хвилин на дошці буде записано число, відмінне від $54 = 2^1 \cdot 3^3$.

Завдання 33. Юрій загадав натуральне число, помножив його на 13, закреслив останню цифру результату, отримане число помножив на 7, знову закреслив останню цифру результату і отримав число 21. Яке число загадав Юрій?

Розв'язання. Виконаємо обернені дії, почавши з числа 21 і вибираючи закреслювану цифру таким чином, щоб можна цифри.

$$30 \xleftarrow{:7} 210 \leftarrow 21 \rightarrow 217 \xrightarrow{:7} 31 \rightarrow 312 \xrightarrow{:13} 24$$

Відповідь: 24.

Завдання 34. Плитка шоколаду має 17×17 частин квадратної форми. Малюк і Карлсон грають у таку гру: хід полягає у тому, що один з наявних прямокутних шматків шоколаду розламують на дві прямокутні частини, причому Карлсон одразу ж після свого ходу з'їдає одну з частин, що утворилися. Програє той, хто не може зробити хід. Першим ходить Малюк. Хто виграє при правильній грі?

Розв'язання. Зауважимо, що і у початковій позиції (плитка 17×17) і в кінцевій позиції (набір плиток розміром 1×1) сторони всіх шматків шоколаду виражено непарними числами. Доведемо, що Карлсон завжди зможе повернути гру у таку позицію. Розглянемо випадок, коли ходить Малюк за умови, що довжини всіх сторін шматків шоколаду непарні числа. Після його ходу один зі шматків перетвориться на два, з яких один матиме непарні сторони, а другий — і парні, і непарні. Карлсон має взяти цей другий шматок і поділити сторону з парною довжиною на два відрізки з непарними довжинами. Наприклад, згідно з такою схемою: $2n = 1 + (2n - 1)$. Після цього він може з'їсти будь-який шматок.

Відповідь: переможе Карлсон.

Завдання 35. Послідовність чисел розпочинається цифрами 1 і 3. Кожне наступне число у послідовності є останньою цифрою суми двох попередніх членів. Яке число стоїть на 1000-му місці?

Розв'язання. Запишемо перші члени послідовності: 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4,.... Як бачимо, послідовність утворено повторенням перших 12 членів. З рівності: $1000 = 12 \cdot 83 + 4$ випливає, що 1000-тий елемент послідовності збігається з 4-тим, тому дорівнює 7.

Відповідь: 7.

Завдання 36. На полі a1 шахівниці стоїть кінь. Чи можна ним обійти всю дошку, побувавши на кожному полі один раз, і потрапити у протилежне (по діагоналі) кутове поле h8?

Розв'язання. Щоб обійти всі клітини по одному разу треба зробити 63 ходи. Після кожного ходу колір клітини під конем змінюється. За 63 ходи конем з чорної клітини можна потрапити лише на білу і навпаки. А клітини, які стоять на одній діагоналі мають один колір.

Відповідь: такий обхід здійснити неможливо.

Завдання 37. Нехай всі точки прямої розфарбовано у два кольори. Доведіть, що на ній знайдуться три точки A, B, C, розфарбовані в один колір так, що B — середина відрізка AC.

Розв'язання. Якщо всі точки розфарбовано одним кольором, то кінці будь-якого відрізка і його середину можна взяти в якості A, C, B. Розглянемо інший випадок: є точки двох кольорів. Не обмежуючи загальності міркувань будемо вважати, що це білий і чорний кольори. Запровадимо систему координат на прямій таким чином, щоб початок координат 0 мав білий колір, а точка 1 — чорний. Розглянемо всі можливі випадки розфарбування точок з натуральними координатами таким чином, щоб утворити якомога довшу послідовність точок, з яких не можна вибрати точок A, B, C таким чином, щоб B була серединою відрізка AC.

○●●○○●●○

○●●○●●

○●●○●

○●○○●●

○●○○●○●○

○●○●●○●○

○●○●●○○

В усіх розглянутих семи послідовностях будь-яке розфарбування наступної точки призводить до появи відрізка, у якому кінці і середина мають один і той самий колір.

Завдання 38. В місті X з будь-якої станції метро можна проїхати на будь-яку іншу. Доведіть, що одну зі станцій можна закрити на ремонт без права проїзду через неї так, щоб з будь-якої з тих станцій, що лишилися, можна було проїхати на будь-яку іншу.

Доведення. Справджується одне з таких висловлювань щодо схеми метрополітену: або існує цикл (замкнений маршрут), утворений ланками ліній метрополітену, або такого циклу немає. У першому випадку можна закрити на ремонт довільну станцію на цьому циклі. У другому випадку можна, почавши з порожньої множини, долучати до схеми по одній ланки ліній метрополітену зі збереженням зв'язності створюваної схеми. Кожна нова ланка, крім першої, матиме одну станцію серед вже наявних (це забезпечує зв'язність), і одну, відмінну від наявних (це забезпечує відсутність циклів). Тому такій схемі існує (кінцева) станція, до якої підходить лише ланка лінії метрополітену. Саме цю станцію можна закрити на ремонт.

Завдання 39. У місті Маленькому 15 телефонів. Чи можна з'єднати їх дротами так, щоб кожен телефон був з'єднаний рівно з п'ятьма іншими?

Розв'язання. При такому сполученні кінців дротів $15 \cdot 5 = 75$ — непарне число, що неможливо.

Відповідь: таке сполучення неможливе.

Завдання 40. В турнірі беруть участь 15 шахістів. Чи можливо, щоб в якийсь момент кожен з них зіграв рівно 7 партій?

Розв'язання. Якби таке було можливим, то подвоєна кількість партій дорівнювала б $15 \cdot 7 = 105$ — непарне число, що неможливо.

Відповідь: такий стан у турнірі неможливий.

Завдання 41. Дев'ять шестерень зчеплено по колу: перша із другою, друга з третьою, і т.д., дев'ята з першою. Чи можуть вони обертатися?

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли остання шестерня не сполучена з 1-ою. Будемо обертати 1-шу шестерню за рухом годинникової стрілки. Дві зчеплені шестерні обертаються у протилежних напрямках. Шестерні з непарними номерами будуть обертатися за рухом годинникової стрілки. Шестерні з парними номерами будуть обертатися проти руху годинникової стрілки. Після зчеплення першої шестерні з дев'ятою рух стане неможливим.

Відповідь: обертання неможливе.

Завдання 42. У змаганнях з гімнастики 2 команди мали однакову кількість учасників. У результаті загальна сума балів, отриманих усіма учасниками, дорівнює 156. Скільки було учасників змагань, якщо кожен з них отримав тільки оцінки у 8 або 9 балів?

Розв'язання. Позначимо через x кількість учасників, що отримали 8 балів, через y — кількість учасників, що отримали 9 балів, z — загальну кількість учасників (парне число). Маємо:

$156 = 8x + 9y = 8x + (8 + 1)y = 8(x + y) + y = 8z + y$, звідки

$$y = 156 - 8z = 8(156/8 - z),$$
$$x = z - y = 9z - 156 = 9(z - 156/9).$$

$0 < x$ при $z > 156/9 = 17,(3) \approx 17,3$;

$0 < y$ при $z < 156/8 = 19,5$.

Урахувавши парність z, маємо $z = 18$.

Відповідь: 18 учасників.

Завдання 43. Вінні-Пух і П'ятачок поділили між собою торт. П'ятачок почав канючити, що йому дісталося замало. Тоді Вінні-Пух віддав йому третю частину свого шматка. Від цього кількість торта у П'ятачка потроїлася. Яка частина торта була спочатку у Вінні-Пуха, а яка — у П'ятачка?

Розв'язання. Позначимо через z початкову частку торта Вінні-Пуха, через $1 - z$ — початкову частку П'ятачка. Маємо:

$$z/3 + (1 - z) = 3(1 - z);$$
$$z/3 + 1 - z = 3 - 3z;$$
$$z/3 - z + 3z = -1 + 3;$$
$$7z/3 = 2;$$
$$z = 6/7.$$

Відповідь: 6/7, 1/7.

Завдання 44. Магічний квадрат — це квадрат, у якого суми чисел у клітинах на кожній горизонталі, вертикалі і на двох головних діагоналях однакові. Впишіть у клітини квадрата 4×4 числа від 1 до 16, кожне рівно один раз так, щоб вийшов магічний квадрат.

Розв'язання. Обчислимо суму чисел на кожній горизонталі, вертикалі і на двох головних діагоналях, врахувавши, що кожне число записане лише на одній з чотирьох горизонталей:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + 14 + 15 + 16) : 4 = 17 \cdot 8 : 4 = 34.$$

Самі магічні квадрати можна отримати перебором. Поворотами на 90°, 180°, 270° і симетріями відносно осей симетрії квадрата (горизонталі, вертикалі й діагоналей, що проходять через центр квадрата) з отриманих магічних квадратів можна отримати інші.

Відповідь:

10	11	5	8
3	14	4	13
6	7	9	12
15	2	16	1

7	10	5	12
9	15	2	8
4	6	11	13
14	3	16	1

11	6	9	8
5	15	2	12
4	10	7	13
14	3	16	1

Завдання 45. Числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 і 512 розташуйте у клітинах таблиці 3×3 таким чином, щоб добутки по усіх вертикалях, горизонталях і обох головних діагоналях збігалися.

Розв'язання. Всі вказані 9 чисел є послідовними степенями двійки. При множині степенів одного і того самого числа степінь добутку є сумою степенів співмножників: $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$. Задача еквівалентна пошуку магічного квадрата розміру 3×3, утвореного числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Магічному квадрату

6	7	2
1	5	9
8	3	4

відповідає таке розташування степенів двійки:

64	128	4
2	32	512
256	8	16

Поворотами на 90°, 180°, 270° і симетріями відносно осей симетрії квадрата (горизонталі, вертикалі й діагоналей, що проходять через центр квадрата) з отриманого розташування степенів двійки можна отримати інші.

Відповідь:

64	128	4
2	32	512
256	8	16

Завдання 46. Два пірати грали на золоті монети. Спочатку перший програв (віддав другому) половину всіх своїх монет, потім другий програв половину своїх, потім знову перший програв половину своїх. У результаті у першого опинилося 15 монет, а у другого — 33. Скільки монет було у першого пірата до початку гри?

Розв'язання. Заповнимо таблицю, справа наліво, виконавши дії, обернені до тих, які описано в умові. Рух ліворуч призводить до збільшення удвічі числа в одному рядку і зменшення на числа в іншому рядку на таку саму величину. При наступному зсуві ліворуч збільшення удвічі буде здійснено в іншому рядку. Перше збільшення буде здійснено у рядку, що описує кількість монет першого пірата.

1 пірат	24	12	30	15
2 пірат	24	36	18	33

Відповідь: 24.

Завдання 47. Кербуд Остап Бендер збирав з мешканців гроші на установку нових квартирних номерів. Адам Козлевич з 105-ої квартири поцікавився, чому у них в другому під'їзді потрібно зібрати грошей на 40% більше, ніж в першому, хоча квартир там і тут порівну. Не розгубившись, Остап пояснив, що за двоцифрові номери доводиться платити удвічі, а за трицифрові — утричі більше, ніж за одноцифрові. Скільки квартир у під'їзді? У будинку всього 2 під'їзди.

Розв'язання. Кількість одноцифрових чисел дорівнює 9. Кількість двоцифрових номерів дорівнює різниці: $99 - 9 = 90$. Позначимо через x кількість трицифрових номерів у будинку. У будинку всього $x + 99$ квартир, а в кожному з під'їздів $(x + 99) : 2$ квартир. Загальна вартість номерів дорівнює сумі:

$$9y + 180y + 3xy = y\,(189 + 3x),$$

де y — вартість одноцифрового номеру. $100\% : 140\% = 5 : 7$, тому вартість номерів першого під'їзду складе $5/(5 + 7) = 5/12$ вартості всіх номерів.

Розглянемо такі два випадки:

1. У першому під'їзді немає трицифрових номерів. Тоді:

$$9y + 2y \cdot ((x + 99)/2 - 9) = y \cdot (189 + 3x) \cdot 5/12;$$
$$108 + 12x + 1188 - 216 = 945 + 15x;$$
$$135 = 3x;$$
$$x = 45.$$

При цьому $(x + 99)/2 = 72$ — кількість квартир у під'їзді.

2. У першому під'їзді є трицифрові номери. Тоді:

$$9y + 180y + 3y \cdot ((x + 99)/2 - 99) = \\ = y(189 + 3x) \cdot 5/12;$$
$$108 + 2160 + 18x + 1782\ x\ 3564 = 945 + 15x;$$
$$3x = -108 - 2160 - 1782 + 3564 + 945 = 459;$$
$$x = 153.$$

При цьому $(x + 99)/2 = 126$ – кількість квартир у під'їзді.

Відповідь: У під'їзді 72 або 126 квартир.

Завдання 48. Є аркуш клітчатого паперу і олівці шести кольорів. Зафарбуйте найменше число клітин так, щоб для будь-яких двох кольорів знайшлися дві клітини цих кольорів, що граничать по стороні. Доведіть, що менше число клітин зафарбувати не можна.

Розв'язання. Квадрат має 4 сторони, кольорів 6, тому кожним кольором потрібно розфарбувати щонайменше 2 клітини, а всього — щонайменше 12 клітин.

Відповідь. Один із варіантів розфарбування такий (у клітинах вказано номери кольорів).

1	2	3	4
5	4	6	
3	1	5	
	5	2	

Завдання 49. Футбольний м'яч зшито з 32 клаптів: білих 6-кутників і чорних 5-кутників. Кожен чорний клапоть межує з п'ятьма білими, а кожен білий — з трьома чорними і трьома білими. Скільки клаптів білого кольору?

Розв'язання. Позначимо через x кількість білих граней, тоді: $32 - x$ — кількість чорних граней;

$3x$ — кількість ребер, спільних для 6-кутників і 5-кутників, тобто кількість усіх ребер 5-кутників:

$$3x = 5 \cdot (32 - x);$$
$$3x = 160 - 5x;$$
$$8x = 160;$$
$$x = 20.$$

Відповідь: футбольний м'яч зшито з 20 клаптів білого кольору (і 12 клаптів чорного кольору).

Завдання 50. На дошці написано 10 одиниць і 10 двійок. За хід дозволено стерти дві будь-які цифри і, якщо вони були однаковими, написати двійку, а якщо різними — одиницю. Якщо остання цифра, що залишилася на дошці, — одиниця, то виграє перший гравець, а якщо двійка — то другий. Доведіть, що гравець, який ходить другим, завжди виграє.

Доведення. Кожен хід не змінює парності суми. Для початкової послідовності чисел сума всіх членів парна, тому після останнього ходу залишиться 2.

Завдання 51. Три команди грали в КВК. Перед грою гравець Іванов перейшов з першої команди в другу, гравець Сидоров перейшов з другої команди в третю, а гравець Петров перейшов з третьої команди в першу. Після цього середній вік першої команди збільшився на 1 тиждень, другої — збільшився на 2 тижні, а третьої — зменшився на 4 тижні. Відомо, що в першій і в другій командах по 12 гравців. Скільки гравців в третій команді?

Розв'язання. Запровадимо такі позначення:

x — шукана кількість гравців 3-ої команди;

a — вік Іванова у тижнях;

b — вік Сидорова у тижнях;

c — вік Петрова у тижнях.

Запишемо прирости середнього віку у тижнях кожної команди.

$$(1)\ -a/12 + c/12 = 1;$$
$$(2)\ -b/12 + c/12 = 2;$$
$$(3)\ -c/x + b/x = -4.$$

Помноживши на 12 обидві частини рівнянь (1) і (2), а у рівнянні (3) — на x, отримаємо такі рівняння:

$$(1\square)\ -a + c = 12;$$
$$(2\square)\ -b + c = 24;$$
$$(3\square)\ -c + b = -4x.$$

Додавши праві та ліві частини рівнянь, отримаємо:

$$0 = 36 - 4x;$$
$$4x = 36;$$
$$x = 9.$$

Відповідь: 9 гравців.

Завдання 52. Є чотири зовні однакових кулі масою 101 г, 102 г, 103 г і 105 г. Як за два зважуван-

№ 09–10'2015 р. МАТЕМАТИЧНА ГАЗЕТА

ня на вагах зі стрілкою знайти масу кожної кулі? Ваги показують точну масу покладеного на них вантажу.

Розв'язання. Проведемо зважування таким чином: поділимо кулі на дві групи, в кожній по дві кулі, зважимо першу групу, а потім одну кулю з першої групи і одну з другої. У кожному рядку наступної таблиці розташуємо:

- у стовпчиках 1 і 2 — ваги куль першої групи;
- у стовпчиках 3 і 4 — ваги куль другої групи;
- у стовпчику 5 — загальну вагу куль першої групи;
- у стовпчику 6 — суму чисел у стовпчиках 2 і 3.

Переберемо всі можливі варіанти і покажемо, що за результатами таких зважувань можна визначити ваги всіх куль.

Перша група		Друга група		Результат першого зважування	Результат другого зважування
101	102	103	105	203	205
101	102	105	103	203	207
102	101	103	105	203	204
102	101	105	103	203	206
101	103	102	105	204	205
101	103	105	102	204	208
103	101	102	105	204	203
103	101	105	102	204	206
101	105	102	103	206	207
101	105	103	102	206	208
105	101	102	103	206	203
105	101	103	102	206	204
102	103	101	105	205	204
102	103	105	101	205	208
103	102	101	105	205	203
103	102	105	101	205	207
102	105	101	103	207	206
102	105	103	101	207	208
105	102	101	103	207	203
105	102	103	101	207	205
103	105	101	102	208	206
103	105	102	101	208	207
105	103	101	102	208	204
105	103	102	101	208	205

Немає повторень серед впорядкованих пар значень з двох останніх стовпчиків. Тому за результатами зважувань можна однозначно визначити вагу кожної кулі.

Відповідь: поділити кулі на дві групи по дві кулі, зважити першу групу, а потім одну кулю з першої групи і одну з другої та скористатися відомостями поданої вище таблиці.

Завдання 53. Набір складається з гирьок із цілочисельними масами (у грамах). Відомо, що якщо з набору прибрати будь-яку з гирьок, то решту можна розкласти по двох чашках ваг так, що ваги будуть у рівновазі. Доведіть, що в наборі непарна кількість гирьок.

Доведення (від супротивного). Припустимо, що існує набір мас m_1, m_2,..., mn з вказаними властивостями, де n — парне число, а маси цілі. Позначимо через M суму всіх мас. Згідно з умовою всі n чисел $M - m_1$, $M - m_2$,..., $M - mn$ є парними, а тому парною є і їхня сума $M \cdot (n - 1)$. Враховуючи непарність $(n - 1)$, маємо парність M і як наслідок парність усіх чисел m_1, m_2,..., mn. Отже, всі ці числа можна поділити на 2 без втрати описаних в умові властивостей (цілочисельність усіх елементів і можливості поділу на 2 групи з однаковою сумою елементів після вилучення одного з них). Але при послідовному поділі на 2 рано чи пізно ми вийдемо за межі цілих чисел. Отримана суперечність свідчить про хибність припущення про парність n.

Завдання 54. Є 12 ящиків. У деяких з них лежать по 12 ящиків меншого розміру, в деяких з менших ящиків лежать ще 12 ящиків меншого розміру. Всього заповнено 39 ящиків. Знайдіть загальну кількість ящиків.

Розв'язання. Візьмемо 12 порожніх ящиків. При заповненні одного ящика кількість ящиків зростає на 12. Після заповнення 39-ти ящиків кількість ящиків зросте до такої кількості:

$$12 + 39 \cdot 12 = 12 \cdot (1 + 39) = 480.$$

Відповідь: 480 ящиків.