Як навчити учня розв'язувати стереометричні задачі

Пропонуємо розглянути кілька практик, що сприяють успішному викладанню стереометрії. Багаторічний досвід викладання дає вчителю-практику змогу навчити учнів уникати типових помилок та успішно знаходити способи розв'язання стереометричних задач. Як навчити учня будувати ланцюжок строгих логічних міркувань, що приводять до розв'язку? Про це ви дізнаєтеся із цієї статті.

Валентина МАРУЩАК, викладач циклової комісії економіко-математичних дисциплін та менеджменту Університетського коледжу Київського університету імені Бориса Грінченка

Щоб знайти своє місце в житті, бути успішним, засвоїти свої соціальні ролі, сучасний випускник повинен швидко адаптуватися до життєвих ситуацій, уміти застосовувати свої знання для розв'язання життєвих проблем, здобувати потрібну інформацію, аналізувати її, приймати виважені рішення й бути відповідальним за своє майбутнє та досягнення життєвого успіху.

Розв'язанню зазначених проблем сприяє впровадження інтерактивних технологій навчання на уроках математики, а також їх поєднання з іншими традиційними методами роботи, такими як самостійний пошук. Тому формування навичок пошуку розв'язування задач, доведення теорем мають розглядатися серед основних аспектів навчально-виховного процесу.

Розв'язуючи задачу, учень інтуїтивно намагається виявити зв'язок між шуканою величиною задачі та відомими величинами. Зазвичай цей пошук відбувається безладно. Завдання вчителя полягає в тому, щоб систематизувати його, привчити учня до цілеспрямованого аналізу умови та пошуку розв'язку задачі.

Це відбувається в три етапи:

- розгляд просторової моделі до задачі;
- побудова та аналіз рисунка до задачі;
- пошук алгоритму розв'язання задачі.

Розгляньмо приклад пошуку розв'язування стереометричної задачі на обчислення № 449 із підручника «Математика, 10 клас» О. М. Афанасьєвої та ін., 2010 р.

Задача № 449

З деякої точки A до даної площини проведено перпендикуляр AO завдовжки *1 см* і дві рівні між собою похилі AB та AC, які утворюють із перпендикуляром кути по 60°, а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань між основами похилих.

Просторові уявлення учнів десятих класів гуманітарного профілю розвинуті слабко. Досвід показує, що пошуку способу розв'язування задачі в цьому випадку сприяє попередній розгляд просторової моделі до задачі. Розглянувши та проаналізувавши просторову модель до задачі, учні краще справляються з побудовою рисунка та глибше розуміють його особливості.

Розглянувши просторову модель до задачі, визначивши види геометричних фігур, їх відомі й невідомі елементи, виконуємо рисунок. Позначаємо відповідні елементи буквами та вказуємо значення відомих величин.

Розв'язання. Утворені трикутники AOB і AOC *(рис. 1 на с. 36)* прямокутні, мають спільний катет AO завдовжки 1 см і гострі кути при вершині A по 60° ($\angle BAO = \angle CAO = 60°$). Гіпотенузи цих трикутників за умовою задачі рівні: $AB = AC$. Отже, їх проекції будуть рівні: $BO = CO$ (за теоремою про проекції рівних похилих).

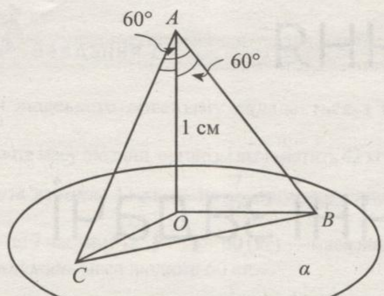


Рис. 1

Звертаємо увагу на те, що, знаючи довжину катета $AO = 1$ см і величину кута 60°, можемо знайти величини решти елементів цих трикутників, а саме OB і AB ($OB = OC$ і $AB = AC$). Трикутник ABC — прямокутний ($\angle A = 90°$) і рівнобедрений ($AB = AC$). Потрібно знайти відрізок BC.

Далі міркуємо, спираючись на *рисунок 1,* але за потреби звертаємося до математичної моделі.

Відрізок BC, який потрібно знайти, є стороною трикутника ABC та трикутника BOC. Робимо висновок, що довжину відрізка BC шукатимемо з трикутника ABC, оскільки цей трикутник має більше даних (прямокутний і рівнобедрений), але в ньому невідомі катети AB і AC. Вони рівні за умовою задачі, і є відповідно сторонами трикутників ABO і ACO. З трикутника ABO можемо знайти гіпотенузу AB, знаючи, що катет $AO = 1$ см і $\angle BAO = 60°$.

Отже, наші міркування (від невідомої величини BC ми дійшли до відомих величин) мають такий вигляд *(схема 1)*.

Тепер учні легко доходять висновку, що для того, щоб розв'язати задачу, потрібно міркувати за такою схемою у зворотному порядку *(схема 2)*.

Ця схема є алгоритмом розв'язування задачі і веде до знаходження довжини відрізка BC. Спосіб розв'язування задачі знайдено, залишається записати розв'язання. Учні можуть це зробити самостійно.

Оформлення розв'язання задачі

1) Із прямокутного трикутника AOB ($\angle AOB = 90°$, $AO = 1$ см) знаходимо AB : $AB = AO : \cos 60°$, $AB = 1 : 0{,}5 = 2$ (см).

(Відрізок AB можна знайти іншим способом: за властивістю гіпотенузи у прямокутному трикутнику з $\angle 30°$.)

2) Із трикутника ABC, прямокутного й рівнобедреного ($\angle BAC = 90°$), за теоремою Піфагора знайдемо BC : $BC_2 = AB_2 + AC_2$, $BC_2 = 22 + 22 = 8$, звідси $BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $2\sqrt{2}$ см.

Такі схеми міркувань допомагають школярам цілеспрямовано шукати розв'язання задачі і таким чином усувати прогалини в теоретичних знаннях, звернувшись по консультацію до вчителя.

Розгляньмо приклад розв'язування складнішої задачі № 345 (1) із підручника «Математика, 11 клас» О. М. Афанасьєвої та ін., 2011 р.

Задача № 345 (1)

Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см і нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Розгляньмо спочатку просторову модель правильної чотирикутної піраміди і з'ясуймо, які елементи відомі. Виконуємо *рисунок 2* до моделі. Позначаємо відповідні елементи буквами та вказуємо значення величин, що відомі з умови.

Схема 1

BC → теорема Піфагора → ΔABC, $BC^2 = AC^2 + AB^2$ → за умовою → $AB = AC$ → через косинус кута → ΔABO — прямокутний

Схема 2

ΔAOB ($\angle A = 90°$) → через косинус кута → $AB = \dfrac{AO}{\cos 60°}$ → за умовою → $AB = AC$ → теорема Піфагора → $BC = \sqrt{2AB^2}$

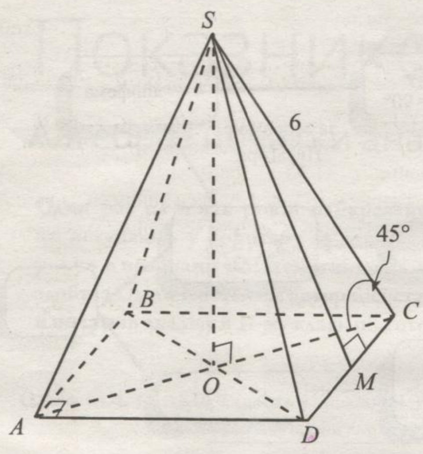


Рис. 2

Розв'язання. Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда. Тоді $ABCD$ — квадрат, точка O — точка перетину діагоналей. Бічні ребра AS, BS, CS, DS мають довжину *6 см* і нахилені до площини основи під $\angle 45°$ (кут між бічним ребром і його проекцією на площину):

$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = 45°$.

Тож O — це основа висоти піраміди і центр квадрата $ABCD$.

З того, що $SO \perp (ABCD)$, маємо що $\Delta SAO = \Delta SBO = \Delta SCO = \Delta SDO$ — рівнобедрені та прямокутні.

Потрібно знайти площу повної поверхні піраміди. Площа повної поверхні піраміди дорівнює сумі площ бічної поверхні та площі основи:

$S_п = S_б + S_{осн}$, $S_б = \frac{1}{2}Ph$, де P = периметр основи, а h — апофема піраміди, SM — висота бічної грані.

З ΔOSC рівнобедреного і прямокутного ($OC = OS$) за співвідношенням між сторонами й кутами прямокутного трикутника (DOSC), знаходимо OC: $OC = SC \cdot \cos 45°$.

З ΔOCM — рівнобедреного і прямокутного ($\angle OCM = 45°$, $OM = MC$) за співвідношенням між сторонами й кутами прямокутного трикутника знаходимо MC: $MC = OC \cdot \cos 45°$.

Сторона основи піраміди (сторона квадрата) $a = 2 \cdot OM$;

Отже, периметр основи піраміди (квадрата): $P = 4a$, і його площа $S = a^2$.

Знаючи CS і MC за теоремою Піфагора, знаходимо SM:

$$SM = \sqrt{CS^2 - MC^2}.$$

Розгляньмо відповідну схему міркувань для пошуку розв'язування задачі *(схема 3)*.

Почавши міркування від невідомих величин, ми дійшли до відомих величин. Складімо план розв'язування задачі, розглянувши міркування за схемою у зворотньому напрямку *(схема 4 на с. 38)*.

Ця схема є алгоритмом розв'язування задачі й веде до знаходження довжини відрізка BC. Спосіб розв'язування задачі знайдено, залишається записати розв'язання, учні можуть зробити це самостійно.

Схема 3

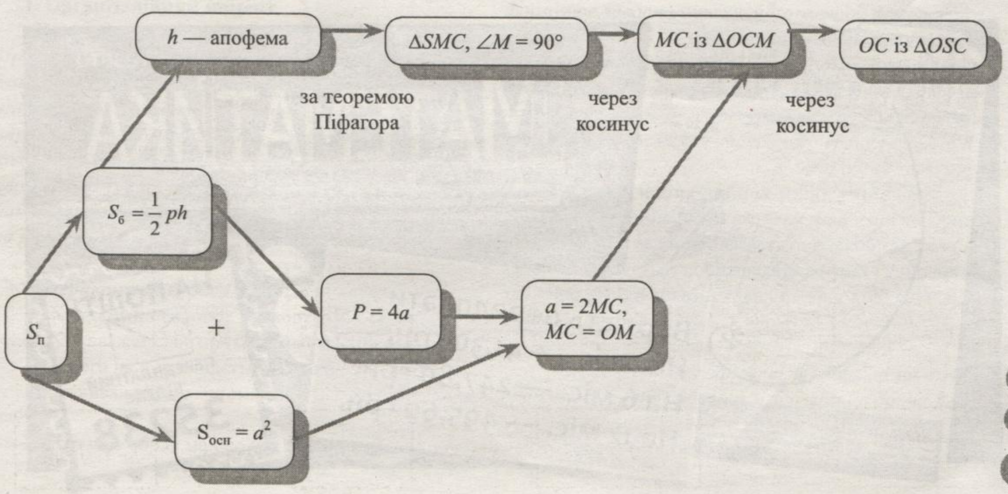
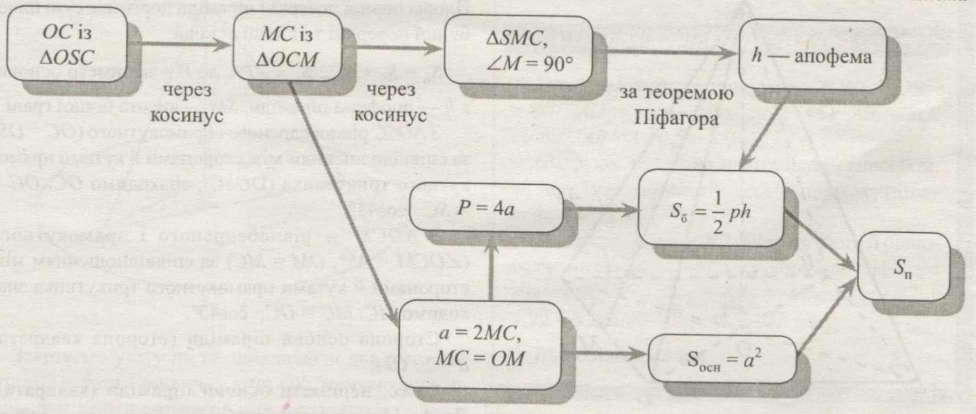


Схема 4



Оформлення розв'язання задачі

1. ΔOCS — прямокутний і рівнобедрений.
$OC = CS \cdot \cos 45° = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}$ (см).

2. ΔOCM — прямокутний і рівнобедрений.
$MC = OC \cdot \cos 45° = 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3$ (см).

3. $a = 2 \cdot OM$; $a = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

4. $P = 4a = 4 \cdot 6 = 24$ (см), $S_{осн} = a^2 = 6^2 = 36$ (см^2).

5. З ΔSMC за теоремою Піфагора $SM^2 = SC^2 - MC^2$;
$SM = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ (см).

6. $S_б = \frac{1}{2} ph$; $S_б = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ (см^2).

7. $S_п = 36\sqrt{3} + 36 = 36(\sqrt{3}+1)$ (см^2).

Відповідь: $S_п = 36(\sqrt{3}+1)$ см^2.

Пошук розв'язування задач спочатку майже не можливий без активної допомоги вчителя. Але поступово, отримуючи досвід і навички творчої діяльності, учні починають самостійно знаходити способи розв'язування задач.