Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Астаф'єва М. М. Задача мінімізації функціонала в теорії керування// Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 4(14). – С. 143-148.

Astafieva M. Problem Of Function Minimization In Theory Of Management // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 4(14). – P. 143-148.

УДК 517.9:519.8

М.М. Астаф'єва
Київський університет імені Бориса Грінченка, Україна
m.astafieva@gmail.com

ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІОНАЛА В ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ

Анотація. *В останні десятиліття теорія оптимального керування інтенсивно розвивається, що пояснюється не лише наявністю складних і цікавих суто математичних проблем, а й широким спектром прикладних задач у різних галузях науки і людської діяльності: фізиці, економіці, біології, екології, медицині, енергетиці та ін. Нові наукові (теоретичні) й реальні (прикладні) задачі відрізняються своєю складністю, що зумовлює не лише розширення сфери застосування математичного моделювання, а й удосконалення самих моделей у напрямі більшої їх точності та повноцінності. Особливо гостро в сучасних умовах стрімкого розвитку науки, техніки, інформаційних технологій постає проблема керованості системи (процесу). Як відомо, кожна задача оптимального керування містить такі складові: 1) математичну модель об'єкта керування; 2) мету керування (т. зв. критерій якості); 3) певні обмеження на стан (траєкторію) системи, тривалість процесу керування та ін., при яких має бути забезпечена мета керування. Пропонована стаття присвячена одній із оптимізаційних задач математичної теорії керування, у якій еволюційний процес описується лінійними диференціальними рівняннями, а функція керування задається невласним інтегралом.*

Ключові слова: *лінійне диференціальне рівняння, функція керування, функціонал, невласний інтеграл, оптимальне керування, мінімум функціонала, рівняння Ріккаті.*

Постановка проблеми. Логіка розвитку математичних методів і моделей за останні роки, суттєве розширення сфери їх застосування у наукових дослідженнях та при розв'язуванні прикладних задач, диктує включення до освітніх програм підготовки фахівців різних галузей знань і спеціальностей навчальних дисциплін з математичного моделювання. І тут ми наштовхуємося на проблеми. Математичне моделювання потребує глибоких і комплексних знань та винахідливості. Певна річ, що розв'язувати такі задачі не під силу одній людині, бо вона, при сучасному розвитку науки, не може володіти універсальним знанням. Потрібна кооперація фахівців певної (конкретної) предметної галузі і математиків, оскільки другі не завжди можуть самостійно зрозуміти суть задачі (проблеми), визначити характеристики реального процесу (явища, об'єкта), що моделюється, а потім оцінити адекватність і ефективність розробленої моделі, а першим, із цілком зрозумілих причин, не вистачає математичної підготовки, щоб «перекласти» реальну задачу мовою математики, обрати і застосувати відповідні математичні методи для її розв'язання, сформулювати висновки. Аналіз змісту курсів на тему математичного моделювання для різних спеціальностей в різних університетах показує, що вони, зазвичай, передбачають розгляд стандартних у певній галузі (біології, медицині, екології, економіці тощо) моделей і їх розв'язання (дослідження) за допомогою існуючих програмних засобів (математичних пакетів). І це, звісно, той максимум, якого можна очікувати від вивчення математичного моделювання на нематематичних спеціальностях, оскільки ні навчальний час, ні попередня математична підготовка студентів цих спеціальностей не дозволяє зробити більшого. Натомість, викладання математичних дисциплін студентам-математикам має бути пронизано наскрізною ідеєю прикладного застосування математичних методів і моделей, а спеціальні курси з математичного моделювання не лише знайомити з відомими математичними моделями, а й розширювати їх спектр, виховувати у студентів здатність інтегрувати й творчо використовувати математичні факти з різних розділів математики для модифікації й розробки нових моделей.

Аналіз актуальних досліджень. Математична теорія керування інтенсивно розвивається, охоплює на сьогодні широкий клас задач і численні методи та моделі. Їй присвячено дуже багато монографій, підручників і наукових статей українських та зарубіжних авторів. Основи сучасної теорії оптимального керування заклали Понтрягін Л. С., Болтянский В.Г. [4]. Методам варіаційного числення в оптимізаційних задачах присвячені, наприклад, дослідження [2, 3]. Дослідженням лінійних та нелінійних систем диференціальних рівнянь присвячені монографії [1, 5]. Питання теорії керування лінійних систем, зокрема й методи аналізу систем з невідомими параметрами, розглядаються в [6]. Актуальною є задача знаходження оптимізаційної функції керування в лінійних диференціальних рівняннях та їх системах, яка забезпечує мінімум функціонала певного виду. Для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами ця задача розглянута в [7]. У пропонованій статті викладено суть її розв'язання і наведено ілюстраційний приклад. Крім того аналогічна задача розв'язана для нестаціонарного випадку, тобто, коли коефіцієнти у правій частині рівняння залежать від часу.

Мета статті. Розглянути математичну модель у вигляді лінійного диференціального рівняння для оптимізаційної задачі керування еволюційним процесом у будь-якій галузі (мінімізація ризиків, досягнення потрібного результату за найкоротший час, економія енергоресурсів тощо); знайти оптимальне керування у вигляді невласного інтеграла певного виду.

Виклад основного матеріалу

1 (*скалярний випадок*). Нехай математичною моделлю процесу є скалярне диференціальне рівняння

$$\dot{x} = ax + bu, \tag{1.1}$$

де a, b – деякі сталі коефіцієнти, $u(t)$ – скалярна функція керування. Задано початкову умову:

$$x|_{t=0} = x_0. \tag{1.2}$$

Потрібно знайти таку функцію $u = u(t)$, визначену і неперервну на півосі $[0,+\infty)$, щоб розв'язок $x = x(t)$ рівняння (1) прямував до нуля на $+\infty$ і, крім цього, інтеграл

$$I[u] = \int_0^{+\infty} \left(u^2(t) + x^2(t)\right) dt \tag{1.3}$$

набував найменшого значення.

Шукатимемо керування, яке забезпечує мінімум функціонала (1.3), у вигляді

$$u(t) = -kx(t). \tag{1.4}$$

Зазначимо, що при цьому відповідний розв'язок $x(t)$ разом із функцією керування прямують до нуля на $+\infty$, що гарантує збіжність інтеграла (1.3).

Щоб знайти значення коефіцієнта k, розглянемо допоміжну функцію

$$V(t) = s \cdot x^2(t), \tag{1.5}$$

де $x(t)$ – деякий розв'язок рівняння (1.1) з початковою умовою (1.2), а коефіцієнт s залишається поки що невизначеним. Диференціюючи рівність (1.5), маємо:

$$\dot{V}(t) = 2s \cdot x(t) \cdot \dot{x}(t) = 2sx(t)(ax(t) + bu(t)).$$

Останнє співвідношення інтегруємо в межах від 0 до T і переходимо до границі при $T \to \infty$. Отримуємо

$$0 = V(0) + \int_0^{+\infty} 2sx(t)[ax(t) + bu(t)]dt \cdot$$

Додаючи цю рівність з (1.3) і враховуючи (1.5), маємо:

$$I[u] = V(0) + \int_0^{+\infty} \left[u^2 + 2sbux + x^2 + 2sax^2\right] dt = sx_0^2 + \int_0^{+\infty} \left[(u + sbx)^2 + \left(1 + 2as - b^2s^2\right)x^2\right] dt.$$

Підберемо s так, щоб виконувалася умова $1 + 2as - b^2s^2 = 0$. Це буде, зокрема, якщо $s = s_0 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b^2}$. Тепер $I[u]$ набуває вигляду:

$$I[u] = s_0x_0^2 + \int_0^{+\infty} \left(u(t) + s_0bx(t)\right)^2 dt. \tag{1.6}$$

Бачимо, що функціонал (1.6), а з ним і (1.3), набуває найменшого значення при умові $u(t) + s_0bx(t) = 0$. Отже, в (1.4) $k = s_0b$. Урахувавши це і підставляючи (1.4) в рівняння (1.1), отримуємо

$$\dot{x} = ax + b(-s_0b)x = -x \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову (1.2),

$$x = x(t) = x_0 e^{-t\sqrt{a^2+b^2}}$$

і відповідна функція керування $u = u(t) = -\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} x_0 e^{-t\sqrt{a^2+b^2}}$ забезпечує мінімум функціонала (1.3). Значення цього мінімуму:

$$\min I[u] = s_0 x_0^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b^2} \cdot x_0^2.$$

Отже, для будь-яких дійсних *a*, *b* ($b \neq 0$) і фіксованого x_0 знайдено функцію керування $u(t)$, при якій функціонал (1.3) досягає найменшого свого значення.

2 (*векторний випадок*). Розглянемо тепер випадок, коли еволюційний процес описується лінійною системою зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; x \in R^n, \; u \in R^m, \tag{2.1}$$

початкова умова: $x(t_0) = x_0$.

Припускаємо, що існують неперервні вектор-функції керування $u(t)$, $t \in R_+$, $u(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, такі, що розв'язок системи (2.1) із заданою початковою умовою $x(t) = e^{At}\left(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau\right)$ прямує до нуля на нескінченності. На множині таких вектор-функцій досліджуємо на мінімум функціонал

$$I[u] = \int_0^{+\infty} \left[\langle \Theta u(t), u(t) \rangle + \langle Mx(t), x(t) \rangle\right] dt, \tag{2.2}$$

де Θ, M – сталі квадратні матриці розмірності $m \times m$ та $n \times n$, відповідно, причому, матриця Θ додатно визначена, а M – невід'ємна.

Як і у скалярному випадку (п. 1), шукаємо $u(t)$ у вигляді

$$u(t) = -K \cdot x(t),$$

де K – деяка стала прямокутна матриця.

Розглядаючи допоміжну квадратичну форму

$$V(x) = \langle Sx, x \rangle, \; x \in R^n,$$

і виконавши ті ж процедури, що й у скалярному випадку (диференціювання, наступне інтегрування, перехід до границі, почленне додавання відповідних рівностей), знаходимо:

$$K = \Theta^{-1} B^T S.$$

У результаті виявиться, що для мінімізації функціонала (2.2) S має бути розв'язком матричного рівняння Ріккаті:

$$-SNS + SA + A^T S + M = 0,$$

де фіксована симетрична матриця N визначається рівністю $N = B\Theta^{-1}B^T$.

Якщо вдалося знайти розв'язок S цього рівняння, то оптимальне керування $u(t)$ має вигляд

$$u = -\Theta^{-1} B^T S \cdot \exp\{(A - B\Theta^{-1}B^T S)t\} \cdot x_0,$$

а мінімальне значення функціонала (2.2) дорівнює: $I_{\min} = \langle Sx_0, x_0 \rangle$.

3 (*приклад*). Для задачі Коші

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} + 2x = u, \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = -1 \end{cases} \tag{3.1}$$

потрібно знайти функцію керування $u = u(t)$, визначену і неперервну на додатній півосі, при якій мінімізується функціонал

$$I[u] = \int_0^{+\infty} \left[4u^2(t) + 9x^2(t) + 26x(t)\dot{x}(t) + 41\dot{x}(t)\right] dt. \tag{3.2}$$

Знайти мінімальне значення цього функціонала.

Розв'язання.

Перейдемо від лінійного диференціального рівняння другого порядку до системи двох рівнянь, вважаючи $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$. Тоді задача (3.1) набуває вигляду (3.3) – (3.4)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + u, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$x_1(0) = 1, \; x_2(0) = -1, \tag{3.4}$$

а функціонал (3.2) запишеться так:

$$I[u]=\int_0^{+\infty}\left[4u^2+\left\langle\begin{pmatrix}9 & 13\\ 13 & 41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right\rangle\right]dt. \quad (3.5)$$

Таким чином, маємо:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ \Theta=4,\ M=\begin{pmatrix}9 & 13\\ 13 & 41\end{pmatrix},\ N=B\Theta^{-1}B^T=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\cdot(0\quad 1)=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Невідому симетричну матрицю $S=\begin{pmatrix}s_1 & s\\ s & s_2\end{pmatrix}$ отримуємо із рівняння Ріккаті (2.3), яке у нашій задачі має вигляд матричного рівняння

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}s^2 & ss_1\\ ss_1 & s_2^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2s & s+s_1\\ -2s_2 & s+s_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2s & -2s_2\\ s+s_1 & s+s_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 13\\ 13 & 41\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

розв'язуючи яке, знаходимо $S=\begin{pmatrix}30 & 2\\ 2 & 18\end{pmatrix}$.

Тоді $K=\Theta^{-1}B^TS=\frac{1}{4}\cdot(0\quad 1)\cdot\begin{pmatrix}30 & 2\\ 2 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}$ і оптимальне керування $u=-Kx=-\frac{1}{2}x_1-\frac{9}{2}x_2$, або, для початкового рівняння, $u=-\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}\dot{x}$. Підставивши знайдену функцію u в (3.1), дістаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами $\ddot{x}+\frac{7}{2}\dot{x}+\frac{5}{2}x=0$. Його розв'язок, що задовольняє умови (3.2), $x(t)=e^{-t}$, а шукана функція керування $u(t)=4e^{-t}$. Найменше значення функціонала дорівнює:

$$\min I[u]=\langle Sx_0,x_0\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}30 & 2\\ 2 & 18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\rangle=30\cdot 1+4\cdot 1\cdot(-1)+18\cdot(-1)^2=44.$$

4 (*задача мінімізації функціонала з векторною функцією керування і змінними коефіцієнтами*).

Розглянемо диференціальне рівняння із векторною функцією керування

$$\dot{x}=a(t)x+b_1(t)u_1+b_2(t)u_2+...+b_m(t)u_m, \quad (4.1)$$

де $a(t)$ і $b(t)$ – деякі скалярні функції, неперервні і обмежені на півосі $[0,+\infty)$, початкова умова: $x(t_0)=x_0$. Розглянемо функціонал вигляду

$$I[u]=\int_0^{+\infty}\left(r_1(t)u_1^2(t)+r_2(t)u_2^2(t)+...+r_m(t)u_m^2(t)+q(t)x^2(t)\right)dt, \quad (4.2)$$

де скалярні функції $r_i(t),q(t)\in C^0(R_+)$ задовольняють умови:

$$r_i(t)\geq r_0,\ i=\overline{1,m},\ r_0=const>0,\ q(t)\geq 0\ \forall t\in R_+. \quad (4.3)$$

Розглянемо скалярну функцію

$$V(t)=s(t)\cdot x^2(t), \quad (4.4)$$

де $s(t)$ є, поки що, невизначеною скалярною функцією, неперервно диференційовною і обмеженою на R_+. Диференціюючи рівність (4.4), маємо

$$\dot{V}(t)=\dot{s}(t)x^2(t)+2s(t)x(t)\dot{x}(t)=\dot{s}(t)x^2(t)+2s(t)x(t)\left[a(t)x(t)+\sum_{i=1}^m b_i(t)u(t)\right].$$

Отриману рівність інтегруємо від 0 до T і переходимо до границі при $T\to\infty$, отримуємо:

$$0=V(0)+\int_0^{+\infty}\left\{\dot{s}(t)x^2(t)+2s(t)x(t)\left[a(t)x(t)+\sum_{i=1}^m b_i(t)u(t)\right]\right\}dt. \quad (4.5)$$

Праву частину рівності (4.5) додамо до правої частини (4.2), отримуємо запис функціонала (4.2) в іншому вигляді:

$$I[u]=V(0)+\int_0^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^m r_iu_i^2+2s\sum_{i=1}^m b_iu_ix+\dot{s}x^2+2sax^2+qx^2\right]dt=$$

$$=s(0)x_0^2+\int_0^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^m r_i\left(u_i+\frac{sb_i}{r_i}x\right)^2+\left(\dot{s}+2as+q-\sum_{i=1}^m\frac{b_i^2}{r_i}s^2\right)x^2\right]dt \quad (4.6)$$

При цьому $s(t)$ є довільно вибраною неперервно диференційовною і обмеженою на півосі R_+ скалярною функцією. Доцільно вибрати цю функцію так, щоб другий доданок в підінтегральній функції (4.6) дорівнював нулю, тобто, щоб виконувалася рівність:

$$\dot{s}=\left(\sum_{i=1}^m\frac{b_i^2(t)}{r_i(t)}\right)s^2-2a(t)s-q(t). \quad (4.7)$$

Нехай це є можливим, тобто диференціальне рівняння Ріккаті (4.7) має розв'язок $s = s_0(t)$, обмежений на півосі R_+, який задовольняє нерівність

$$s_0(t) \geq 0 \quad \forall t \in R_+. \tag{4.8}$$

(Зазначимо, що питання існування обмежених розв'язків рівняння Ріккаті, які задовольняють умову (4.8) – предмет окремого дослідження.)

Підставляючи в рівність (4.6) $s = s_0(t)$, отримуємо

$$I[u] = s_0(0)x_0^2 + \int_0^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} r_i(t) \left(u_i(t) + \frac{s_0(t)b_i(t)}{r_i(t)} x(t) \right)^2 \right] dt. \tag{4.9}$$

Враховуючи нерівності (4.3), бачимо, що функціонал (4.9) набуває найменшого значення $s_0(t)x_0^2$ при виконанні наступних співвідношень:

$$u_i(t) = -\frac{s_0(t)b_i(t)}{r_i(t)} x(t), \; i = \overline{1,m}. \tag{4.10}$$

Підставляючи (4.10) у рівняння (4.1), запишемо його розв'язок, що задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$:

$$x = x_0 \exp\left\{ \int_0^t \left[a(\sigma) - s_0(\sigma) \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2(\sigma)}{r_i(\sigma)} \right] d\sigma \right\}.$$

Тоді відповідна оптимальна вектор-функція керування набуває вигляду

$$u = (u_1(t), \ldots \mu_m(t)) = -s_0(t) \cdot \left(\frac{b_1(t)}{r_1(t)}, \ldots, \frac{b_m(t)}{r_m(t)} \right) \cdot x_0 \exp\left\{ \int_0^t \left[a(\sigma) - s_0(\sigma) \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2(\sigma)}{r_i(\sigma)} \right] d\sigma \right\}.$$

Висновки і перспективи подальших досліджень. У заданій постановці задачі встановлено умови, при яких функціонал мінімізується, знайдено відповідні оптимізаційні керування. Пропоновану математичну модель і метод її дослідження можна включити до змісту дисциплін на теми математичного моделювання, теорії керування для магістрів математичних спеціальностей університетів.

При розв'язуванні подібних задач доводиться мати справу з рівняннями Ріккаті. Знаходження його розв'язків – сама по собі складна задача, розв'язати яку вдається далеко не завжди. Тому перспективними є пошуки в напрямі знаходження та дослідження розв'язків цього класу рівнянь.

Список використаних джерел

1. Митропольський Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 270 с.
2. Миненко А. С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, № 10. – С. 1385–1394.
3. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. К.: ТВіМС, 2004. – 384 с.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 393 с.
5. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302с.
6. Tadeusz Kaczorek. Teoria sterowania i systemów. – Warszawa: PWN, 1999. – 801 c.
7. Zdzisław Wyderka. Teoria sterowania optymalnego : (skrypt przeznaczony dla studentów IV i V roku matematyki, nr.397). – Katowice : Uniwersytet Śląski, 1987.

References

1. Y. Mitropol'skii, A. Samoilenko, V. Kulik, Investigation of the dichotomy of linear systems of differential equations using the Lyapunov functions. – K.: Science. Dumka, 1990. – 270 p. (In Russian).
2. A. Minenko. On the minimization of an integral functional by the Ritz method, Ukrain. mat. journal. – 2006. – 58, No. 10. – P. 1385–1394. (In Russian).
3. M. Moklyachuk. Variational calculus. Extreme tasks. K .: TVIMS, 2004. – 384 p. (In Ukrainian).
4. L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, E. Mishchenko. Mathematical theory of optimal processes. – Moscow: Nauka, 1983. – 393 p. (In Russian).
5. A. Samoylenko. Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations. – Moscow: Nauka, 1987. – 302 p. (In Russian).
6. Tadeusz Kaczorek. Theory of control and systems. – Warsaw: PWN, 1999. – 801 c. (In Polish).
7. Zdzislaw Wyderka. Theory of optimal control: (script for students of the fourth and fifth year of mathematics, no.397). – Katowice: University of Silesia, 1987.

PROBLEM OF FUNCTION MINIMIZATION IN THEORY OF MANAGEMENT

Maria Astafieva

Kiev Boris Grinchenko University, Ukraine

Abstract. *In recent decades, optimal control theory is intensively developed, which is explained not only by the presence of complex and interesting pure mathematical problem, but also a wide range of applied problems in various fields of science and human activity: physics, Economics, biology, ecology, medicine, energy etc. New scientific (theoretical) and real (application) tasks differ in their complexity, resulting in not only expanding the scope of mathematical modeling and improve the models themselves in the direction of greater their accuracy and usefulness. Particularly acute in modern conditions of rapid development of science, technology, information technology arises the problem of controllability of the system (process). As you know, each optimal control problem contains the following components: 1) a mathematical model of control object; 2) goal management (T. N. The quality criterion); 3) constraints on the state (trajectory) of the system, the process time control, etc., which must be provided for the purpose of control. The article is devoted to one of the optimization problems of mathematical control theory in which the evolutionary process is described by linear differential equations and the control function is specified by an improper integral.*

Keywords: *linear differential equation, control function, functional, inappropriate integral, optimal control, minimum of functional, Rikkat equation.*