ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДЛЯ БАКАЛАВРІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

(1 ЧАСТИНА)

Міністерство освіти і науки України
Київський університет імені Бориса Грінченка

Володимир ПРОШКІН

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДЛЯ БАКАЛАВРІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ (1 ЧАСТИНА)

Навчальний посібник

Київ – 2020

УДК 51:330.4:378.22(07)
П 84

Р е ц е н з е н т и:

Працьовитий М. В. – доктор фізико-математичних наук, професор, декан Фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова

Семко М. М. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Університету державної фіскальної служби України

П 84 **Прошкін Володимир. Вища математика для бакалаврів економічних спеціальностей.** Навчальний посібник для студентів спеціальностей 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 051 «Економіка». Київ. 2020. 154 с.

Навчальний посібник призначено студентам економічного бакалаврату для підготовки до занять з навчальних дисциплін: «Математики для фінансистів», «Математика в економіці: Вища математика». У посібнику подано основні теоретичні відомості про розділи «Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія» із прикладами розв’язання типових і нестандартних задач, причому акцент зроблено на економіко-фінансову спрямованість задач. Указівки з їхнього розв’язання представлено в максимально простому та доступному вигляді. У кінці кожної теми запропоновано питання для самоперевірки, завдання для самостійної роботи з відповідями.

УДК 51:330.4:378.22(07)

Рекомендовано до друку Вченою радою Київського університету імені Бориса Грінченка (протокол № 8 від 24 вересня 2020 року)

ЗМІСТ

ВСТУП

Шановні студенти!

Перед Вами навчальний посібник, підготовлений для студентів економічних спеціальностей, які вивчають дисципліну «Вища математика».

Можливо, не всі першокурсники зраділи, коли побачили в розкладі серед інших навчальних дисциплін математику… Доволі часто мені трапляється чути щось подібне: «Навіщо взагалі математика в університеті», «Я не розумію математику ще зі школи», «Я і без математики добре орієнтуюся в економічних питаннях» тощо. Дійсно, виникає питання – наскільки потрібна математика студентам економічного бакалаврату?

Протягом багатьох років викладання цієї дисципліни в університеті, я окреслив наступне пояснення.

По-перше, математика дозволяє ефективно й швидко розв'язувати теоретичні та прикладні економічні проблеми. Їх можна перекласти на мову математики (говорять, що в цьому випадку будують відповідні математичні моделі). Далі відомими математичними методами розв'язати отримані математичні задачі, а вже потім відповіді інтерпретувати на мову економічної науки.

По-друге, майбутніх бакалаврам потрібно вивчати чимало економічних дисциплін, а майже всі вони використовують математику. Отже, варто сприймати математику як важливий інструментарій опонування тих навчальних дисциплін, що сприяють формуванню фахової компетентності економістів.

По-третє, математика є стандартом професійної підготовки студентів економічних спеціальностей у країнах Західної Європи. Україна у 2005 р. приєдналася до європейського освітнього простору, відтак, наші університетські освітні програми відповідають провідним європейським стандартам.

І ще – хотілося б навести приклад посту, який доволі часто зустрічається у «Фейсбуці»: 90% того, що вивчають у школі ніколи не знадобиться у повсякденному житті, але це дозволяє так натренувати мозок, щоб потім приймати вірні рішення. І саме в цьому аспекті як найкраще допомагає математика, яка на думку відомого українського педагога Василя Сухомлинського «… вчить мислити й разом з тим вселяє віру в безмежні сили людського розуму. Вона виховує волю, характер».

Посібник складається із трьох теоретичних розділів: «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія». У кожному із них подано основні теоретичні відомості (означення, теореми, властивості тощо), у тому числі цікаві історичні математичні факти, приклади розв'язання задач, а також розкрито основні напрямки використання математики в економіці. Кожний розділ закінчується переліком питань для самоконтролю, містить низку задач для самостійної роботи з відповідями. У четвертому розділі – задачі для індивідуальної роботи студентів за варіантами. Усього подано 25 варіантів.

Сподіваюся, що цей посібник допоможе Вам у навчанні! Успіхів!

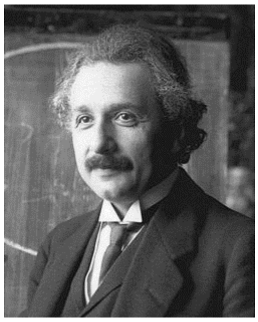
З повагою, Володимир Прошкін

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРИ

<u>Цікаво знати</u> Алгебра (від араб. *аль-джабр*) – розділ математики, який можна охарактеризувати як узагальнення та розширення арифметики. У цьому розділі числа та інші математичні об'єкти позначаються літерами або іншими символами. Це дозволяє записувати та досліджувати їхні властивості.

Цікаво, що термін «аль-джабр» уперше запропонував Абу Абдулла Абу Джафар Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі (780 – 850 рр.) – великий перський математик, географ, історик та астроном. Його ім'я дало назву терміну «алгоритм».

Історично склалося, що першим питанням лінійної алгебри було знаходження розв'язків лінійних рівнянь, – звідси й назва.



«Мені доводиться розподіляти свій час між політикою і рівняннями. Проте рівняння, на мою думку, значно важливіші, бо політика існує тільки для даного моменту, а рівняння будуть існувати вічно» (Альберт Ейнштейн (1879 – 1955 рр.) – один з найвизначніших фізиків ХХ століття, лауреат Нобелівської премії з фізики 1921 року, член всесвітньої української академічної організації «Наукове товариство імені Шевченка»).

ТЕМА 1. МАТРИЦІ

1.1. Основні поняття

Поняття матриці та заснований на ньому розділ математики – матрична алгебра мають важливе значення для сучасних фахівців з економіки, адже значну кількість математичних моделей (наближеного опису економічних явищ за допомогою математичної символі) представляють у компактній матричній (табличній) формі.

<u>Означення</u> *Матрицею* називають прямокутну таблицю чисел, що містить m рядків і n стовпців.

Матриці зазвичай позначають великими латинськими літерами та записують у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або скорочено $A = (a_{ij})$, де $i = 1, 2, 3, \dots, m$ – номер рядка (записують також $i = \overline{1, m}$), $j = 1, 2, 3, \dots, n$ – номер стовпця (записують також $j = \overline{1, n}$), числа $m, n \in N$.

Матрицю A називають матрицею розміру $m \times n$ та записують $A_{m\times n}$.

Приклад

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \\ -10 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ – матриця розміру 3×3, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ – матриця розміру 2×3, $C = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 12 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$ – матриця розміру 3×3.

Числа a_{ij} , що складають матрицю, називають її *елементами*, перший індекс елементу вказує номер рядка, в якому розташований цей елемент, а правий індекс – номер стовпця.

Цікаво знати

Прообразом матриць вважають латинські квадрати**,** в яких у кожному стовпці та кожному рядку всі елементи зустрічаються по одному разу: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, а також магічні квадрати, в яких сума чисел у кожному рядку, кожному стовпцю та на обох діагоналях однакова:

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 7 & 6 & \to 15 \\ & 9 & 5 & 1 & \to 15 \\ & 4 & 3 & 8 & \to 15 \\ \swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \end{array}$$

Вперше згадування про матриці міститься в китайському тексті «Математика в дев’яти книгах» (X ст. до н. е. – II ст. до н. е.).

Теорію матричного числення розробляли відомі математики: японський математик Такакадзу Секі (1683 р.), німецькі математики Лейбніц (1693 р.), Крамер (1750 р.), Ґаус та Йордан (1800 р.) тощо.

Термін «матриця» уперше було запроваджено в 1848 р. англійським математиком Дж. Сильвестром.

Використання елементів алгебри матриць є одним з основних методів вирішення багатьох економічних і управлінських задач. Найчастіше матриці застосовують при роботі з базами даних, у яких інформація зберігається та переробляється в матричній формі.

Приклад

Таблиця розподілу ресурсів за окремими галузями економіки

Ресурси	Галузі економіки	
	Промисловість	*Сільське господарство*
Електроенергія	5,3	4,6
Трудові ресурси	3,8	2,1
Водні ресурси	6,7	5,9

може бути подана в компактній формі у вигляді матриці розподілу ресурсів за галузями: $A = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}6 \\ 3{,}8 & 2{,}1 \\ 6{,}7 & 5{,}9 \end{pmatrix}$. У цьому запису, наприклад, матричний елемент $a_{11} = 5{,}3$ показує, скільки електроенергії споживає промисловість, а елемент

$a_{22} = 2{,}1$ – скільки трудових ресурсів споживає сільське господарство тощо.

<u>**Означення**</u> Матриці називають *рівними* між собою, якщо вони однакового розміру (мають однакове число рядків і стовпців) та їх відповідні елементи (елементи, що стоять на однакових місцях) рівні.

Тобто $A = B$, якщо

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ де } i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},\ m, n \in N.$$

<u>**Означення**</u> Матрицю $(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$, що складається з одного рядка, називають *матрицею-рядком*, а матрицю $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, що складається з одного стовпця, – *матрицею-стовпцем*.

<u>**Приклад**</u>

$A = (-4 \quad 6 \quad 4 \quad 3)$ – матриця-рядок, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець.

<u>**Означення**</u> Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою*. Позначається літерою *O*.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

У матричному численні матриця *O* грає роль числа 0 у арифметиці.

Матрицю розміру $m \times n$ називають *прямокутною*.

<u>**Означення**</u> Матрицю, у якій число рядків дорівнює числу стовпців, називають *квадратною*.

<u>**Означення**</u> Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають *матрицею n-го порядку*, причому число рядків або стовпців називають *порядком матриці*.

<u>**Приклад**</u>

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6{,}5 & 1 \end{pmatrix}$ – матриця 2-го порядку,

Головна діагональ

$K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ – матриця 3-го порядку.

Побічна діагональ

Елементи, що стоять на діагоналі, яка йде з верхнього лівого кута в нижній правий, утворюють *головну діагональ*, а з нижнього лівого кута у верхній правий, – *побічну діагональ*.

Означення Квадратну матрицю, у якій всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають *діагональною*.

Приклад $F = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}1 \end{pmatrix}$.

Означення Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють один одному (α), то матрицю називають *скалярною*.

Приклад $G = \begin{pmatrix} 2{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}3 \end{pmatrix}$.

Означення. Якщо всі елементи скалярної матриці дорівнюють 1, то матрицю називають *одиничною*.

Позначається літерою *E*.

Одинична матриця *n-го* порядку має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, одинична матриця – окремий випадок скалярної при $\alpha = 1$.

У матричному численні матриця *E* грає роль числа 1 у арифметиці.

Означення Матрицю, що одержана із даної заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називають матрицею, *транспонованою* до даної.

Позначається A^T.

Приклад

Якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -5 & 40 & 5 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 40 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; якщо $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, то $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Означення *Транспонуванням матриці* називають заміну рядків стовпцями зі збереженням їхніх номерів.

Властивість транспонованої матриці:

$$(A^T)^T = A.$$

1.2. Операції над матрицями

Над матрицями так само як й над числами можна здійснювати низку операцій, причому деякі з них аналогічні операціям над числами, а інші – специфічні.

• Додавання матриць.

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць одного розміру.

Означення *Сумою* двох матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ і $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називають матрицю $C_{m\times n} = (c_{ij})$ таку, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \text{де}\ i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ n},\ m, n \in N,$$

тобто матриця того ж розміру, що й матриці A і B, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів цих матриць (*говорять, що матриці складаються поелементно*).

Символічно записують так:

$$A + B = C.$$

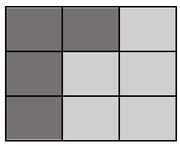
Приклад

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 & 0+4 & 1+1 \\ 5-3 & -4+2 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 & 4+2 \\ 1+2 & 3+0 \\ -2-5 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

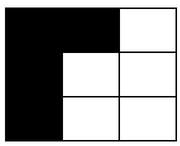
Приклад



Літеру Г на рисунку зображено за допомогою 9 пікселів у сітці 3×3.

Розгляньмо чотири відтінки: білий, світло-сірий, темно-сірий та чорний і занумеруймо їх наступним чином: 0, 1, 2, 3 відповідно.

Представимо матрицю, кожний елемент якої відповідає певному відтінку: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Щоб збільшити контрастність рисунку (темно-сірий відтінок літери перетворити на чорний (тобто збільшити на 1), а світло-сірий відтінок – на білий (тобто зменшити на 1), до матриці $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ треба додати матрицю



$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Отримаємо матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, яка відповідає сітці (рис.).

Властивості додавання матриць:

A + B = B + A

A + (B + C) = (A + B) + C

A + O = A

A + (–A) = O

- Віднімання матриць.

Означення *Різницею* двох матриць A і B одного розміру називають матрицю C того ж розміру, таку, що

$$C + B = A.$$

Із даного означення випливає, що елементи матриці C дорівнюють різниці відповідних елементів матриць A і B.

Приклад

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 & 0-(-1) & 2-1 \\ -3-2 & 3-3 & -1-(-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Множення матриці на число.

Означення *Добутком матриці* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* k називають матрицю $B_{m\times n} = (b_{ij})$ таку, що

$$b_{ij} = k\cdot a_{ij}, \text{ де } i=\overline{1,\ m},\ j=\overline{1,\ n},\ m, n \in N,$$

тобто матрицю того ж розміру, елементи якої дорівнюють добутку числа k на відповідні елементи матриці A.

Приклад

$$3\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Властивості множення матриць на число:

$1\cdot A = A$ $\qquad$ $\alpha\cdot(A + B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$

$(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot B$ $\qquad$ $\alpha\cdot(\beta A) = (\alpha\beta)\cdot A$,

де A, B, С – матриці, α і β – числа.

Означення Матрицю $-A = (-1)\cdot A$ називають *протилежною матриці* A.

Приклад Якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, то $-A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

З а у в а ж е н н я Різницю матриць $A - B$ можна визначити так:

$$A - B = A + (-B).$$

П р и к л а д Турагенції «Мрія» і «Феєрія» реалізують путівки до Затоки, Коблево та Бердянську в готелі першого, другого й третього класів. Орієнтовна кількість путівок, що реалізуються за тиждень, задається таблицею:

Клас готелю	Турагенція «Мрія»			Турагенція «Феєрія»		
	Затока	*Коблево*	*Бердянськ*	*Затока*	*Коблево*	*Бердянськ*
1	300	220	180	200	150	100
2	120	100	120	200	100	130
3	50	40	45	30	40	50

Скільки путівок кожного класу продають обидва агентства щотижня? Скільки путівок кожного класу було продано, якщо перше агентство працювало 2 тижні, а друге – 3?

Реалізацію путівок турагенціями можна описати за допомогою матриць A і B відповідно:

$A = \begin{pmatrix} 300 & 220 & 180 \\ 120 & 100 & 120 \\ 50 & 40 & 45 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 100 \\ 200 & 100 & 130 \\ 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}$.

Тоді $A + B = \begin{pmatrix} 500 & 370 & 280 \\ 320 & 200 & 250 \\ 80 & 80 & 95 \end{pmatrix}$ – матриця кількості путівок кожного класу, що продають обидві агенції щотижня. Оскільки турагенція «Мрія» пропрацювала 2 тижні, а турагенція «Феєрія» – 3 тижні, можна записати:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 600 & 440 & 360 \\ 240 & 200 & 240 \\ 100 & 80 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 600 & 450 & 300 \\ 600 & 300 & 390 \\ 90 & 120 & 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 & 990 & 660 \\ 840 & 500 & 630 \\ 190 & 200 & 240 \end{pmatrix}.$$

1.3. Елементарні перетворення матриць

1. Перестановка місцями рядків (стовпців) матриці.

2. Множення всіх елементів рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля.

3. Додавання до всіх елементів рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне й те ж число.

4. Викреслювання рядка (стовпця), елементи якого дорівнюють 0.

О з н а ч е н н я Дві матриці A і B називають *еквівалентними*, якщо одна з них виходить з іншої за допомогою кінцевої множини елементарних перетворень.

Записують: $A \sim B$.

У роботі часто використовують поняття східчастої матриці, в якій кожний крайній елемент (відмінний від нуля, а всі інші елементи, що розташовані лівіше його, дорівнюють нулю) кожного рядка знаходиться правіше крайнього елемента попереднього рядка.

<u>**П р и к л а д**</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

<u>**П р и к л а д**</u> За допомогою елементарних перетворень привести матрицю до східчастого вигляду:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. <u>Перший етап</u>. Віднімаємо від другого рядка перший, помножений на 3, записуємо результат у другий рядок. До третього рядка додаємо перший, помножений на 5, результат записуємо в третій рядок. <u>Другий етап</u>. Помножимо другий рядок на 3, а третій – на 2, отримані рядки додаємо, а результат записуємо в третій рядок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.4. Множення матриць

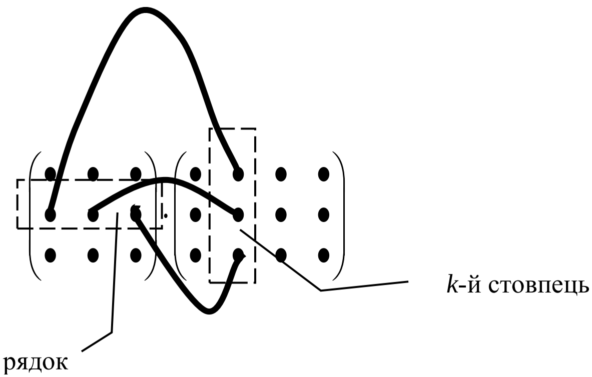
Операція множення двох матриць вводиться тільки для випадку, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці.

<u>**О з н а ч е н н я**</u> *Добутком матриці* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на матрицю* $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називають матрицю $C_{m\times p} = (c_{ij})$ таку, що

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk},$$

тобто елемент *i-го* рядка й *k-го* стовпця матриці добутку C дорівнює сумі добутків елементів *i-го* рядка матриці A на відповідні елементи *k -го* стовпця матриці B.

Отримання елементу c_{ik} показано на схемі.



Добуток матриць A і B, узятих у вказаному порядку, позначається $A\cdot B$ або AB.

Добутком двох прямокутних матриць є прямокутна матриця, число рядків якої дорівнює числу рядків першої матриці, а число стовпців – числу стовпців другої матриці.

Приклад

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot7+2\cdot9+3\cdot0 & 1\cdot8+2\cdot10+3\cdot1\\ 4\cdot7+5\cdot9+6\cdot0 & 4\cdot8+5\cdot10+6\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 31\\ 73 & 88\end{pmatrix}.$$

Із означення множення матриць видно, якщо є можливим множення матриці A на матрицю B, то звідси, взагалі кажучи, не випливає можливість множення матриці B на матрицю A.

Приклад

Для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}$ добуток AB існує, оскільки число стовпців матриці A (3) співпадає з числом рядків матриці B. Матриця-добуток матиме розмірність 2×3.

Добуток BA не існує, оскільки число стовпців матриці B не співпадає з числом рядків матриці A ($3\neq 2$).

Крім того, для множення матриць, взагалі кажучи, не властива переставна властивість.

Приклад Якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$, то $AB=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}$.

Приклад Якщо $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 9 & 8 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, то

$AB=(-1\cdot 2+0\cdot(-4)+9\cdot 3+8\cdot 2+1\cdot 1)=(42)$,

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 18 & 16 & 2\\ 4 & 0 & -36 & -32 & -4\\ -3 & 0 & 27 & 24 & 3\\ -2 & 0 & 18 & 16 & 2\\ -1 & 0 & 9 & 8 & 1\end{pmatrix}.$$

Означення Матриці A і B називають *переставними*, якщо добутки AB і BA визначені та $AB = BA$.

Зауваження Якщо матриці A і B – квадратні матриці одного порядку, то добутки AB і BA завжди існують.

Легко показати, що

$$A\cdot E = E\cdot A = A,$$

де A – квадратна матриця, E – одинична матриця того ж розміру.

З а у в а ж е н н я Квадратна матриця A^2 – результат множення цієї матриці самої на себе. Аналогічно розглядається поняття *n-го* степеня матриці А, тобто

$$A^n = \underbrace{A * A * \ldots * A}_{n \text{ разів}}.$$

В л а с т и в о с т і   м н о ж е н н я   м а т р и ц:

$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$	$(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
$A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$	$\alpha\,(AB) = (\alpha\,A)\,B = A\,(\alpha\,B)$
$A\cdot O = O$	$A\cdot E = E\cdot A = A$
$(A + B)^T = A^T + B^T$	$(AB)^T = B^T\cdot A^T$

Пояснимо вищезазначена на прикладах.

П р и к л а д

Знайти добутки матриць А·В і В·А, якщо $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Добуток матриць $A\cdot B$ існує, тому що число стовпців матриці A (три) збігається з числом рядків матриці B. Матриця-добуток $C = A\cdot B$ буде мати розмір 2×3 (це крайні цифри, що показують розмір матриць A і B: $\underbrace{2\times 3 \text{ і } 3\times 3}$).

$$C_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 4 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 5 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 6 + (-1)\cdot 7 & 1\cdot 4 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 5 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Добуток $B\cdot A$ не існує, адже число стовпців матриці B не збігається з числом рядків матриці A ($3 \neq 2$).

П р и к л а д Знайти добутки матриць $A\cdot B$ і $B\cdot A$, якщо

$$A_{1\times 5} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix},\ B_{5\times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді $A_{1\times 5} \cdot B_{5\times 1} = C_{1\times 1} = (-1\cdot 2 + 0\cdot(-4) + 9\cdot 3 + 8\cdot 2 + 1\cdot 1) = (42)$ і

$$B_{5\times 1} \cdot A_{1\times 5} = D_{5\times 5} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 18 & 16 & 2 \\ 4 & 0 & -36 & -32 & -4 \\ -3 & 0 & 27 & 24 & 3 \\ -2 & 0 & 18 & 16 & 2 \\ -1 & 0 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

П р и к л а д Знайти значення матричного многочлена *f(A)*, якщо
$f(x) = -2x^2 + 5x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = -2A^2 + 5A + 9E = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

П р и к л а д

Кожне із трьох відділень кондитерської фабрики виробляє чотири види продукції: *A, B, C* і *D*. Обсяги щоденного виробництва (у кг.) задані таблицею:

№ відділення	Вид продукції			
	A	*B*	*C*	*D*
1	50	100	90	100
2	30	50	20	40
3	100	100	20	30

На виробництво кілограма продукції кожного виду використовують сировину відповідно в кількостях *1 кг, 1,3 кг, 0,5 кг, 1 кг*. Скільки сировини необхідно кожному відділенню щодня?

Вартість кілограма продукції, що випускається, дорівнює відповідно *10, 15, 20, 15 у. о.* Яка вартість продукції, що випускається щодня кожним відділенням?

Розглянемо матрицю обсягів щоденного виробництва X і матрицю сировини B:

$X = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 90 & 100 \\ 30 & 20 & 200 & 40 \\ 100 & 100 & 20 & 30 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}3 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Витрати сировини можна обчислити, помноживши матрицю X на матрицю B:

$Q = X \cdot B = \begin{pmatrix} 325 \\ 235 \\ 270 \end{pmatrix}$. Отже, першому відділенню потрібно *325 кг*, другому – *235 кг*, третьому – 270 кг сировини щодня.

Нехай $P = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$ – матриця вартості продукції. Тоді вартість продукції, що випускається щодня кожним відділенням, можна знайти так: $M = X \cdot P = \begin{pmatrix} 5300 \\ 5650 \\ 3350 \end{pmatrix}$.

Таким чином, перше відділення випускає продукції на *5300 у.о.*, друге – на

5650 у.о., третє – на *3350 у.о.*

Приклад Підприємство випускає продукцію трьох видів: P_1, P_2, P_3, використовує сировину двох типів: S_1 і S_2. Норми витрати сировини характеризуються матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, де кожен елемент a_{ij} показує, скільки одиниць сировини j-го типу витрачається на виробництво одиниці продукції i-го типу. План випуску продукції задається матрицею $C = (100\ 80\ 130)$, вартість одиниці кожного типу сировини (грн.) – матрицею $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$. Визначити витрати сировини для планового випуску продукції й загальну вартість сировини.

Матриця витрат сировини S може бути записана як добуток

$$S = C \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 \cdot 2 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 & 100 \cdot 3 + 80 \cdot 2 + 130 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}.$$

Тоді загальна вартість сировини Q може бути записана в матричному вигляді

$$Q = S \cdot B = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = (730 \cdot 30 + 980 \cdot 50) = (70900).$$

Приклад

Підприємство випускає щодоби чотири види виробів. Визначити витрати сировини S, витрати робочого часу T і вартість P продукції, що випускається. Основні виробничо-економічні показники продукції висвітлені в таблиці:

Вид виробу	Кількість виробів, од.	Витрати сировини, кг/вир.	Норма часу виготовлення, г/вир.	Вартість виробу, у.о./вир.
1	30	5	8	11
2	20	12	7	13
3	70	3	6	10
4	60	10	5	9

За таблицею складемо чотири матриці, що характеризують весь виробничий цикл:

1) $A = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ – матриця асортименту, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ – матриця витрат сировини, $C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 15 & 8 \end{pmatrix}$ – матриця витрат робочого часу, $D = \begin{pmatrix} 30 & 15 & 45 & 20 \end{pmatrix}$ – матриця вартості.

2) Тоді шукані величини будуть становити собою відповідні добутки матриці асортименту A на матриці B, C і D.

3) $S = A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot (5 \quad 2 \quad 7 \quad 4) = (570)$ кг.

4) $T = A \cdot C = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot (10 \quad 5 \quad 15 \quad 8) = (1220)$ г.

5) $P = A \cdot D = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot (30 \quad 15 \quad 45 \quad 20) = (3500)$ кг.

Приклад У таблиці наведено дані про денну продуктивність 5 підприємств холдингу, що випускають чотири види продукції зі споживанням трьох видів сировини, а також продуктивність роботи кожного підприємства за рік і ціна кожного виробу:

Вид виробу	Продуктивність підприємств, вир./день					Витрати видів сировини, од. ваги/вир.		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Кількість робочих днів за рік					Ціни видів сировини, у.о. /од. ваги		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Визначити: річну продуктивність кожного підприємства по кожному виду виробів; річну потребу підприємства в кожнім виді сировини; річну суму фінансування кожного підприємства для закупівлі сировини, що необхідна для випуску продукції зазначених видів і кількостей.

Складемо матриці, що характеризують весь економічний процес виробництва. Уведемо в розгляд матрицю продуктивності підприємств за всіма видами продукції:

Продуктивність

1 2 3 4 5 Вид виробу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Кожний стовпець матриці відповідає денній продуктивності окремого підприємства за кожним видом продукції. Отже, річна продуктивність j-го підприємства за кожним видом продукції знаходиться помноженням i-го стовпця матриці А на кількість робочих днів у році для цього підприємства, де

$j = 1, 2, 3, 4, 5.$

Таким чином, річна продуктивність кожного підприємства за кожним із виробів описується матрицею

$$A_{рік} = \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}.$$

Матриця витрат сировини на одиницю виробу (ці показники за умовою однакові для всіх підприємств) має вигляд:

Вид виробу

1 2 3 4 Вид сировини

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Денна витрата за типами сировини на підприємствах описується добутком $R = B \cdot A$:

$$R = B \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix}$$

Як бачимо, *і-й* рядок відповідає номеру типу сировини, а *j-й* стовпець – номеру підприємства згідно таблиці ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5$).

$$BA_{\text{рік}} = \begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9190 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

Уведемо матрицю вартості сировини $P = (40 \quad 50 \quad 60)$. Тоді вартість загального річного запасу сировини для кожного підприємства можна отримати помноженням матриці P на матрицю $BA_{рік}$:

$$D = P \cdot BA_{рік} = (2008000 \quad 3496500 \quad 1878500 \quad 1494000 \quad 1552600).$$

Отже, суми фінансування підприємств для закупівлі сировини визначаються відповідними компонентами матриці D.

Питання для самоконтролю

1. *Поясніть, що таке матриця?*
2. *Як позначають матриці?*
3. *Що таке елемент матриці? На що вказують індекси елементів матриці?*
4. *Яку матрицю називають нульовою, одиничною, матрицею-рядком, матрицею-стовпцем?*
5. *Що Ви розумієте під транспонуванням матриці?*

6. Які Ви знаєте основні операції над матрицями? Які вимоги висувають до матриць при цьому?

7. Назвіть основні властивості додавання матриць.

8. Назвіть основні властивості множення матриць на число.

9. Назвіть основні властивості множення матриць.

10. Які існують елементарні перетворення матриць? Які матриці получають у результаті елементарних перетворень?

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти матрицю $C = A^{\mathrm{T}} - 3B$, *якщо* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю C= –5A + 2B:

2. Якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. *3. Якщо* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти добутки матриць:

4. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. *5.* $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. *6.* $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти ті добутки матриць AB і BA, які існують:

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

12. Обчислити матрицю $D = (AB)^T - C^2$, *якщо*

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ *і* $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

13. Обчислити матрицю $D = ABC - 3E$, *де* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, *E – одинична матриця третього порядку.*

14. Обчислити A^3, *якщо* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. У деякій галузі m заводів випускають n видів продукції. Матриця задає обсяги продукції на кожному заводі у першому кварталі, матриця B – у другому *кварталі, де* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $(a_{ij};\ b_{ij})$ *– обсяги продукції j-го типу, що випускається i-м заводом. Знайти обсяги продукції, приріст обсягів продукції в другому кварталі порівняно з першим, вартість продукції, що випущена за півроку в у. о., якщо α – курс у. о. до гривні.*

16. *Підприємство виготовлює n типів продукції, обсяги випуску задано матрицею A. Ціна реалізації одиниці i-го типу продукції в j-му регіоні задана матрицею B, де k – кількість регіонів, у яких реалізується продукція. Знати матрицю доходу C у кожному регіоні, якщо* $\mathrm{A} = (100 \quad 200 \quad 100)$,

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

17. *Підприємство виготовлює n типів продукції, використовує m видів ресурсів. Норми витрат ресурсу i-го виду на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Нехай за певний проміжок часу підприємство виготовило кількість продукції кожного типу, що описано матрицею X. Визначити матрицю повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний проміжок часу, якщо* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$.

18. *Два заводи випускають вироби M, N, P вищої, першої та другої категорії якості. Кількість випущених кожним заводом виробів за кожною категорією задана таблицею:*

Категорія якості	*Готові вироби*					
	Перший завод			*Другий завод*		
	M	*N*	*P*	*M*	*N*	*P*
Вища	*150*	*240*	*320*	*280*	*300*	*450*
Перша	*100*	*130*	*175*	*120*	*150*	*170*
Друга	*25*	*15*	*20*	*30*	*20*	*18*

Який загальний випуск виробів за означеними категоріями якості?

19. *При виготовленні деталей чотирьох видів витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задаються таблицею (в у.о.):*

Ресурси	*Витрати на одну деталь кожного виду*			
	1	*2*	*3*	*4*
Матеріали	*1*	*3*	*0,5*	*2*
Робоча сила	*1,5*	*2*	*3*	*1*
Електроенергія	*2*	*1*	*1*	*0,5*

Обчислити загальну потребу в матеріалах x_1, *робочій силі* x_2, *електроенергії* x_3 *для виготовлення заданої кількості деталей кожного виду:* $y_1=10$, $y_2=2$, $y_3=8$, $y_4=4$.

20. Привести до східчастого вигляду наступні матриці:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповіді

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -13 & -17 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. *2.* $\begin{pmatrix} 1 & -18 \\ -21 & 1 \end{pmatrix}$. *3.* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & -5 \\ 0 & -10 & -3 \end{pmatrix}$. *4.* $\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. *6.* $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. *7.* $\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$. *8.* $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 13 \end{pmatrix}$.

9. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. *10.* $BA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. *11.* $AB = \begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$. *13.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}$. *14.* $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *α(A+B).*

16. $(600 \quad 1300 \quad 700 \quad 1300)$. *17.* $\begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}$. *18.* $\begin{pmatrix} 490 & 540 & 770 \\ 220 & 280 & 345 \\ 55 & 35 & 38 \end{pmatrix}$. *19.* $\begin{pmatrix} 28 \\ 47 \\ 32 \end{pmatrix}$.

20.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 0 & 10 & -10 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ТЕМА 2. ВИЗНАЧНИКИ

2.1. Означення визначника

Будь-якій квадратній матриці A порядку n можна поставити у відповідність число, яке називають її визначником та позначають $|A|$, Δ або *det A* (від латин. *determinare* – визначати).

Означення Визначником першого порядку, що відповідає матриці $A = (a_{11})$, називають число a_{11}.

О з н а ч е н н я *Визначником другого порядку*, що відповідає матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, називають число, яке обчислюється за формулою:

$$det\,A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}.$$

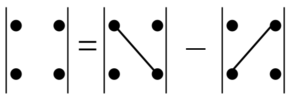
Можна записати, що $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A| = \Delta = det\,A$.

Елементи матриці A називають *елементами визначника* $|A|$, причому елементи a_{11}, a_{22} утворюють *головну діагональ*, а елементи a_{21}, a_{12} – *побічну*.

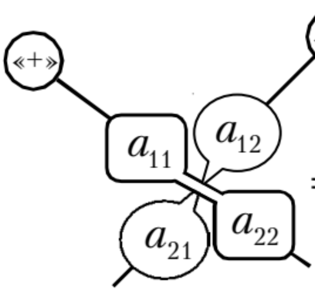
З а у в а ж е н н я Не варто ототожнювати поняття матриці й визначника: матриця A – це деяка сукупність елементів, а її визначник $det\,A$ – число, що визначається за певним правилом.

Таким чином, для обчислення визначника другого порядку потрібно з добутку елементів, що знаходяться на головній діагоналі, відняти добуток елементів, що стоять на побічній діагоналі.

Обчислення визначника 2-го порядку ілюструється наступною схемою:



. У деяких методичних джерелах використовують схожу схему:



$$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

П р и к л а д $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - (-3)\cdot 3 = 4 + 9 = 13.$

О з н а ч е н н я *Визначником третього порядку*, що відповідає матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

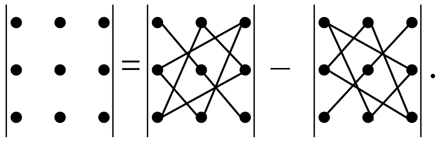
називають число, що визначається за формулою:

$$det\,A = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11}.$$

При цьому елементи матриці A називають *елементами визначника*.

Головна й побічна діагоналі визначника третього порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ визначаються як головна й побічна діагоналі відповідної йому матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

При обчисленні визначника 3-го порядку зручно користуватися *правилом трикутників* (або *правилом Саррюса,* названого на честь французького математика П'єра Саррюса (1798 – 1861 рр.), яке символічно можна представити так:



Можна також скористатися наступною схемою:

<u>Приклад</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot0\cdot2 + 3\cdot3\cdot(-2) + 2\cdot1\cdot(-2) - (-2)\cdot0\cdot(-2) - 2\cdot3\cdot2 - 1\cdot3\cdot1 =$$

$= 0 - 18 - 4 - 0 - 12 - 3 = -37$.

У цьому посібнику наведено формули для обчислення визначників першого, другого та третього порядків.

Визначники четвертого й більш високих порядків подібним чином обчислювати незручно через громіздкість відповідних формул. Тому далі застосуємо спеціальне правило, що дозволить легко робити обчислення таких визначників.

2.2. Основні властивості визначників

1. (*Рівноправність рядків і стовпців.*) Визначник не змінить своє значення, якщо всі його рядки замінити стовпцями, і навпаки, тобто при транспонуванні відповідної матриці, наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний.

3. Визначник, який має два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.

4. Спільний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника.

<u>Зауваження</u> Із властивостей 3 і 4 визначники випливає, якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють нулю або пропорційні відповідним елементам іншого рядка (стовпця), такий визначник дорівнює нулю.

5. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника є сумами двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох відповідних

визначників.

6. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на будь-яке число.

2.3. Визначник *n-го* порядку

Нехай задана матриця *A n-го* порядку.

Означення *Мінором* деякого елементу a_{ij} визначника *n-го* порядку називають визначник $n-1$*-го* порядку, одержаний з вихідного шляхом викреслювання рядка й стовпця, на перетині яких знаходиться вибраний елемент.

Позначається M_{ij}.

Приклад Якщо $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -9 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$, то $M_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -9 & 1 \end{vmatrix}$.

Очевидно, що кожний визначник третього порядку має 9 мінорів своїх елементів.

Загалом визначник *n-го* порядку має n^2 мінорів $n-1$*-го* порядку.

Означення *Алгебраїчним доповненням* елементу a_{ij} визначника *n-го* порядку називають його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$.

Позначається A_{ij}.

Отже,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Приклад Для наведеного визначника:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 9 - 2 \cdot 1 = -20,$

$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 5 \cdot (-9)) = -47.$

Враховуючи сказане, поповнимо перерахований у п. 2.2 список властивостей визначників новими.

7. **Теорема (теорема Лапласа)** Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

Ця теорема використовується для обчислення визначника будь-якого порядку, починаючи з третього.

Так, для визначника третього порядку для першого рядка цю теорему можна записати у вигляді:

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{21} + a_{12}\cdot A_{22} + a_{13}\cdot A_{23}.$$

Цю формулу називають *розкладанням* визначника $det\,A$ по елементах першого рядка.

Аналогічно можна отримати розкладання по елементах інших рядків або стовпців.

Значення теореми Лапласа полягає у тому, що вона дозволяє від визначників *n-го* порядку перейти до обчислення більш простих визначників *n – 1-го* порядку.

Цікаво знати П’єр-Сімон Лаплас (1749 – 1827 рр.) – французький математик і астроном, відомий своїми працями в галузі диференційних рівнянь, один із творців теорії ймовірностей.

Приклад Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, розклавши його по елементах другого рядка.

Отримаємо, що $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} +$ $+ 3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -16 + 0 - 21 = -37.$

Зауваження Для скорочення обчислень визначника доцільно його розкладати за елементами такого рядка (стовпця), який містить найбільшу кількість нулів.

8. **Теорема (теорема анулювання)** Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Так, для визначника третього порядку для першого рядка цю теорему можна записати у вигляді:

$$a_{11}\cdot A_{21} + a_{12}\cdot A_{22} + a_{13}\cdot A_{23} = 0.$$

Питання для самоконтролю

1. *Що називають визначником першого, другого та третього порядку?*
2. *Як зазвичай позначають визначники?*
3. *Як візуально легко запам’ятати правило обчислення визначників другого порядку?*
4. *Сформулюйте правил Саррюса (трикутників).*
5. *Які Ви знаєте основні властивості визначників?*
6. *Що називають мінором? Як його позначають?*
7. *Що таке алгебраїчне доповнення? За допомогою якої формули можна*

його обчислити?

8. *Що дозволяє обчислити теорема Лапласа?*

Завдання для самостійного розв'язання

Обчислити визначники другого порядку:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$. *2.* $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$. *3.* $\begin{vmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ sin\beta & cos\beta \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники третього порядку:

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. *5.* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. *6.* $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. *7.* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$.

Довести тотожності:

8. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$. *9.* $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Розв'язати рівняння:

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\mathrm{x} & 1 \\ 1 & 1 & 2-\mathrm{x} \end{vmatrix} = 0$. *11.* $\begin{vmatrix} \mathrm{x}^2 & 4 & 9 \\ \mathrm{x} & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Обчислити визначник:

12. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. *13.* $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ b & 3 & 1 & 4 \\ c & 0 & 1 & 2 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. *14.* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Відповіді

1. 11.
2. 13.
3. $sin\,(\alpha-\beta)$.
4. 0.
5. 1.
6. 8.
7. 40.
10. (0; 0).
11. (2; 3).
12. $8a + 15b + 12c - 19d$.
13.$-8a - 2b + 4c + 14d$.
14. 8.
15. 2.

ТЕМА 3. НЕВИРОДЖЕНІ МАТРИЦІ

3.1. Союзна матриця

Нехай A – квадратна матриця *n-го* порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення Матрицею, *союзною (приєднаною)* до матриці A, називають матрицю

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $A_{i\gamma}$ – алгебраїчне доповнення елементу $a_{i\gamma}$ даної матриці A (його визначають так само, як і алгебраїчне доповнення елементу визначника), $\iota = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, m, $n \in N$.

Приклад Союзною до матриці $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ є матриця

$F^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, де $A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$,

$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = -6$, $A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 3$,

$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = -4$, $A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 2$,

$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) = -1$, $A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2$,

$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = -1$, $A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -4$.

3.2. Обернена матриця

Це поняття вводиться тільки для квадратної матриці.

Означення Квадратну матрицю A називають *невиродженою* або *неособливою*, якщо визначник $det\, A$ не дорівнює нулю:

$$\det A \neq 0.$$

Інакше матрицю A називають *виродженою* або *особливою*.

Означення Матрицю A^{-1} називають *оберненою до* матриці A, якщо виконується умова

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця того ж порядку, що й матриця A.

Матриця A^{-1} має той же порядок, що й матриця A.

Крім того, із означення випливає, якщо матриця A^{-1} є оберненою до A, то й A буде оберненою до A^{-1}.

Теорема Будь яка невироджена матриця має обернену, яка знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A},$$

тобто

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Знайти визначник матриці A. Якщо він дорівнює нулю, то матриця A є виродженою. Інакше матриця має обернену матрицю.

2. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij} кожного елементу матриці A.

3. Скласти матрицю A^*, союзну до матриці A.

4. Обернена матриця A^{-1} утворюється множенням матриці A^* на $\frac{1}{detA}$.

Приклад Для матриці $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти обернену.

Як з’ясовано вище, для цієї матриці союзною є матриця $\mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Ураховуючи, що $det\, A = -9$, маємо:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Для перевірки правильності розв’язання можна показати, що

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Властивості оберненої матриці

1. *det* $(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$

Приклад Модель міжгалузевого планування потреб та пропозицій

У таблиці подано потреби та пропозиції різних галузей промисловості.

Галузеві пропозиції	Галузеві потреби			Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	72	180
Витрати праці	20	24	72		

1). Визначити матрицю потреб-пропозицій *A*.

2). Припустимо, що через три роки потреби інших галузей зростуть до 24, 33 і 75 од. для галузей 1, 2, 3 відповідно. Скільки продуктів повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити ці потреби?

1). Елементи матриці А дорівнюють відношенню потреб *i-тої* галузі до загальної кількості пропозицій цієї галузі. Тому для знаходження елементів і-го стовпця ($i = 1, 2, 3$) матриці А треба поділити потреби *i-тої* галузі на загальну кількість пропозицій цієї галузі. Відтак, отримаємо матрицю потреб-пропозицій:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{36}{120} & \frac{36}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

2). Нехай E – одинична матриця третього порядку. Позначимо:

$D = \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ 75 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець нових потреб, X – матриця нових пропозицій, що відповідають новим потребам.

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Тоді $X = B^{-1} \cdot D$.

Для обчислення майбутніх пропозицій необхідно знайти B^{-1}. Для цього знайдемо визначник $\det B = 0{,}336$. Далі знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці B й запишемо обернену матрицю:

$B^{-1}=\frac{1}{0,336}\begin{pmatrix}0,63 & 0,35 & 0,21\\ 0,33 & 0,61 & 0,27\\ 0,36 & 0,36 & 0,6\end{pmatrix}$. У результаті отримаємо, що

$$X = B^{-1}\cdot D=\frac{1}{0,336}\begin{pmatrix}0,63 & 0,35 & 0,21\\ 0,33 & 0,61 & 0,27\\ 0,36 & 0,36 & 0,6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24\\ 33\\ 75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}126,25\\ 143,75\\ 195\end{pmatrix}.$$

Отже, через три роки першій галузі необхідно виробити 126,25, другій галузі – 143,75, а третій – 195 одиниць продукції.

<u>Приклад</u> Кодування та розкодування SMS

Розглянемо спосіб кодування інформації. Кожній літері поставимо у відповідність число за принципом: *A – 1, B – 2, ..., Z – 26.* Так, числовий еквівалент слова *MATH* є *13 1 20 8*.

Закодуємо повідомлення *MATH* у вигляді матриці $\begin{pmatrix}13 & 20\\ 1 & 8\end{pmatrix}$. Візьмемо будь-яку невироджену матрицю другого порядку, наприклад, $\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ і помножимо на матрицю $\begin{pmatrix}13 & 20\\ 1 & 8\end{pmatrix}$. Отримаємо закодоване повідомлення: $\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13 & 20\\ 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-29 & -64\\ 43 & 92\end{pmatrix}$. Отже, воно має вигляд *– 29 43 – 64 92*.

Розкодуємо повідомлення. Для цього знайдемо обернену матрицю $\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ до матриці $\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Помножимо обернену матрицю $\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ на закодовану матрицю $\begin{pmatrix}-29 & -64\\ 43 & 92\end{pmatrix}$. У результаті отримаємо матрицю-повідомлення.

$\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-29 & -64\\ 43 & 92\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 1 & 8\end{pmatrix}$. Отже, повідомлення має вигляд: *13 20 1 8*. Ми отримали повідомлення – *MATH*.

<u>Приклад</u> Знаходження оберненої матриці за допомогою одиничної матриці

Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Представимо матрицю, що має розмір 3×6 наступним чином: $(A|E)$, тобто $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$. За допомогою елементарних перетворень над рядками матриці приведемо її до вигляду: $(E|A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-3&1&1\\0&0&1&-1&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-1&\frac{-3}{2}\\0&1&0&-3&1&1\\0&0&1&-1&0&\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

Матрицю вигляду $(\mathrm{E}|\mathrm{A}^{-1})$ ми отримали за допомогою декількох кроків. Крок 1. Від другого рядка віднімаємо перший. Від третього рядка віднімаємо перший, що помножений на 2. Крок 2. До другого рядка додаємо третій. Крок 3. Третій рядок ділемо на 2. Крок 4. Від третього рядка віднімаємо перший, від другого рядка віднімаємо перший.

Отже, отримали обернену матрицю $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1&\frac{-3}{2}\\-3&1&1\\-1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Тепер зробимо перевірку: $A^{-1}A=\begin{pmatrix}5&-1&\frac{-3}{2}\\-3&1&1\\-1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-1&\frac{-3}{2}\\-3&1&1\\-1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

3.3. Ранг матриці

Для вирішення низки математичних прикладних задач важливе значення має ранг матриці.

Розглянемо довільну прямокутну матрицю A.

Якщо не всі елементи a_{ij} матриці A дорівнюють нулю, то завжди можна вказати таке число r, що в матриці A знайдеться мінор r-*го* порядку, відмінний від нуля, а будь-який мінор, що має порядок $r+1$ і вище, дорівнює нулю.

Означення Найбільший із порядків мінорів даної матриці, відмінних від нуля, називають *рангом матриці*.

Позначається: r, $r(A)$ або $rang\ A$.

Зауваження Якщо всі елементи a_{ij} дорівнюють нулю, то ранг матриці A дорівнює нулю.

Очевидно, що $0\leq r\leq min(m;n)$, де $min(m;n)$ – менше із чисел m і n.

Якщо $r=\min(m;n)$, то матрицю A називають матрицею повного рангу.

Теорема Якщо матриця A має відмінний від нуля мінор порядку r, а всі мінори порядку $r+1$ матриці A дорівнюють нулю, то ранг матриці A дорівнює r.

<u>**Т е о р е м а**</u> Ранг матриці не змінюється при її елементарних перетвореннях.

<u>**О з н а ч е н н я**</u> Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називають *базисним*.

<u>**О з н а ч е н н я**</u> Рядки й стовпці, із яких побудовано базисний мінор, називають *базисними.*

У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Існує декілька методів обчислення рангу матриці.

Метод обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень

Матрицю A приводять до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень. Кількість отриманих ненульових рядків східчастої матриці є рангом матриці A.

<u>**П р и к л а д**</u>

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Приведемо матрицю до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень. <u>1 крок.</u> Другий рядок помножимо на 2 і віднімемо перший, так само третій рядок помножимо на 2 і віднімемо перший.
<u>2 крок.</u> Другий рядок помножимо на 3 й додаємо до третього.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отримано східчасту матрицю, яка має два ненульові рядки, відтак її ранг дорівнює 2. Отже, ранг матриці дорівнює 2.

Метод обчислення рангу матриці за допомогою обвідних мінорів (обрамлення)

1. Знаходимо мінор першого порядку або мінор другого порядку, відмінний від нуля.

2. Обчислюємо його обвідні мінори наступного порядку, поки не знайдемо серед них відмінний від нуля.

3. Якщо вже знайдено відмінний від нуля мінор порядку r, то обчислюємо мінор r + 1-го порядку, який обводить даний мінор. Якщо вони дорівнюють нулю або такого мінору взагалі не існує (у разі, коли матриця містить r рядків або стовпців), то ранг матриці дорівнює r. Інакше продовжуємо цей процес.

<u>Приклад</u> Обчислити ранг матриці: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ -1 & -2 & -2 & 4\\ 7 & -6 & -1 & 7\end{pmatrix}$. Виберемо мінор другого порядку, розташований у лівому верхньому куті:
$M_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4$. Оскільки $M_2\neq 0$, то ранг матриці не менший двох.

Обчислимо мінори третього порядку, які обводять відмінний від нуля мінор другого порядку. Для цього додаємо до M_2 третій рядок і третій стовпець:
$M_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -2\end{vmatrix}=2+4+2-8=0.$ Замінимо третій стовпець четвертим:
$M_3'=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 4\end{vmatrix}=-2-12-2+16=0.$ У мінорі M_3 замінимо третій рядок четвертим: $M_3''=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 7 & -6 & -1\end{vmatrix}=-14+12+6-4=0.$ У мінорі M_3' замінимо третій рядок четвертим: $M_3'''=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 7 & -6 & 7\end{vmatrix}=14-36-6+28=0.$
Усі мінори третього порядку, що обводять мінор другого порядку, дорівнюють нулю. А це означає, що $rang\,A=2$.

Питання для самоконтролю

1. *Поясніть, яку матрицю називають союзною (приєднаною)?*
2. *Яку матрицю називають невиродженою (неособливою)?*
3. *Яку матрицю називають виродженою (особливою)?*
4. *Запишіть формулу оберненої матриці.*
5. *Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці.*
6. *Які Ви знаєте властивості оберненої матриці?*
7. *Що називають рангом матриці?*
8. *Поясніть сутність методу обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень.*
9. *Сформулюйте сутність методу обчислення рангу матриці за допомогою обвідних мінорів (обрамлення).*

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти обернену матрицю за допомогою союзної (приєднаної) матриці та за допомогою одиничної матриці:

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$. *2.* $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. *3.* $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. *4.* $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень:

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. *7.* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. *8.* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайти ранг матриці методом обвідних мінорів:

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. *10.* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Знайти ранг матриці при різних значеннях параметра α:

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. *13.* $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. *14.* $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \alpha \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$.

Відповіді

1. $\begin{pmatrix} \frac{-16}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{14}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}$. *2.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *3.* $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. *4.* $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. *6. r = 2. 7. r = 3. 8. r = 3. 9. r = 3. 10. r = 2. 11. r = 2.*

12. r = 3, якщо $\alpha = \frac{2}{3}$*; r = 4, якщо* $\alpha \neq \frac{2}{3}$.
13. r = 2, якщо $\alpha = 3$*; r = 3, якщо* $\alpha \neq 3$.
14. r = 3, якщо $\alpha = 3$*; r = 4, якщо* $\alpha \neq 3$.
15. r = 1, якщо $\alpha = 1$*; r = 3, якщо* $\alpha \neq 1$.

ТЕМА 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь *(СЛАР)* є найважливішим розділом лінійної алгебри. Вони є одним із основних інструментів математичного моделювання економічних процесів.

4.1. Основні поняття

Означення *Системою лінійних алгебраїчних рівнянь*, що містить *m* рівнянь і n невідомих, називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases},$$

де числа a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ m, n \in N)$ називають *коефіцієнтами системи*, числа b_i – *вільними членами*. Підлягають знаходженню числа x_j.

<u>Приклад</u>

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Зазначимо, що в різних літературних джерелах системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які розглядають у курсі лінійної алгебри, називають коротше – системи лінійних рівнянь (СЛР). Кожне рівняння такої системи є лінійним – тобто алгебраїчним рівнянням першого степеня.

Систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$ зручно записувати в компактній *матричній формі*:

$$A \cdot X = B,$$

де A – матриця коефіцієнтів системи, яку називають *основною матрицею*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець із невідомих x_j, $У = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець із вільних членів b_i.

У розглянутому прикладі: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 10 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Добуток матриць $A \cdot X$ визначений, оскільки в матриці A стовпців стільки ж, скільки рядків у матриці X.

<u>Означення</u> *Розширеною матрицею системи називають матрицю* $\overline{A}$

системи, що доповнена стовпцем вільних членів:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

У розглянутому прикладі:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 10 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Означення Систему лінійних рівнянь називають *однорідною*, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = 0, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

Означення *Розв'язком системи* називають n значень невідомих

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_n = c_n,$$

при підстановці яких усі рівняння системи стають вірними рівностями.

Будь-який розв'язок системи можна записати у вигляді матриці-стовпця:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Означення Систему рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча би один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система може мати один розв'язок або багато розв'язків.

Означення Сумісну систему називають *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку.

У останньому випадку кожний її розв'язок називають *частковим розв'язком системи*.

Можна довести, що невизначена система має безліч розв'язків.

Означення Сукупність усіх частинних розв'язків системи називають *загальним розв'язком*.

Означення *Розв'язати систему* – це з'ясувати, сумісна вона або несумісна. Якщо система сумісна, знайти її загальний розв'язок.

Однорідна система завжди сумісна, оскільки

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

є розв'язком системи. Цей розв'язок називають *нульовим*, або *тривіальним*.

Приклад

Система рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ сумісна та визначена, так як має єдиний розв'язок (10; 0). Система рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ несумісна. Система рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ сумісна і невизначена, має нескінчену множину розв'язків $(x_1 = c, x_2 = 10 - 2c)$, де с $\in R$.

Означення Дві системи називають *еквівалентними* (*рівносильними*), якщо їхні розв'язки співпадають.

Еквівалентні системи можна отримати при елементарних перетвореннях системи за умови, що перетворення виконуються лише над рядками матриці.

4.2. Розв'язання систем n лінійних рівнянь з n невідомими. Матричний метод

Нехай маємо довільну систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 & +\ldots+ & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}.$$

Існує низка методів, що дозволяють розв'язати таку систему. У цьому посібнику розглянемо три із них, що є найбільш поширеними: матричний метод, метод Крамара та метод Гауса.

Почнемо з матричного метода. Представимо систему лінійних рівнянь у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

Таке рівняння називають *матричним*.

Знайдемо розв'язок даної системи рівнянь, коли $\det A \neq 0$.

Помноживши обидві частини рівняння $A \cdot X = B$ зліва на матрицю A^{-1}, отримаємо: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Ураховуючи, що $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$, то $X = A^{-1} \cdot B$.

Означення Знаходження розв'язку системи за формулою $X = A^{-1} \cdot B$ називають *матричним методом розв'язання системи лінійних рівнянь*.

Приклад Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23. \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$ Для розв'язання системи за формулою $X = A^{-1} \cdot B$ введемо позначення:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Тоді, за формулою $X=A^{-1}\cdot B$ маємо:

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}.$$

Використовуючи означення рівності матриць, маємо:

$$x_1=4,\qquad x_2=3,\qquad x_3=5.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що знайдені значення невідомих задовольняють даній системі.

Приклад

У цеху виготовляють дві моделі одягу. На виготовлення першої моделі витрачають 2 м тканини, на виготовлення другої – 3 м. при цьому витрати робочого часу на виробництво цих моделей становить 4 год. та 5 год. Відомо, що тижневий запас тканини 100 м, а робочій час обмежено 190 год. скласти такий план тижневого виготовлення цих моделей одягу, при якому повністю використовуються ресурси (тканина та робочій час).

Позначимо через x_1, x_2 кількість одиниць тижневого випуску першої та другої моделей відповідно. За умовою задачі складаємо систему лінійних рівнянь:

$\begin{cases}2x_1+3x_2=100\\4x_1+5x_2=190\end{cases}$. Представимо систему в матричному вигляді $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}100\\190\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.

Для матриці A знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Знаходимо визначник матриці A: $detA=\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=10-12=-2$. Далі $A_{11}=5$, $A_{12}=-4$, $A_{21}=-3$, $A_{22}=2$.

Тоді $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\2&-1\end{pmatrix}$.

$X=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100\\190\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\10\end{pmatrix}$. Отже, $x_1=25$, $x_2=10$. Для використання всіх ресурсів щотижня необхідно виготовлювати 25 од. першої моделі та 10 од. другої моделі.

4.3. Розв'язання систем n лінійних рівнянь з n невідомими. Метод Крамера

<u>**Цікаво знати**</u> Габрієль Крамер (1704 – 1752 рр.) – швейцарський математик, один з творців лінійної алгебри.

Розв’язання системи n лінійних рівнянь з n невідомими зручно записувати та обчислювати за допомогою визначників.

Нехай маємо довільну систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 & +\ldots+ & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Основна матриця A такої системи є квадратною.

<u>**Означення**</u> Визначник матриці А називають *визначником системи* (*основним визначником*):

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>**Означення**</u> Якщо визначник системи відмінний від нуля, то систему називають *невиродженою.*

Тоді формулу Крамера, за допомогою якої можна розв’язати систему лінійних рівнянь, записують у вигляді:

$$x_i = \frac{det\,X_i}{det\,A},\ i = \overline{1,n},\ n \in N,$$

де $detA$ – визначник системи, $detX_i$ – визначник, отриманий із визначника системи заміною *i-го* стовпця стовпцем вільних членів (такий визначник називають *додатковим*).

<u>**Зауваження**</u>

1. Якщо визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, який визначається за формулами Крамера.

2. Якщо визначник системи дорівнює нулю та всі додаткові визначники дорівнюють нулю, то система має нескінченну множину розв’язків.

3. Якщо визначник системи дорівнює нулю, а хоч б один з додаткових визначників не дорівнює нулю, то система не має розв’язків (несумісна).

<u>**Приклад**</u> Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9. \\ 7x_1 + 8x_2 = -6 \end{cases}$ Обчислимо визначник системи $det\,A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$ отже, система визначена, тобто має єдиний розв’язок.

Знайдемо його: $detX_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54$, $detX_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 27$,

$detX_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 54$, тому $x_1 = \frac{det\,X_1}{det\,A} = \frac{-54}{27} = -2$, $x_2 = \frac{det\,X_2}{det\,A} = \frac{27}{27} = 1$, $x_3 = \frac{det\,X_3}{det\,A} = \frac{54}{27} = 2$.

Зробимо перевірку:

$\begin{cases} -2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 6, \\ 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 9, \\ 7 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 = -6 \end{cases}$ отже $\begin{cases} 6 = 6, \\ 9 = 9, \\ -6 = -6 \end{cases}$, тобто розв'язком системи є трійка чисел $(-2 \quad 1 \quad 2)$.

Легко помітити, що чисельне розв'язання системи з n лінійних рівнянь з n невідомими за формулами Крамера зводиться до обчислення $n + 1$ визначника порядку n.

Якщо число n велике, то обчислення визначників є доволі трудомісткою операцією. У такому разі варто скористатися методом Гауса (мова про нього піде нижче).

При розв'язанні або дослідженні системи з буквеними коефіцієнтами зручно користуватися формулами Крамера.

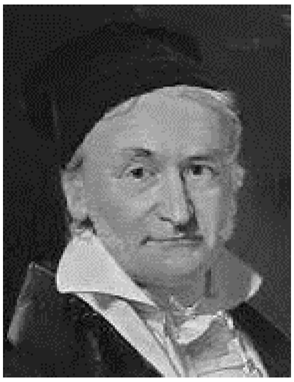
Зауваження Методом Крамера та матричним методом можна розв'язувати системи лінійних рівнянь лише тоді, коли:

1) число рівнянь дорівнює числу невідомих;

2) визначник системи відмінний від нуля.

4.4. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса

Цікаво знати



Йогаан Карл Фрідріх Гаусс (1777 – 1855 рр.) – німецький математик, астроном, геодезист та фізик. Вважається одним з найвидатніших математиків всіх часів, «королем математиків». Лауреат медалі Коплі (найстаріша в світі наукова нагорода), іноземний член Шведської і Петербурзької академій наук, Лондонського королівського товариства.

Одним з найбільш універсальних і ефективних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гауса, який полягає в тому, що за допомогою послідовного виключення невідомих дана система перетворюється на еквівалентну їй систему східчастого вигляду.

Нехай маємо систему m рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}.$$

Процес розв'язання задачі складається з двох етапів. На першому етапі (прямий хід) система приводиться до східчастого, зокрема, трикутного вигляду. На другому етапі (зворотний хід) йде послідовне знаходження невідомих із цієї системи.

Наведена нижче система має східчастий вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1k}x_k+\ldots+a_{1n}x_n & = c_1, \\ & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2k}x_k+\ldots+a_{2n}x_n & = c_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_{kk}x_k+\ldots+a_{kn}x_n & = c_k \end{cases},$$

де $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1,k}$.

Якщо $k = n$, то така систему називають *трикутною*.

Означення Коефіцієнти a_{ii} називають *головними елементами* системи.

Розглянемо сутність розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса на прикладі.

Приклад Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$. Представимо систему у вигляді розширеної матриці $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 & -6 \end{array}\right)$ й приведемо її до східчастого вигляду: $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$. Залишимо перший рядок без змін; другий рядок замінимо сумою його й першого рядка, помноженого (–4), третій рядок замінимо сумою його й першого рядка, помноженого (–7): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & 15 \\ 0 & -6 & -21 & -48 \end{pmatrix}$. Розділимо друге рівняння на (–3), третє – на 3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -7 & -16 \end{pmatrix}$. Залишимо перші два рядки без змін, а третій замінимо сумою його й другого, помноженого на 2: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$. Помножимо третє рівняння на $-\frac{1}{3}$, отримаємо наступну матрицю: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

Тепер перейдемо до системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$

Розв'яжемо отриману систему методом підстановки, рухаючись послідовно від останнього рівняння до першого. Цей етап розв'язання називають *зворотним ходом методу Гауса*.

Із третього рівняння дістанемо, що $x_3 = 2$. Підставивши значення x_3 у друге рівняння, знайдемо: $x_2 = 1$. Підставивши значення x_3 і x_2 у перше рівняння, знайдемо: $x_1 = -2$.

Зробимо перевірку.

Приклад Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$ Складемо розширену матрицю $\overline{A}$ та приведемо її до східчастого вигляду:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Із коефіцієнтів отриманої матриці складемо систему, рівносильну вихідній:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \\ 7x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Із другого рівняння виразимо x_2 через x_3:

$x_2 = \frac{3x_3 - 5}{7}$.

Підставивши в перше рівняння системи значення x_2, отримаємо:

$x_1 = 4 - x_3 + 2x_2 = 4 - x_3 + \frac{6x_3 - 10}{7} = \frac{18 - x_3}{7}$.

Отже, маємо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{18 - x_3}{7}; \\ x_2 = \dfrac{3x_3 - 5}{7}. \end{cases}$$

Вважаючи, що $x_3 = t, t \in R$, представимо загальний розв'язок у вигляді:

$$\left(\frac{18-t}{7}; \frac{3t-5}{7}; t\right), \ t \in R.$$

Приклад Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ Запишемо розширену матрицю $\overline{A}$ та приведемо її до східчастого вигляду:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -10 & -11 \end{pmatrix}.$$ У першій матриці ми перший рядок помножили на число – 2 і додали до другого; також перший рядок помножили на – 3 і додали до третього.

Складемо систему, рівносильну вихідній:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -5, \\ -5x_2 - 10x_3 = -11. \end{cases}$$

Система рівнянь не має розв'язків, оскільки ми отримали рівняння

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -5,$$

яке не має розв'язків.

При розв'язанні системи лінійних рівнянь методом Гауса невідоме x_i виключається тільки в рівняннях з номерами $i + 1$, $i + 2$, …, n.

Модифікація методу Гауса, яка полягає в тому, що невідоме x_i виключається також і в рівняннях з номерами 1, 2, …, i – 1, називається *методом Жордана – Гауса*.

4.5. Розв'язання систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі

Цікаво знати

Леопольд Кронекер (1823 – 1891 рр.) – німецький математик.

Альфредо Капеллі (1855 – 1910) – італійський математик, член Національної академії деї Лінчеї (найстарішої академії наук Італії).

Нехай маємо довільну систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Теорема Кронекера-Капеллі Система лінійних рівнянь сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці.

Нагадаємо, що розширену матрицю одержуємо шляхом дописування до основної матриці системи стовпця вільних членів.

Означення Ранг матриці сумісної системи лінійних рівнянь називається *рангом цієї системи*:

$$r = r(A) = r(\overline{A}).$$

Правила практичного знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь випливають з таких теорем.

<u>Теорема</u> Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

<u>Теорема</u> Якщо ранг сумісної системи менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

<u>Зауваження</u> Якщо сумісна система має ранг r, а число невідомих у ній n, то r невідомих лінійно виражаються через $n - r$ вільних невідомих.

Сформулюємо **правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь**

1. Знайти ранги основної і розширеної матриць системи. Якщо

$$r(A) \neq r(\overline{A}),$$

то система несумісна.

2. Якщо

$$r(A)= r(\overline{A}) = r,$$

то система сумісна. Необхідно знайти бідь-який базисний мінор порядку r. Узяти r рівнянь, із коефіцієнтів яких складений базисний мінор (решту рівнянь відкинути). Невідомі, коефіцієнти яких входять у базисний мінор, називають *головними та* залишають ліворуч, а решту $n - r$ невідомих називають *вільними та* переносять у праві частини рівнянь.

3. Знайти вирази головних невідомих через вільні. Дістанемо загальний розв'язок системи.

4. Надаючи вільним невідомим довільні значення, отримаємо відповідні значення головних невідомих. Отже, можна знайти частинні розв'язки вихідної системи рівнянь.

<u>Приклад</u> Дослідити систему рівнянь та розв'язати її, якщо вона сумісна:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$ Знайдемо ранг основної матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином

$$r(A) = 2.$$

Знайдемо ранг розширеної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$r(\bar{A}) = 2.$$

Отже

$$r(A) = r(\bar{A}) = 2.$$

Тоді за теоремою Кронекера-Капеллі дана система сумісна.

Оскільки ранг системи (він дорівнює 2) менший числа невідомих (тобто 3), то, згідно теореми* система має безліч розв'язків (тобто невизначена), при цьому дві головні невідомі виражаються через 3 – 2 = 1 вільну невідому.

Із другого рівняння отриманої східчастої системи виразимо x_2 через x_3:

$-5x_2 + 2x_3 = 2$, отже $x_2 = \frac{2x_3-2}{5}$.

Виразимо x_1 із першого рівняння:

$x_1 = 3 - x_3 + 2x_2$.

Підставимо отриманий вираз для x_2:

$x_1 = 3 - x_3 + 2 \cdot \frac{2x_3-2}{5} = \frac{15-5x_3+4x_3-4}{5} = \frac{11-x_3}{5}$.

Вважаючи, що

$$x_3 = t, t \in R,$$

запишемо загальний розв'язок системи у вигляді:

$$\left(\frac{11-t}{5}; \frac{2t-2}{5}; t\right), t \in R.$$

При конкретних значеннях $t \in R$ будемо мати частинні розв'язки.

4.6. Системи лінійних однорідних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = 0, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Можна показати, що однорідна система завжди сумісна ($r(A) = r(\bar{A})$), вона завжди має нульовий розв'язок, який називають *тривіальним*:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Тоді будь-який ненульовий розв'язок однорідної системи називається *нетривіальним*.

Теорема Для того, щоб система однорідних рівнянь мала ненульові розв'язки, необхідно й достатньо, щоб ранг r її основної матриці був менший числа n невідомих, тобто $r < n$.

Нехай маємо однорідну систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 & +\ldots+ & a_{nn}x_n & = b_n. \end{cases}$$

Теорема Для того, щоб однорідна система n лінійних рівнянь з n

невідомими мала ненульові розв’язки, необхідно й достатньо, щоб її визначник A дорівнював нулю, тобто $det\,A = 0$.

Приклад Розв’язати систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$, $detA=1$, $n = 3$. Ураховуючи, що $r < n$, то система має безліч розв’язків. Знайдемо їх. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3 \end{cases}$, тоді

$detX_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3$,

$detX_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3$, тоді $x_1 = 2x_3$, $x_2 = 3x_3$ – загальний розв’язок. Підставляючи замість x_3 певні числові значення, будемо отримувати частинні розв’язки. Так, якщо $x_3 = 1$, тоді $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ та ін.

4.7. Застосування систем лінійних рівнянь для вирішення економічних проблем

Задача про обсяг випуску продукції

Приклад Фабрика спеціалізується по випуску продукції трьох видів: *A, B* і *C*, при цьому використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми витрат кожного з них на одиницю продукції та обсяг витрат сировини на один день задані таблицею:

Тип сировини	Норми витрати на одиницю продукції, у.о.			Витрати сировини за день, у.о.
	A	*B*	*C*	*D*
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду виробу.

Нехай щодня фабрика випускає x_1 одиниць продукції A, x_2 одиниць продукції B, x_3 одиниць продукції C. Тоді відповідно до витрат сировини кожного виду маємо систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}.$$

Розв’язуючи систему будь-яким способом (наприклад, методом Гауса), знаходимо:

$x_1 = 200$, $x_2 = 300$, $x_3 = 200$.

Задачі такого роду типові при прогнозах й оцінках функціонування підприємств, в експертних оцінках проєктів освоєння корисних копалин, а також при плануванні мікроекономіки підприємств (*макроекономікою* називають галузь економічної науки, що вивчає поведінку народного господарства як єдиного цілого в контексті аналізу глобальних ринків та їх взаємозв'язків).

Задача знаходження коефіцієнтів повних та непрямих витрат, плану та програми виробництва

П р и к л а д Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких виробляє один вид продукції. Прямі вигради (*проміжний продукт*) одиниць *i-го* цеха, що використовуються для випуску одиниці виробу продукції *j-го* цеха, а також кількість одиниць продукції *i-го* цеха, призначених до реалізації (*кінцевий продукт*), задані в таблиці.

Продукція цехів	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	1	*2*	*3*	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Визначити:

1) коефіцієнти повних витрат;
2) план (валовий випуск) кожного цеха;
3) виробничу програму підприємства;
4) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Таблицею задана матриця так званих витратних коефіцієнтів:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо виробничу програму підприємства через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, де x_1, x_2, x_3 – плани валового випуску продукції цехів. Позначимо валовий випуск товарної продукції через $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$.

Виробничі взаємні зв'язки підприємства задовольняють умовам:

$$\begin{cases} x_1 - (0x_1 + 0{,}2x_2 + 0x_3) = 200 \\ x_2 - (0{,}2x_1 + 0x_2 + 0{,}1x_3) = 100, \\ x_3 - (0x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3) = 300 \end{cases} \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 = 200 \\ -0{,}2x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 100. \\ -0{,}1x_2 + 0{,}8x_3 = 300 \end{cases}$$

Представимо систему у матричному вигляді:
$X - AX = Y \Rightarrow EX - AX = Y \Rightarrow (E - A)X = Y$, де E – одинична матриця. Позначимо $E - A = B$. Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді буде мати вигляд: $BX = У$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці B^{-1} – це коефіцієнти повних витрат.

Відомо, що *коефіцієнт повних витрат* – це показник, який використовується в економіко-математичних завданнях та характеризує *прямі* й *непрямі* витрати по всій ланці виробничих зв'язків.

Прямі витрати – витрати, що можуть бути віднесені безпосередньо до певного об'єкта витрат економічно доцільним шляхом. *Непрямі витрати* – витрати, які не можуть бути віднесені до певного об'єкта витрат економічно доцільним шляхом.

Наприклад, *коефіцієнт повних витрат* палива на продукцію машинобудування охоплює не лише прямі витрати, а й витрати палива на метал, необхідний для продукції машинобудування, на електроенергію для виробництва металу, що споживається у машинобудуванні, тощо. Цей коефіцієнт перевищує коефіцієнти прямих матеріальних витрат нерідко в декілька разів.

Для того, щоб отримати коефіцієнти повних витрат, треба знайти B^{-1}. Матриця B є квадратною *3-го* порядку, її визначник

$detB = 0{,}8 - 0{,}01 - 0{,}032 = 0{,}758$.

Тому B^{-1} існує, систему можна розв'язати матричним методом.

Для знаходження матриці B^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці B: $B_{11} = 0{,}79$, $B_{12} = 0{,}16$, $B_{13} = 0{,}02$, $B_{21} = 0{,}16$, $B_{22} = 0{,}8$, $B_{23} = 0{,}1$, $B_{31} = 0{,}02$, $B_{32} = 0{,}1$, $B_{33} = 0{,}96$.

$$B^{-1} = \frac{1}{0{,}758}\begin{pmatrix} 0{,}79 & 0{,}16 & 0{,}02 \\ 0{,}16 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}02 & 0{,}1 & 0{,}96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти повних витрат знайдені (це елементи матриці B^{-1}). Знайдемо розв'язок системи матричним методом:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}У = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Отже, *плани валового випуску продукції*: для першого цеху $x_1 = 238$ *(од)*, для другого – $x_2 = 186$ *(од)*, для третього – $x_3 = 400$ *(од)*.

Визначимо *виробничу програму кожного цеха*, використовуючи витратні коефіцієнти a_{ij} (елементи матриці A) та співвідношення:

$x_{11}=a_{11}x_1=0;$

$x_{12}=a_{12}x_2=37{,}2;$

$x_{13}=a_{13}x_3=0;$

$x_{21}=a_{21}x_1=47{,}6;$

$x_{22}=a_{22}x_2=0;$

$x_{23}=a_{23}x_3=40;$

$x_{31}=a_{22}x_2=0;$

$x_{32}=a_{32}x_2=18{,}6;$

$x_{33}=a_{33}x_3=80.$

Коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат C_{ij} (елементи матриці C) визначається як різниця повних внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці B^{-1}) та прямих витрат (елементи a_{ij} матриці A). У матричному вигляді матриця коефіцієнтів непрямих витрат буде:

$$C = B^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix}.$$

Задача про визначення оптимального плану

П р и к л а д З двох автосалонів постачаються автомобілі для двох компаній, яким потрібно 200 і 300 машин. Перший автосалон може надати 350 машин, другий – 150. Витрати на доставку машин подано в таблиці:

Автосалон	Витрати на доставку авто, у.о.	
	1	*2*
1	15	20
2	8	25

Максимальні витрати на доставку машин – 7950 у.о. Визначити оптимальний план перевезення.

Нехай x_{ij} – кількість машин, що постачаються з *i-го* автосалону в *j-ту* компанію. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 350 \\ x_{21} + x_{22} = 150 \\ x_{11} + x_{21} = 200 \\ x_{12} + x_{22} = 300 \\ 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{21} + 25x_{22} = 7950 \end{cases}.$$

Розв’язуємо цю систему методом Гауса, отримаємо:

$x_{11} = 50;$

$x_{12} = 300;$

$x_{21} = 150;$

$x_{22} = 0.$

Звертаємо увагу також на те, що ранг матриці системи $r = 4$, отже, $r = n$, система має єдиний розв’язок.

Задача знаходження витрат сировини, палива та трудових ресурсів

П р и к л а д

У таблиці подано витратні норми двох видів сировини та палива на виробництво одиниці продукції кожного цеха, трудомісткість в людино-годинах на одиницю продукції, вартість одиниці відповідної сировини та вартість однієї робочої людино-години.

Показники	Норми витрат цехів			Вартість
	1	*2*	*3*	

Сировина A	1,4	2,4	0,8	5
Сировина B	0	0,6	1,6	12
Паливо	2	1,8	2,2	2
Трудомісткість	10	20	20	1,2

Знайти :

1) сумарні витрати сировини, палива та трудових ресурсів для виконання програми виробництва;

2) коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожного цеха;

3) повні витрати сировини, палива та праці кожним цехом та підприємством;

4) внутрішньовиробничі витрати цехів;

5) внутрішньовиробничі витрати на кожну одиницю товарної продукції.

Таблиця дозволяє скласти матрицю D норм витрат сировини, палива та праці розміру 4×3:

$D = \begin{pmatrix} 1,4 & 2,4 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 1,6 \\ 2 & 1,8 & 2,2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix}$, а також матрицю-рядок V вартості сировини, палива, робочих людино-годин: $V = (5 \quad 12 \quad 2 \quad 1,2)$.

1. Сумарні витрати сировини, палива, трудових ресурсів для виконання програми підприємства одержимо шляхом множення матриці норм витрат D на матрицю X валового випуску продукції:

$$DX = \begin{pmatrix} 1,4 & 2,4 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 1,6 \\ 2 & 1,8 & 2,2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 752 \\ 1692 \\ 1412 \end{pmatrix}.$$

Отже, для виконання програми підприємства треба витратити: сировини A – 1100 од.; сировини B – 752 од.; палива – 1692 од.; робочих людино-годин – 1412.

2. Коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожного цеха знаходимо шляхом множення матриці норм витрат D на матрицю коефіцієнтів повних витрат B^{-1}:

$$M = DB^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 2,4 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 1,6 \\ 2 & 1,8 & 2,2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,98 & 2,94 & 1,37 \\ 0,17 & 0,84 & 2,11 \\ 2,52 & 2,61 & 3,09 \\ 15,2 & 24,8 & 28,3 \end{pmatrix}.$$

Елементи k-*го* стовпця одержаної матриці M вказують кількість витрат сировини A, сировини B, палива та робочих людино-годин необхідну для виготовлення одиниці продукції k-го цеха.

3. Витрати сировини, палива та праці кожним з цехів одержимо шляхом множення витратної норми кожного цеху на його валовий випуск продукції:

$$238\cdot\begin{pmatrix}1{,}4\\0\\2\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}333\\0\\476\\2380\end{pmatrix},\ 186\cdot\begin{pmatrix}2{,}4\\0{,}6\\1{,}8\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}449\\112\\337\\3720\end{pmatrix},\ 400\cdot\begin{pmatrix}0{,}8\\1{,}6\\2{,}2\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320\\640\\880\\8000\end{pmatrix}.$$

Отже, матриця повних витрат сировини, палива та праці усього підприємства буде мати вигляд:

$$\begin{pmatrix}333 & 449 & 320\\0 & 112 & 640\\476 & 337 & 880\\2380 & 3720 & 8000\end{pmatrix}.$$

4. Виробничі витрати цехів одержимо шляхом множення, матриці-рядка вартостей V на матрицю повних витрат:

$$(5\quad 12\quad 2\quad 1{,}2)\begin{pmatrix}333 & 449 & 320\\0 & 112 & 640\\476 & 337 & 880\\2380 & 3720 & 8000\end{pmatrix}=(5473\quad 8751\quad 20640).$$

Отже, вартість витрат першого цеху 5473 у.о., другого – 8751 у.о, третього – 20640 у.о.

5. Внутрішньовиробничі витрати на одиницю товарної продукції цехів знаходять множенням рядка вартостей V на матрицю M прямих витрат:

$$(5\quad 12\quad 2\quad 1{,}2)\begin{pmatrix}1{,}98 & 2{,}94 & 1{,}37\\0{,}17 & 0{,}84 & 2{,}11\\2{,}52 & 2{,}61 & 3{,}09\\15{,}2 & 24{,}8 & 28{,}3\end{pmatrix}=(35{,}2\quad 59{,}6\quad 72{,}3).$$

Задача про розкроювання

<u>Приклад</u>

З деякого листового матеріалу необхідно викроїти 200 заготовок типу А, 260 – типу В, 290 – типу С. При цьому можна застосовувати три способи розкроювання. Кількість заготовок, одержуваних з кожного листа при кожному способі розкроювання, наведена в таблиці.

Тип заготовки	Спосіб розкроювання		
	1	*2*	*3*
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Установити, скільки листів буде потрібно для викроювання означеної кількості заготовок.

Позначимо через x_1, x_2, x_3 – кількість листів матеріалу, що розкроєні відповідно першим, другим і третім способам. Тоді за першим способом розкроювання x_1 листів буде отримано $3x_1$ затоготовк типу A, за другим – $2x_2$, за третім x_3. Для повного виконання завдання по заготовкам типу A сума $3x_1 + 2x_2 + x_3$ повинна дорівнювати 200, тобто $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 200$, аналогічно $x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 260$ та $4x_1 + x_2 + 5x_3 = 290$, яким повинні задовольняти невідомі x_1, x_2, x_3 для того, щоб виконати завдання по заготовкам B і C.

Система лінійних рівнянь
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 200 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 260 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 290 \end{cases}$ виражає в математичній формі умови виконання всього завдання по заготовкам A, B, C. Розв'язуючи цю систему будь-яким методом, отримаємо, що $x_1 = 40$, $x_2 = 30$, $x_3 = 20$.

Загальна постановка задачі прогнозу випуску продукції

Нехай $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця витрат сировини m видів при випуску продукції n видів, $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$ – матриця обсягів запасу кожного типу сировини, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця плану випуску продукції. Тоді X визначається з розв'язання системи m рівнянь з n невідомими: $C \cdot X = R$.

Модель міжнародної торгівлі

Нехай країни S_1, S_2, …, S_n мають національні прибутки x_1 , x_2, …, x_n відповідно. Позначимо через a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i. Припустимо, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто для кожної країни S_j, де j =1, 2, ... ,n є справедливою рівність $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Матриця $A = (a_{ij})$, що складається з часток національного доходу, називається *структурною матрицею торгівлі*.

Міжнародна торгівля буде збалансованою, якщо для кожної країни S_j, де j =1, 2, ... , n дохід $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ від зовнішньої та внутрішньої торгівлі співпадає з національним доходом x_i цієї країни, тобто коли виконується рівність $AX = X$, де $X = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ – матриця доходів.

Приклад

Для структурної матриці A торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3, яка має вигляд

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн для збалансованої торгівлі.

Розв'яжемо матричне рівняння $AX = X$ або $(A - E)X = 0$.

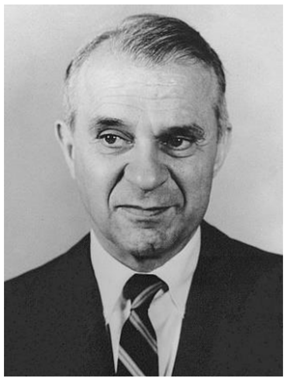
З цього матричного рівняння отримаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \frac{-3}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему методом Гауса, отримаємо: $x_1 = 8c, x_2 = 3c, x_3 = 10c$, де $c \neq 0$ – довільне число. З отриманого результату можна зробити висновок, що збалансованість торгівлі 3-х країн досягається при матриці національних доходів $(8c\ 3c\ 10c)$, тобто при співвідношенні національних доходів трьох країн $8: 3: 10$.

4.8. Модель багатолузевої економіки Леонтьєва

Цікаво знати



Функціонування багатогалузевого господарства вимагає балансу між окремими галузями. Кожна галузь, з одного боку, є виробником, а з протилежного – споживачем продукції, що випускається іншими галузями. Виникає непроста задача розрахунку зв'язку між галузями через випуск і споживання продукції різного виду. Уперше ця проблема була сформульована в 1936 р. у виді математичної моделі «Витрати – Випуск» у працях американського економіста російського походження **Василя Васильовича Леонтьєва** – лауреата Нобелівської премії за 1974 рік. В. В. Леонтьев проаналізував причини економічної депресії в США 1929 – 1932 р. Його модель заснована на алгебрі матриць і використовує апарат матричного аналізу.

Будемо вважати, що виробнича сфера господарства являє собою n галузей, кожна з яких виробляє свій однорідний продукт. Для забезпечення свого виробництва кожна галузь має потребу в продукції інших галузей (виробниче споживання). Традиційно процес виробництва розглядається за деякий період часу. Найчастіше такою одиницею служить рік.

Уведемо позначення:

x_i – *загальний обсяг продукції i-й галузі* (її *валовий випуск*);

y_i – *обсяг продукції i-й галузі*, що призначений для реалізації в невиробничій сфері, чи так званий *продукт кінцевого споживання*. До нього відносяться особисте споживання громадян, задоволення суспільних потреб, зміст державних інститутів, утворення запасів та ін.

x_{ij} *– частина продукції i-й галузі, що споживається j-й галуззю при виробництві обсягу продукції* x_j.

Балансовий принцип зв'язку різних галузей промисловості полягає в тому, що валовий випуск *i-ї* галузі повинен бути рівним сумі обсягів споживання у виробничій і невиробничій сферах.

Балансові співвідношення мають вид: $x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i$.

Оскільки продукція різних галузей має різні виміри, будемо надалі мати на увазі вартісний баланс.

В. В. Леонтьевим на підставі аналізу економіки США в період перед другою світовою війною був установлений важливий факт: протягом тривалого часу величини $a_{ij} = {}^{x_{ij}}\!/_{x_j}$ змінюються дуже слабко й можуть розглядатися як постійні числа. Це явище стає зрозумілим у світлі того, що технологія виробництва залишається на одному рівні досить тривалий час, і отже, обсяг споживання *j-ю* галуззю продукції *i-ї* галузі при виробництві своєї продукції обсягом x_j є константою.

При такому припущенні технологія виробництва приймається лінійною, а саме це допущення називається *гіпотезою лінійності*. При цьому числа a_{ij} *називають коефіцієнтами прямих витрат*.

Відповідно до гіпотези лінійності, маємо:

$a_{ij} = {}^{x_{ij}}\!/_{x_j}$, $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, де $(i, j = 1,2,3, \ldots, n)$, число n натуральне.

Тоді балансові співвідношення $x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i$ матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & + y_2 \\ \quad \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{nn}x_n & + y_n \end{cases}.$$

Уведемо позначення:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця обсягів виробленої продукції (*матриця валового випуску*), $У = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ – матриця обсягів продукції кінцевого споживання (*матриця кінцевого споживання*), $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – *матриця коефіцієнтів прямих витрат*.

Тоді система рівнянь у матричній формі матиме вигляд: $X = A \cdot X + У$. Це співвідношення називають *рівнянням лінійного міжгалузевого балансу (моделлю*

Леонтьєва).

Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати в двох основних напрямках.

- У першому, найбільш простому випадку, коли матриця валового випуску X відома, потрібно знайти матрицю кінцевого споживання $У$.
- У другому випадку рівняння міжгалузевого балансу використовується для цілі планування з наступним формулюванням задачі: для періоду часу T (наприклад, рік) відома матриця кінцевого споживання $У$ і потрібно визначити матрицю X валового випуску. Тут необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь $X = A \cdot X + У$ з відомою матрицею A і заданою матрицею $У$.

Система $X = A \cdot X + У$ має характерну рису, що випливає з прикладного характеру задачі: всі елементи матриць A, X, $У$ повинні бути невід'ємними (обсяг випуску не може бути менше нуля).

Означення

Матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, всі елементи якої невід'ємні, називають *продуктивною*, якщо для будь-якої матриці $У$ з невід'ємними компонентами існує розв'язання рівняння $X = A \cdot X + У$ – матриця X, всі елементи якої невід'ємні. У такому випадку й модель Леонтьева називається *продуктивною*.

Для рівняння $X = A \cdot X + У$ розроблена відповідна математична теорія дослідження розв'язання його особливостей. Укажемо деякі основні її моменти.

Перепишемо систему $X = A \cdot X + У$ з використанням одиничної матриці E у вигляді $(E - A) \cdot X = У$. Якщо існує обернена матриця $(E - A)^{-1}$, то існує й єдине розв'язання: $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$

Матриця $(E - A)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат*.

Виділимо *критерії продуктивності матриці прямих витрат A:*

1) Матриця A продуктивна тоді й тільки тоді, коли матриця $(E - A)^{-1}$ існує й її елементи невід'ємні.

2) Матриця A з невід'ємними елементами продуктивна, якщо сума елементів будь-якого її стовпця (рядка) не перевищує одиниці, причому хоча б для одного стовпця (рядка) ця сума строго менше одиниці.

Приклад У таблиці подані дані по балансу за деякий період часу між 5 галузями промисловості. Знайти матриці кінцевого споживання й валового випуску, а також матрицю коефіцієнтів прямих витрат і встановити, чи є вона продуктивною.

№	Галузь	Споживання					Кінцевий продукт	Валовий випуск
		1	2	3	4	5		
1	Верстатобудування	15	12	24	23	16	10	100

2	Енергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машинобуду-вання	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобільна промисловість	10	5	10	5	5	15	50
5	Видобуток і переробка вуглеводнів	7	15	15	3	3	50	100

У таблиці приведені складові балансу відповідно до співвідношень $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$, $У = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix}$. Відповідно за формулами $a_{ij} = {x_{ij}}/{x_j}$, $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, маємо:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}48 & 0{,}46 & 0{,}16 \\ 0{,}10 & 0{,}03 & 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Усі елементи матриці А невід’ємні, однак їх суми в третьому й четвертому стовпцях більше одиниці. Отже, умови другого критерію продуктивності не дотримані, матриця А не є продуктивною. Економічна причина цієї непродуктивності полягає в тому, що внутрішнє споживання галузей 3 і 4 занадто велике в співвідношенні з їхніми валовими випусками.

<u>Приклад</u> Таблиця містить дані трьох галузей промисловості за деякий період часу. Знайти обсяг валового випуску кожного виду продукції, якщо кінцеве споживання за галузями збільшити до 60, 70 і 30 у.о. відповідно.

№	Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий випуск
		1	2	3		
1	Верстатобудування	5	35	20	40	100
2	Енергетика	10	10	20	60	100
3	Машинобудування	20	10	10	10	50

Складемо матриці валового випуску, кінцевого споживання й коефіцієнтів прямих витрат:

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, У = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

Матриця А задовольняє критеріям продуктивності. У випадку заданого збільшення кінцевого споживання нова матриця кінцевого продукту буде мати вигляд: $У^0 = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Потрібно знайти нову матрицю валового випуску X^0, що задовольняє співвідношенням балансу в припущенні, що матриця А змінюється. У такому випадку компоненти x_1, x_2, x_3 невідомої матриці X^0 знаходяться із системи рівнянь, що у матричній формі має вид:

$\mathrm{X}^0 = \mathrm{A} \cdot \mathrm{X}^0 + У^0$ або $(\mathrm{E} - \mathrm{A}) \cdot \mathrm{X}^0 = У^0$.

Матриця цієї системи

$$(\mathrm{E} - \mathrm{A}) = = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40 \\ -0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 0{,}95x_1 - 0{,}35x_2 - 0{,}4x_3 = 60 \\ -0{,}1x_1 + 0{,}9x_2 - 0{,}4x_3 = 70 \\ -0{,}2x_1 - 0{,}1\mathrm{x}_2 + 0{,}8x_3 = 30 \end{cases}$ (найзручніше за методом Гауса) дає нову матрицю X^0 як розв’язання рівняння міжгалузевого балансу: $X^0 = \begin{pmatrix} 152{,}6 \\ 135{,}8 \\ 92{,}5 \end{pmatrix}$.

Питання для самоконтролю

1. *Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь?*
2. *Що Ви розумієте під основною матрицею системи, розширеною матрицею системи?*
3. *Яку систему називають однорідною?*
4. *Що таке розв’язок системи?*
5. *Яку систему називають сумісною, несумісною?*
6. *Яка система є визначеною, невизначеною?*
7. *Що таке частковий розв’язок системи?*
8. *У чому сутність матричного методу розв’язання системи лінійних рівнянь?*
9. *У чому полягає сутність методу Крамера?*
10. *Сформулюйте сутність розв’язання систем лінійних рівнянь методом Гауса.*
11. *Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.*
12. *Назвіть правило розв’язання довільної системи лінійних рівнянь.*
13. *У чому сутність моделі багатолузевої економіки В. В. Леонтьєва?*

Завдання для самостійного розв'язання

Дослідити систему лінійних рівнянь. Для сумісної системи знайти загальний та частинний розв'язки.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$.

Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом, методом Крамера, методом Гауса

6. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 4x + 5y + 6z = 19 \\ 7x + 8y = 1 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 6x + 5y + 4z = -2 \\ 9x + 8y + 7z = 3 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} 3x + 2y + z = -8 \\ 2x + 3y + z = -3 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$.

З'ясувати, чи продуктивна матриця:

11. $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 1,1 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Відповіді

1. *Система сумісна та визначена. Загальний розв'язок співпадає з частинним розв'язком (1; 2).*
2. *Несумісна.*
3. *Сумісна та невизначена. Загальний розв'язок* $(3 - t_1 - t_2;\ t_1;\ t_2)$, *частинний розв'язок (3; 0; 0).*
4. *Несумісна.*
5. *Сумісна та невизначена. Загальний розв'язок* $(-3t;\ t;\ 5t)$, *частинний розв'язок (0; 0; 0).*
6. $(-1;\ 1;\ 3)$.
7. $(2;\ -3;\ 2)$.
8. *Несумісна.*
9. $(-4;\ 1;\ 2)$.
10. $\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)};\ \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)};\ \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)$, *якщо* $b(a-1)\,a+2 \neq 0$; *несумісна, якщо* $b(a-1)\,a+2 = 0$.
11. Ні.
12. Так.
13. Так.
14. Ні.

РОЗДІЛ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

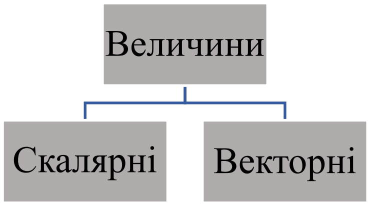
Цікаво знати Розділ математики, в якому вивчаються властивості операцій над векторами, називається векторним численням. Векторне числення складається з векторної алгебри та векторного аналізу. У векторній алгебрі вивчають лінійні операції з векторами (додавання векторів і множення вектора на число), а також різні добутки векторів (скалярний, векторний, мішаний та ін.).

«Кожна людина у вашій компанії – це вектор. Ваш прогрес визначається сумою всіх векторів» (Ілон Рів Маск (1971 р.н.) – інженер, підприємець, винахідник, інвестор, засновник компаній SpaceX, PayPal, Neuralink і The Boring Company, генеральний директор Tesla Inc.).

ТЕМА 1. ВЕКТОРИ

1.1. Основні поняття

Величини, з якими доводиться мати справу людині в різних теоретичних і прикладних науках, бувають двох видів.



Означення Величини, які повністю визначаються своїм чисельним значенням, називають *скалярними*.

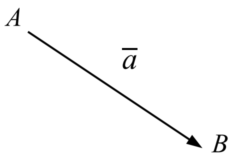
Прикладами скалярних величин є: площа, довжина, об’єм, температура, робота, маса, густина та ін.

Означення Величини, які визначаються не лише своїм чисельним значенням, а ще й напрямом, називають *векторними.*

Прикладами векторних величин є: сила, швидкість, прискорення, переміщення.

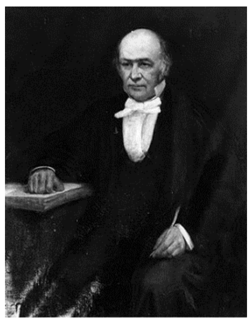
Векторну величину геометрично зображають за допомогою вектора.

Означення *Вектор* – напрямлений прямолінійний відрізок, тобто відрізок, який має певну довжину та певний напрям.



Цікаво знати Поняття вектора (від лат. *vector* – переносник) ввів ірландський математик і фізик У. Гамільтон (1805–1865).

До 19 ст. фізичні величини задавали одним або кількома дійсними числами без урахування напряму.



Зображається вектор відрізком зі стрілкою на кінці.

Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначається символом $\overline{AB}$, $\overline{a}$ або $\boldsymbol{a}$ (якщо вказівка на точки несуттєва).

Початок вектора називають *точкою його прикладання*.

З а у в а ж е н н я Довжина вектора не залежить від його напряму.

О з н а ч е н н я Вектор $\overline{BA}$ (початок – у точці B, а кінець – у точці A) називають *протилежним вектору* $\overline{AB}$.

Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначають так: $-\overline{a}$.

О з н а ч е н н я *Модулем* або *довжиною* вектора $\overline{AB}$ називають довжину відрізка, який його породжує.

Позначають так: $|\overline{AB}|$.

О з н а ч е н н я Вектор, початок і кінець якого співпадають, називають *нульовим* вектором, або *нуль-вектором*.

Позначають так: $\overline{O}$.

Нульовий вектор напряму не має, його модуль дорівнює нулю.

О з н а ч е н н я Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називають *одиничним вектором*.

Позначають так: $\bar{e}$.

О з н а ч е н н я Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\overline{a}$, називають *ортом* вектора $\overline{a}$.

Позначають так: $\overline{a}^{\circ}$.

О з н а ч е н н я Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають *колінеарними*, якщо вони розташовані на одній прямій або на паралельних прямих.

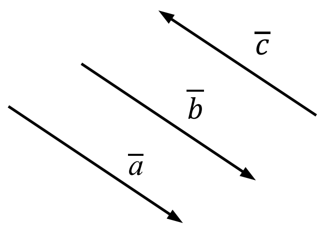
Записують так: $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно:

Однаково напрямлені вектори позначаються ↑↑, протилежно напрямлені – ↑↓.

Так, на рисунку $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{c}$, $\overline{b}\uparrow\downarrow\overline{c}$.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.



О з н а ч е н н я Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають *рівними*, якщо вони однаково напрямлені та мають рівні довжини.

Позначають так: $\overline{a} = \overline{b}$.

На рисунку вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є рівними, оскільки $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ і $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

Усі нульові вектори вважають рівними.

З а у в а ж е н н я Із означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, поміщаючи його початок у будь-яку точку простору (зокрема, площини).

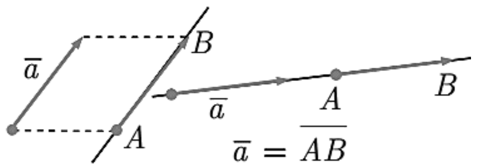
Рівні вектори називають також *вільними*.

Можна також довести:

1) якщо $\overline{a}=\overline{b}$, то $\overline{b}=\overline{a}$;

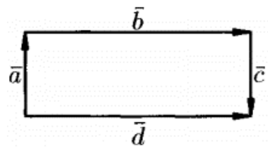
2) якщо $\overline{a}=\overline{b}$, $\overline{b}=\overline{c}$, то $\overline{a}=\overline{c}$.

Приклад



Означення Два колінеарні (ненульові) вектори, що мають рівні модулі, але протилежно напрямлені, називають *протилежними*.

Приклад На рисунку вектори $\overline{b}$ і $\overline{d}$ є рівними, а вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ – протилежними.



Означення Вектори в просторі називають *компланарними***,** якщо вони лежать у одній площині або в паралельних площинах.

Якщо компланарні вектори мають спільний початок, то вони лежать у одній площині.

Якщо серед трьох векторів хоча б один – нульовий або два будь-які колінеарні, то такі вектори – компланарні.

Теорема Три ненульові вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні тоді й тільки тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших, тобто можна записати:

$$\overline{c}=k\overline{a}+l\overline{b},\text{ де } k \text{ і } l \text{ – скаляри.}$$

1.2. Лінійні операції з векторами

За своїм означенням вектор – геометричний об’єкт, але над ним можна виконувати алгебраїчні операції.

Означення Під *лінійними операціями над векторами* розуміють операції додавання, віднімання векторів, а також множення вектора на число.

Нехай $\overline{a}$ і $\overline{b}$ – довільні вектори. Візьмемо довільну точку O та побудуємо вектор $\overline{OA}=\overline{a}$. Від точки A відкладаємо вектор $\overline{AB}=\overline{b}$.

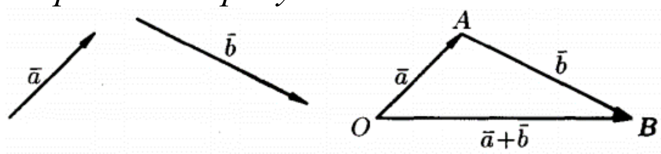
<u>О з н а ч е н н я</u> Вектор, що сполучає початок першого вектора-доданку з кінцем другого, називають *сумою векторів* $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}.$$

Це правило додавання векторів називають *правилом трикутника*.

Таке правило можна записати у вигляді:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}.$$

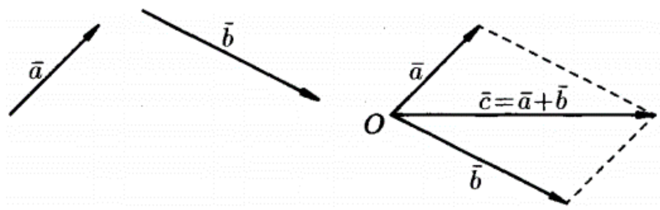


Зі шкільного курсу математики відомо, у трикутнику довжина однієї сторони не перевищує суми довжин двох інших сторін, отже можна записати так:

$$|\overline{a} + \overline{b}| \le |\overline{a}| + |\overline{b}|,$$

тобто модуль суми двох векторів не перевищує суми модулів цих векторів.

Суму двох векторів можна одержати також за *правилом паралелограма*. Відкладемо від точки O вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Побудуємо на цих векторах як на сторонах паралелограм. Вектор, що є діагоналлю цього паралелограма, проведений з вершини O, є сумою векторів $\overline{a} + \overline{b}$.



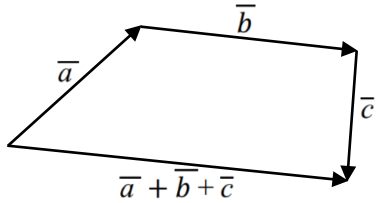
<u>З а у в а ж е н н я</u> Для суми двох векторів характерна *переставна властивість*:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a},$$

тобто векторна сума не залежить від порядку доданків.

Поняття суми векторів, введене для двох векторів-доданків, можна узагальнити на випадок будь-якого кінцевого числа векторів-доданків.

Покажемо додавання трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$:

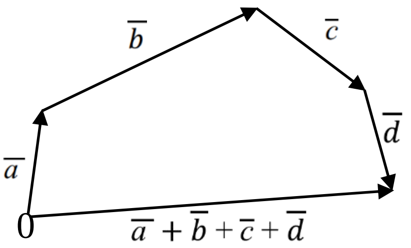


<u>З а у в а ж е н н я</u>

$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$, тобто для суми векторів характерна *сполучна властивість*. Отже, сума трьох (і більшої кількості векторів) не залежить від порядку розстановки дужок. Тому суму трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ записують так: $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.

<u>З а у в а ж е н н я</u>

Аналогічно знаходять суму будь-якого кінцевого числа векторів. У цьому випадку всі вектори розміщують так, щоб початок наступного вектора приєднувався до кінця попереднього. Тоді сумою цих векторів є вектор, що сполучає початок першого вектора-доданку з кінцем останнього. Таке правило додавання векторів називають *правилом багатокутника*.



Якщо при додаванні декількох векторів кінець останнього вектора-доданку співпадає з початком першого, то сума векторів дорівнює нульовому вектору.

Приклад Знайти суму векторів: $\overline{MH}+\overline{PO}+\overline{SM}+\overline{HP}+\overline{OS}$.

Скористаємося переставною властивістю додавання векторів:

$\overline{MH}+\overline{PO}+\overline{SM}+\overline{HP}+\overline{OS}=\overline{MH}+\overline{HP}+\overline{PO}+\overline{OS}+\overline{SM}$.

Використовуючи правило многокутника додавання векторів, дістанемо, що ця сума дорівнює $\overline{MM}=\overline{0}$.

Очевидно, що для будь-якого вектора мають місце рівності:

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}, \qquad \overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}.$$

Зауваження

Правило трикутника є окремим випадком правила многокутника для випадку двох векторів.

Означення Під *різницею векторів* $\overline{a}$ і $\overline{b}$ розуміють вектор

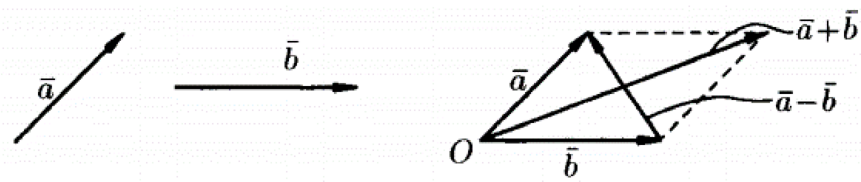
$$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$$

такий, що

$$\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}.$$

Із означення суми двох векторів випливає правило побудови вектора-різниці. Відкладаємо вектори із спільної точки. Вектор, який сполучає кінці векторів та напрямлений від від'ємника до зменшуваного, є різницею даних векторів.

Зазначимо, що в паралелограмі, побудованому на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, одна напрямлена діагональ є сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, а інша – різницею:



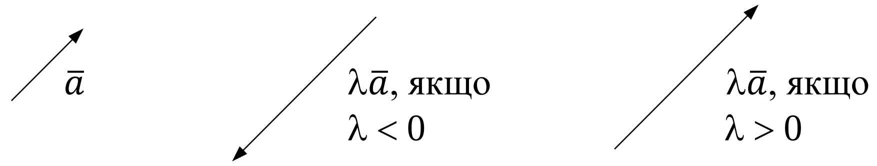
Зауваження

Можна віднімати вектори за правилом:

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b}),$$

тобто віднімання векторів замінити додаванням вектора $\overline{a}$ з вектором, протилежним вектору $\overline{b}$.

Означення *Добутком вектора* $\overline{a}$ *на скаляр (число)* λ називають вектор $\lambda\cdot\overline{a}$ (або $\overline{a}\cdot\lambda$), який має довжину $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, має напрям вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напрям, якщо $\lambda < 0$.



Так, вектор $3\overline{a}$ є вектор, який має той самий напрям, що й вектор $\overline{a}$, а довжину – втричі більшу, ніж вектор $\overline{a}$.

У разі, коли $\lambda = 0$ або $\overline{a} = \overline{0}$, добуток $\lambda\overline{a}$ є нульовим вектором.

Протилежний вектор $-\overline{a}$ можна розглядати як результат множення вектора $\overline{a}$ на $\lambda = -1$:

$$-\overline{a} = (-1)\cdot\overline{a}.$$

Можна показати, що:

1) якщо $\overline{b} = \lambda\cdot\overline{a}$, то $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Навпаки, якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то при деякому $\overline{b} = \lambda\cdot\overline{a}$ є вірною рівність $\overline{b} = \lambda\cdot\overline{a}$.

Теорема Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли має місце рівність

$$\overline{b} = \lambda\cdot\overline{a}.$$

2) $\overline{a} = |\overline{a}|\bullet\overline{a}^0$,

тобто кожен вектор дорівнює добутку його модуля на орт.

Властивості операції множення вектора на число:

1. $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\overline{a}) = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\overline{a}$ (*сполучна властивість*).
2. $(\lambda_1 + \lambda_2)\cdot\overline{a} = \lambda_1\cdot\overline{a} + \lambda_2\cdot\overline{a}$ (*розподільна властивість відносно скалярів*).
3. $\lambda\cdot(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\cdot\overline{a} + \lambda\cdot\overline{b}$ (*розподільна властивість відносно векторів*).

Зауваження

Властивості операцій над векторами дозволяють проводити перетворення в лінійних операціях з векторами так, як це робиться в звичайній алгебрі: доданки міняти місцями, вводити дужки, групувати, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники.

1.3. Лінійна залежність векторів

Означення Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ називають *лінійно залежними*, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, які не всі дорівнюють нулю, для яких має місце рівність

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}.$$

Означення Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ називають *лінійно незалежними*, якщо рівність $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$ має місце тільки при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0.$$

Якщо декілька векторів лінійно залежні, то хоча б один з них завжди можна представити у вигляді лінійної комбінації інших.

Справедливе й інше твердження: якщо один з векторів представлений у вигляді лінійної комбінації решти векторів, то всі ці вектори лінійно залежні.

Теорема Будь-які три вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ на площині лінійно залежні.

Можна також показати, якщо кількість векторів на площині більше трьох, то вони також лінійно залежні.

Теорема Для того, щоб два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ на площині були лінійно незалежними, необхідно й достатньо, щоб вони були неколінеарними.

Зауваження Із попередніх теорем випливає, максимальне число лінійно незалежних векторів на площині дорівнює двом.

Теорема Будь-які чотири вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$ у просторі лінійно залежні.

Можна показати, якщо число векторів у просторі більше чотирьох, то вони лінійно залежні.

Теорема Для того, щоб три вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ у просторі були лінійно незалежними, необхідно й достатньо, щоб вони були некомпланарними.

Зауваження Із попередніх теорем випливає, що максимальне число лінійно незалежних векторів у просторі дорівнює трьом.

1.4. Базис на площині й у просторі

Означення *Базисом на площині* називають два будь-яких лінійно незалежних вектори.

Два будь-яких неколінеарних вектори утворюють базис.

Нехай $\overline{a}$ – будь-який вектор на площині, а вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють базис. Оскільки на площині три вектори лінійно залежні, то вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через вектори базису, тобто виконується співвідношення

$$\overline{a} = \lambda_1\overline{b} + \lambda_2\overline{c}.$$

Означення Якщо вектор $\overline{a}$ представлений у вигляді $\overline{a} = \lambda_1\overline{b} + \lambda_2\overline{c}$, то говорять, що він *розкладений по базису*, утвореному векторами $\overline{b}$ і $\overline{c}$.

Числа λ_1 і λ_2 називають *координатами вектора* $\overline{a}$ на площині відносно базису $\overline{b}$ і $\overline{c}$.

Теорема Розкладання вектора $\overline{a}$ по базису $\overline{b}$ і $\overline{c}$ є єдиним.

Означення *Базисом у просторі* називають три будь-яких лінійно незалежних вектори.

Три будь-яких некомпланарних вектори утворюють базис.

Будь-який вектор $\overline{a}$ розкладається по векторах $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$ базису:

$$\overline{a} = \lambda_1\overline{b} + \lambda_2\overline{c} + \lambda_3\overline{d},$$

причому це розкладання єдине.

Числа λ_1, λ_2 і λ_3 називають *координатами вектора* $\overline{a}$ у просторі відносно базису $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$.

Основне значення базису полягає в тому, що лінійні операції знад векторами при задаванні базису стають звичайними лінійними операціями над числами – координатами цих векторів.

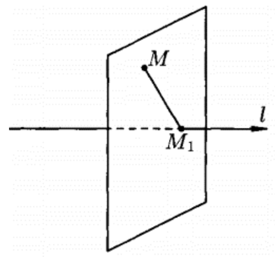
Означення Базис, утворений векторами $\overline{b}$ і $\overline{c}$, називається *ортонормованим*, якщо вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$ є одиничними та взаємно перпендикулярними.

Надалі розглядатимемо ортонормований базис.

1.5. Проекція вектора на вісь

Нехай у просторі задана вісь l, тобто напрямлена пряма.

Означення *Проекцією точки M на вісь l* називається основа M_1 перпендикуляра MM_1, опущеного з точки M на цю вісь.

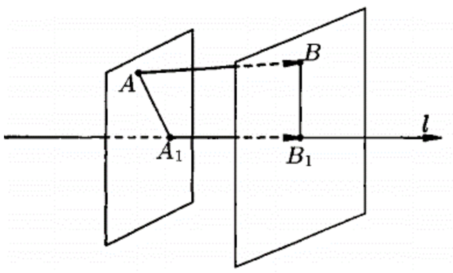


Таким чином, точка M_1 є точка перетину осі l з площиною, що проходить через точку M перпендикулярно осі.

Якщо точка M лежить на осі l, то проекція точки M на вісь співпадає з M.

Нехай $\overline{AB}$ – довільний вектор ($\overline{AB} \neq \overline{0}$). Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B вектора $\overline{AB}$ та розглянемо вектор $\overline{A_1B_1}$.

Означення *Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l* називають додатне число $|\overline{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь l однаково напрямлені, і від'ємне число $-|\overline{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь l протилежно направлені.

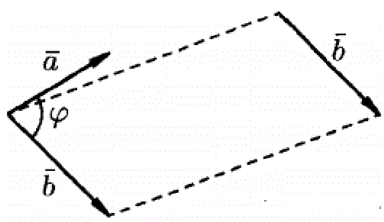


Зауваження Якщо точки A_1 і B_1 співпадають ($\overline{A_1B_1} = \overline{0}$), то проекція вектора $\overline{AB}$ дорівнює 0.

Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь l позначається: $пр_l\overline{AB}$.

Зауваження Якщо $\overline{AB} = \overline{0}$ або $\overline{AB} \perp l$, то $пр_l\overline{AB} = 0$.

Означення *Кутом між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$* називають найменший кут φ ($0 \leq \phi \leq \pi$), на який треба повернути один з векторів до його збігу з другим після приведення цих векторів до спільного початку.



Означення *Кутом між вектором $\overline{a}$ і віссю l* називається кут між вектором $\overline{a}$ *і ортом осі l.*

Теорема Проекція вектора $\overline{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\overline{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю, тобто

$$пр_l\overline{a} = |\,\overline{a}\,|\cdot cos\ \varphi.$$

Проекція вектора на вісь додатна (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут прямий.

Проекції рівних векторів на одну й ту ж вісь рівні між собою.

Основні властивості проекцій:

1. Проекція суми декількох векторів на одну й ту ж вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь:

$$пр_l(\overline{a} + \overline{b}) = пр_l(\overline{a}) + пр_l(\overline{b})$$

2. При множенні вектора $\overline{a}$ на число λ його проекція на вісь також множиться на це число:

$$пр_l(\lambda\cdot\overline{a}) = \lambda\cdot пр_l\overline{a}.$$

Таким чином, лінійні операції над векторами призводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

1.6. Розкладання вектора по ортам координатних осей. Модуль вектора

Три взаємно перпендикулярні осі в просторі (координатні осі) із спільним початком O і однаковою масштабною одиницею утворюють *прямокутну декартову систему координат* (*ПДСК*) *у просторі*. Осі впорядковані, тобто зазначено, яка з осей вважається першою (вона називається *віссю абсцис* та позначається Ox), яка – другою (*вісь ординат* Oy) і яка – третьою (*вісь аплікат* Oz).

Традиційно орти осей Ox, Oy, Oz позначають відповідно через $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Оскільки вектори $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ не компланарні, то вони утворюють базис, який називають *декартовим прямокутним базисом*.

Три взаємно перпендикулярні площини Oxy, Oyz, Ozx, що проходять через відповідні осі, називають *координатними площинами*. Вони ділять весь простір на вісім *октантів*.

Цікаво знати Декартова система координат названа на честь французького філософа й математика Рене Декарта (1596 –1650 рр.).

Виберемо довільний вектор $\overline{a}$ простору та сумістимо його початок з початком координат:

$$\overline{a} = \overline{OM}.$$

Даний вектор називається *радіус-вектором* точки M.

Знайдемо проекції вектора $\overline{a}$ на координатні осі.

Проведемо через кінець вектора $\overline{OM}$ площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з осями позначимо відповідно через M_1, M_2 і M_3.

Дістанемо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overline{OM}$.

Тоді

$$пр_x\overline{a} = |\overline{OM_1}|,\ пр_y\overline{a} = |\overline{OM_2}|,\ пр_z\overline{a} = |\overline{OM_3}|.$$

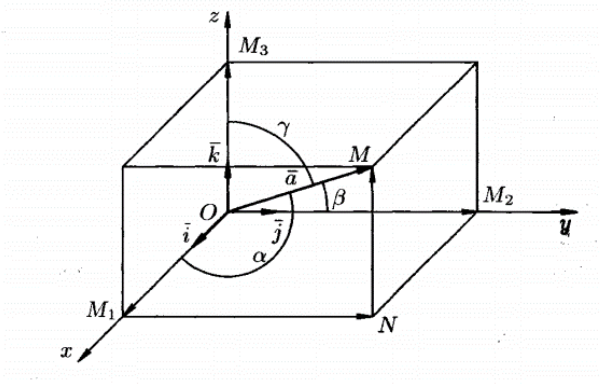
За означенням суми декількох векторів маємо:

$$\overline{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM}.$$

Оскільки $\overline{M_1N} = \overline{OM_2}$, $\overline{NM} = \overline{OM_3}$,

то

$$\overline{a} = \overline{\mathrm{OM}_1} + \overline{\mathrm{OM}_2} + \overline{\mathrm{OM}_3}.$$



Але

$$\overline{\mathrm{OM}_1} = |\overline{\mathrm{OM}_1}|\cdot\overline{i}, \qquad \overline{\mathrm{OM}_2} = |\overline{\mathrm{OM}_2}|\cdot\overline{j},$$

$$\overline{\mathrm{OM}_3} = |\overline{\mathrm{OM}_3}|\cdot\overline{k}.$$

Позначимо проекції вектора $\overline{a} = \overline{\mathrm{OM}}$ на осі Ox, Oy і Oz відповідно через a_x, a_y і a_z:

$$|\overline{\mathrm{OM}_1}| = a_x, \qquad |\overline{\mathrm{OM}_2}| = a_y,$$

$$|\overline{\mathrm{OM}_3}| = a_z.$$

Тоді маємо:

$$\overline{a} = a_x\cdot\overline{i} + a_y\cdot\overline{j} + a_z\cdot\overline{k}.$$

Числа a_x, a_y і a_z називають *декартовими прямокутними* (або *прямокутними*) *координатами вектора* $\overline{a}$, тобто координати вектора – це його проекції на відповідні координатні осі.

З а у в а ж е н н я Векторну рівність $\overline{a} = a_x\cdot\overline{i} + a_y\cdot\overline{j} + a_z\cdot\overline{k}$ часто записують у символічному вигляді:

$$\overline{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$$

Цей запис означає, що вектор $\overline{a}$ має координати a_x, a_y і a_z.

Перша координата називається *абсцисою*, друга – *ординатою*, а третя – *аплікатою* вектора $\overline{a}$ (відповідно точки M).

П р и к л а д Якщо $\overline{a} = (5;\ -3;\ 4)$, то даний вектор можна розкласти по ортам координатних осей:

$$\overline{a} = 5\cdot\overline{i} - 3\cdot\overline{j} + 4\cdot\overline{k}.$$

Знаючи проекції вектора $\overline{a}$, можна легко знайти вираз для модуля вектора.

На підставі теореми про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда можна записати:

$$|\overline{\mathrm{OM}}|^2 = |\overline{\mathrm{OM}_1}|^2 + |\overline{\mathrm{OM}_2}|^2 + |\overline{\mathrm{OM}_3}|^2,$$

тобто

$$|\overline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

отже

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

тобто модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат.

П р и к л а д Знайти модуль вектора $\overline{a} = (-3; 0; 4)$.

За формулою $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ маємо:

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5.$$

<u>Приклади застосування векторної алгебри в економічній теорії та практиці</u>

Продуктивна функція. При аналізі закономірностей виробництва використовують продуктивну функцію, яка, по суті, є співвідношенням між використаними у виробництві ресурсами та випущеною продукцією.

Нехай в деякому виробничому процесі є n виробничих ресурсів. Кількість i-го ресурсу, який використали за проміжок часу t, позначимо x_i. Тоді виробничі ресурси – це вектор $\overline{X} = (x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$. Нехай підприємство випускає m різних виробів. Кількість виробу позначимо y_i . Тоді випуск усіх виробів буде вектор $\overline{Y} = (y_1;\ y_2;\ \dots\ ;\ y_m)$. Нехай $\bar{a} = (a_1;\ a_2;\ \dots\ ;\ a_p)$ – вектор параметрів виробництва (наприклад, різні види транспортних чи інших витрат).

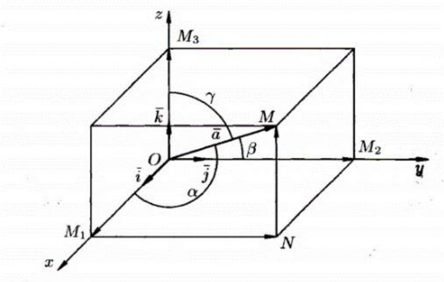
Продуктивна функція пов'язує вектори ресурсів $\overline{X}$, випуску $\overline{Y}$ та параметрів $\bar{a}$, тобто $F(\overline{X}, \overline{Y}, \bar{a}) = 0$.

Продуктивна функція задається аналітично або таблично. Продуктивну функцію, розв'язану відносно $\overline{Y}$, тобто вигляду $\overline{Y} = f(\overline{X}, \bar{a})$ називають *функцією випуску*, а розв'язану відносно вектора $\overline{X}$, тобто вигляду $\overline{X} = \varphi(\overline{Y}, \bar{a})$ називають *функцією виробничих витрат*.

Зрозуміло, що ці функції у конкретних випадках (коли вказано закони f та φ) використовують правила дій над векторами.

1.7. Напрямні косинуси вектора

Нехай кути вектора $\overline{a}$ з осями Ox, Oy і Oz відповідно дорівнюють α, β і γ. За властивістю проекції вектора на вісь маємо:



$a_x = |\overline{a}|\cdot\cos\alpha$, $a_y = |\overline{a}|\cdot\cos\beta$, $a_z = |a|\cdot\cos\gamma$.

<u>Означення</u> Числа $\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|a|}$,

$\cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}$

називають *напрямними косинусами вектора* $\overline{a}$.

<u>Приклад</u> Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{a} = (1; 2; -2)$.

За формулами $a_x = |\overline{a}|\cdot\cos\alpha$, $a_y = |\overline{a}|\cdot\cos\beta$, $a_z = |\overline{a}|\cdot\cos\gamma$ маємо:

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{2}{3}$,

$\cos\gamma = \frac{-2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = -\frac{2}{3}$.

<u>Теорема</u> Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого ненульового вектора дорівнює одиниці:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

<u>Приклад</u> Перевіримо цю теорему для останнього прикладу:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

Приклад Вектор $\overline{a}$ утворює з координатними осями Oy і Oz кути $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$. Обчислити його координати за умови, що $\overline{| a |} = 6$.

Використовуючи останню теорему, маємо:

$cos^2\alpha + cos^2 120° + cos^2 45° = 1,$

звідки

$cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$, тобто $cos\, \alpha = \pm\frac{1}{2}$.

Отже, умовам задачі задовольняють два вектори. Знайдемо їх координати. Різними будуть лише перші координати.

Для першого вектора:

$x_1 = \overline{| a |} \cdot cos\, \alpha_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$

Аналогічно, для другого вектора:

$x_2 = \overline{| a |} \cdot cos\, \alpha_2 = 6 \cdot (-\frac{1}{2}) = -3.$

Знайдемо інші координати:

$y = \overline{| a |} \cdot cos\, \beta = 6 \cdot cos\, 120° = 6 \cdot (-\frac{1}{2}) = -3;$

$z = \overline{| a |} \cdot cos\, \gamma = 6 \cdot cos\, 45° = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$

Отже, координати векторів такі:

$\overline{a_1} = (3; -3;\ 3\sqrt{2}),$ $\overline{a_2} = (-3; -3;\ 3\sqrt{2}).$

Із означення напрямних косинусів вектора випливає, що координата вектора додатна, якщо він утворює гострий кут з відповідною координатною віссю, і від'ємна, якщо цей кут тупий.

Зауваження Координатами одиничного вектора $\overline{e}$ є числа cosα, cosβ, cosγ:

$$\overline{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma).$$

Напрямні косинуси ненульового вектора однозначно визначають його напрям. Отже, вектор повністю характеризується своїми координатами.

1.8. Дії над векторами в координатах

Нехай вектори $\overline{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ і $\overline{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ задані своїми проекціями на осі координат Ox, Oy, Oz або

$$\overline{a} = a_x\cdot\overline{\imath} + a_y\cdot\overline{\gamma} + a_z\cdot\overline{\kappa}, \qquad \overline{b} = b_x\cdot\overline{\imath} + b_y\cdot\overline{\gamma} + b_z\cdot\overline{\kappa}.$$

• При додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати складаються (віднімаються):

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z).$$

Приклад Знайти суму й різницю векторів $\overline{a} = (-2;\ 3;\ 6)$ і $\overline{b} = (1;\ -2;\ 3)$.

Нехай

$$\overline{m} = \overline{a} + \overline{b}, \qquad \overline{n} = \overline{a} - \overline{b}.$$

Тоді $\overline{m} = (-1;\ 1;\ 9)$, $\overline{n} = (-3;\ 5;\ 3)$.

Приклад Знайти величину рівнодійної $\overline{F}$ двох сил $\overline{F}_1 = (10; 20; 30)$ і

$\overline{F}_2$ = (30; 20; 10).

$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

Знайдемо координати й модуль вектора $\overline{F}$:

$\overline{F}$ = (10 + 30; 20 + 20; 30 + 10), тобто $\overline{F}$ = (40; 40; 40).

$|\overline{F}| = \sqrt{40^2 + 40^2 + 40^2} = 40\sqrt{3}$.

- При множенні вектора на скаляр координати вектора множаться на цей скаляр:

$$\lambda \cdot \overline{a} = (\lambda \cdot a_x; \lambda \cdot a_y; \lambda \cdot a_z).$$

Приклад $\overline{a} = (3;\ -4;\ 6)$. Знайти координати вектора $2\overline{a}$.

Нехай $\overline{b} = 2\overline{a}$. Тоді $\overline{b} = (6;\ -8;\ 12)$.

Приклад Маємо вектори: $\overline{a}$ = (1; –2; 1), $\overline{b} = \left(\frac{1}{2};\ 1;\ 2\right)$, $\overline{c}$ = (2; 0; 2). Визначити координати вектора $\overline{m} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} - \frac{1}{2}\overline{c}$.

$\overline{a} + \overline{b} = \left(\frac{3}{2};\ -1;\ 3\right)$, $\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} = \left(\frac{3}{4};\ -\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, $\frac{1}{2}\overline{c} = (1;\ 0;\ 1)$.

Тоді $\overline{m} = (-\frac{1}{4};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$.

- Рівність векторів

Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ рівні тоді й тільки тоді, коли мають місце рівності:

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z.$$

- Колінеарність векторів

Оскільки $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то можна записати:

$$\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}, \text{ де } \lambda \text{ – деяке число.}$$

Звідси $a_x = \lambda \cdot b_x$, $a_y = \lambda \cdot b_y$, $a_z = \lambda \cdot b_z$,

тобто $\frac{a_x}{b_x} = \lambda$, $\frac{a_y}{b_y} = \lambda$, $\frac{a_z}{a_z} = \lambda$,

або $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{a_z}$.

Таким чином, проекції колінеарних векторів пропорційні.

Вірним є й зворотне твердження: вектори, які мають пропорційні координати, колінеарні.

Теорема Два вектори колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх однойменні координати пропорційні.

Зауваження Із означення добутку вектора на число випливає, що в разі однаково напрямлених векторів розглянутий коефіцієнт пропорційності є додатним числом, у разі протилежно напрямлених векторів – від'ємним.

Приклад Серед даних векторів знайти колінеарні: $\overline{a}$ = (1; –1; 4),

$\overline{b}$ = (2; –2; 8), $\overline{c}$ = (–3; 3; –12), $\overline{d}$ = (5; –5; 2).

Перевіримо пропорційність однойменних координат вектора $\overline{a}$ і по черзі решти векторів.

Для векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{8}{4} = 2.$$

Отже, ці вектори колінеарні.

Для векторів $\overline{a}$ і $\overline{c}$:

$$\frac{-3}{1} = \frac{3}{-1} = \frac{-12}{4} = -3.$$

Отже, ці вектори колінеарні.

Отже, і вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$ теж колінеарні.

Для векторів $\overline{a}$ і $\overline{d}$:

$$\frac{5}{1} = \frac{-5}{-1} \neq \frac{2}{4}.$$

Отже, ці вектори не колінеарні.

Крім того, враховуючи те, що в першому випадку коефіцієнт пропорційності (2) – додатне число, а в другому (–3) – від'ємне, можна уточнити, що вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є однаково напрямними, а вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$– протилежно напрямними.

<u>Приклад</u> Маємо вектор $\overline{a} = 4\cdot\overline{i} + 7\cdot\overline{j} - 4\cdot\overline{k}$. Знайти вектор, колінеарний вектору $\overline{a}$ і протилежного з ним напряму, якщо $|\overline{b}| = 27$.

Оскільки $\overline{a} = 4\cdot\overline{i} + 7\cdot\overline{j} - 4\cdot\overline{k}$, то $\overline{a} = (4; 7; -4)$.

Знайдемо його модуль:

$|\overline{a}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-4)^2} = 9.$

Оскільки відношення модулів векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює 3 ($27:9 = 3$) і ці вектори є протилежно напрямними, то, ураховуючи останнє зауваження, дістанемо, що у даних векторів координати пропорційні з коефіцієнтом –3, тобто

$\overline{b} = -3\cdot\overline{a}$.

Тоді координати вектора $\overline{b}$:

$\overline{b} = (4\cdot(-3);\ 7\cdot(-3);\ -4\cdot(-3))$, тобто $\overline{b} = (-12; -21; 12)$.

1.9. Координати точки, координати вектора

Нехай у просторі задано прямокутну декартову систему *Oxyz*.

<u>Означення</u> Для будь-якої точки *M* координати вектора $\overline{OM}$ називають *координатами точки M.*

Вектор $\overline{OM}$ називають *радіус-вектором точки M.*

Позначають: $\overline{r}$, тобто $\overline{OM} = \overline{r}$.

Отже, координати точки – це координати її радіус-вектора:

$$\overline{r} = (x; y; z),$$

або

$$\overline{r} = x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j} + z\cdot\overline{k}.$$

Координати точки *M* записують у вигляді: *M* (*x*; *y*; *z*).

A(2; 0; –2), B(5; –1; 3), C(2; 1; – 6).

Координати вектора

Координати вектора дорівнюють різницям відповідних координат його кінця й початку.

Якщо відомі координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Зауваження Формула $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ може прийняти вигляд:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Приклад Маємо координати точок $A(-4; 2; 0)$ і $B(0; -3; 2)$. Знайти координати вектора $\overline{AB}$.

Оскільки у вектора $\overline{AB}$ точка A – початок, а точка B – кінець, то $\overline{AB} = (0 + 4; -3 - 2;\ 2 - 0)$, тобто $\overline{AB} = (4;\ -5;\ 2)$.

Приклад Ракета з пункту M_1 *(10; –20; 0)* прямолінійно перемістилася в пункт M_2 *(–30; –50; 40)*, відстані задано в кілометрах. Знайти шлях l, здійснений ракетою.

Оскільки у вектора $\overline{M_1M_2}$ точка M_1 – початок, а точка M_2 – кінець, то, на підставі формули $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, маємо:

$$l = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(-30 - 10)^2 + (-50 + 20)^2 + (40 - 0)^2} =$$
$$= \sqrt{1600 + 900 + 1600} = \sqrt{4100} \approx 64,4 \text{ км}.$$

1.10. Найпростіші завдання в координатах

Відстань між двома точками

Якщо відомі координати точок $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то відстань між точками A і B – фактично, є $|\overline{AB}|$, тобто

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

У просторі для точок $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ така формула приймає вигляд:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Приклад Знайти відстань між точками $A(-1; -2)$ і $B(-4; 2)$.

На підставі формули $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ маємо:

$$AB = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Координати точки, що ділить даний відрізок у даному відношенні

Нехай маємо координати кінців відрізка M_1M_2 – $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ і відомо, що точка M ділить даний відрізок у відношенні λ, тобто

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

Тоді координати точки M обчислюються за формулою:

$$M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right).$$

У просторі для точок $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ця формула приймає вигляд:

$$M(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}).$$

Приклад Знайти координати точки M, що ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\frac{M_1M}{MM_2} = 2$, де $M_1(1; 1)$ і $M_2(4; 7)$.

На підставі формули $M(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda})$ маємо:

$M(\frac{1+2\cdot 4}{1+2};\ \frac{1+2\cdot 7}{1+2})$, тобто $M(3;\ 5)$.

Координати середини відрізка

Нехай маємо координати кінців відрізка M_1M_2 – $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ і відомо, що точка M є серединою даного відрізка.

Тоді координати точки M обчислюють за формулою:

$$M(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}).$$

Можна показати, що ця формула (10) є окремим випадком формули $M(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda})$.

Дійсно, якщо точка M є серединою даного відрізка, то

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Тоді за формулою $M(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda})$ маємо:

$$M(\frac{x_1+1\cdot x_2}{1+1};\ \frac{y_1+1\cdot y_2}{1+1}),\text{ тобто } M(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}).$$

У просторі для точок $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ така формула має вигляд:

$$M(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2};\ \frac{z_1+z_2}{2}).$$

Приклад Знайти координати точки K, середини відрізка M_1M_2, де $M_1(1; 1)$ і $M_2(4; 7)$.

На підставі формули $M(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2})$ маємо: $K(\frac{1+4}{2};\ \frac{1+7}{2})$, тобто $K(2{,}5;\ 4)$.

Приклад Маємо трикутник з вершинами *A(2; –1; 4), B(3; 2; –6), C(–5; 0; 2).* Обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини *A*.

Як відомо, медіана трикутника – це відрізок, що сполучає його вершину з серединою протилежної сторони.

Нехай *AK* – шукана медіана, тоді точка *K* – середина відрізка *BC*.

Знайдемо координати точки *K*:

$K(\frac{3-5}{2};\ \frac{2+0}{2};\ \frac{-6+2}{2})$, тобто $K(-1;\ 1;\ -2)$.

Тоді довжина медіани – це довжина відрізка *AK*:

$AK = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{9+4+36} = 7.$

Питання для самоконтролю

1. Які величини називають векторними, скалярними? Наведіть приклади.
2. Що таке вектор? Як його позначають?

3. Які вектори називають колінеарними?
4. Що таке компланарні вектори?
5. Що розуміють під сумою, різницею векторів?
6. Що називають добутком вектора на скаляр?
7. Які Ви знаєте властивості операції множення вектора на число?
8. Які вектори називають лінійно залежними, лінійно незалежними?
9. Як Ви розумієте проекцію точки на вісь?
10. Як Ви розумієте проекцію вектора на вісь?
11. Які існують основні властивості проекцій?
12. Назвіть дії над векторами в координатах.
13. Як можна визначити відстань між двома точками?
14. Як знайти координати точки, що ділить даний відрізок у даному відношенні?

Завдання для самостійного розв'язання

1. У трикутнику ABC відомо, що $\overline{\mathrm{AB}} = \bar{a}$, $\overline{\mathrm{AC}} = \bar{b}$, *точка M – середина сторони BC. Виразити вектор* $\overline{\mathrm{AM}}$ *через вектори* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$.

2. Задано вектори $\bar{a}, \bar{b}$. *Чи колінеарні вектори* $\bar{c} = \bar{a} - 2\sqrt{3}\bar{b}$ *та* $\bar{d} = -\sqrt{3}\bar{a} + 6\bar{b}$?

3. При яких значеннях λ *вектори* $2\lambda\bar{a}$ *та* $(\lambda^3 - 1)\,\bar{a}$ $(\bar{a} \neq \bar{0})$ *однаково напрямлені?*

4. При яких значеннях x вектори $x^3\bar{a}$ *та* $(x^2 - x - 2)\,\bar{a}$ $(\bar{a} \neq \bar{0})$ *протилежно напрямлені?*

5. Задано три послідовні вершини паралелограма: A(1; -2; 3), B(3; 2; 1), C(6; 4; 4). Знайти його четверту вершину.

6. Знайти координати вектора $\bar{a}$, *якщо відомо, що він протилежно напрямлений до вектора* $\bar{b} = 5\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 2\sqrt{2}\bar{k}$, *а його модуль дорівнює 5.*

7. Вектор $\bar{a}$ утворює *з осями Ox і Oy кути* $\alpha = 60^0$ *та* $\beta = 120^0$. *Знайти його координати, якщо* $|\bar{a}| = 2$.

8. При яких значеннях α *і* β *вектори* $\bar{a} = -2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \alpha\bar{k}$ *та* $\bar{b} = \beta\bar{\imath} - 6\bar{\jmath} + 2\bar{k}$ *колінеарні?*

9. Розкласти вектор $\bar{c} = (9;\ 4)$ *за векторами* $\bar{a} = (1; 2)$, $\bar{b} = (2;\ -3)$.

10. Представити вектор $\bar{d} = (4;\ 12;\ -3)$ *у вигляді лінійної комбінації векторів* $\bar{a} = (2;\ 3;\ 1)$, $\bar{b} = (5;\ 7; 0)$, $\bar{c} = (3;\ -2;\ 4)$.

11. На осі Oy знайти точку M, яка рівновіддалена від точок A(1; –4; 7) і B(5; 6; –5).

12. На осі Ox знайти точку M, відстань від якої до точки A(3; –3) дорівнює 5.

13. Задано вершини трикутника A(3; –1; 5), B(4; 2; – 5), C(– 4; 0; 3). Знайти довжину медіани, що проведена з вершини A.

14. Промінь утворює з осями координат кути в 60^0. *Під яким кутом він перетинає третю вісь?*

Відповіді

1. $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$. 2. *Так.* $\bar{d} = -\sqrt{3}\bar{c}$. 3. $(-\infty; 0) \cup (1;\ \infty)$.

4. $(-\infty; -1) \cup (0;\ 2)$. 5. *D(4; 0; 6).* 6. $\bar{a} = \frac{-25}{7}\bar{\imath} + \frac{20}{7}\bar{\jmath} - \frac{10\sqrt{2}}{7}\bar{k}$.

7. $\overline{a_1} = (1;\ -1;\ \sqrt{2})$, $\overline{a_2} = (1;\ -1;\ -\sqrt{2})$. 8. $\alpha = -1, \beta = 4$.

9. $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\,\bar{b}$. *10.* $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$. *11. (0; 1; 0). 12. (7; 0) та (–1; 0). 13. 7. 14.* 45^0.

ТЕМА 2. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

2.1. Означення скалярного добутку

Означення *Скалярним добутком* двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Позначають: $\bar{a}\cdot\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}$, $(\bar{a}, \bar{b})$.

Якщо кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює φ, тобто

$$\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}),$$

тоді

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi.$$

Приклад Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, знаючи, що вони утворюють кут $\varphi = 60°$, $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 2$.

На підставі попередньої формули маємо:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi = 6\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 6.$$

Формулу $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi$ можна записати інакше. Оскільки

$$|\bar{a}|\cdot\cos\varphi = np_{\bar{b}}\,\bar{a},$$

а

$$|\bar{b}|\cdot\cos\varphi = np_{\bar{a}}\,\bar{b},$$

тоді маємо:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\,\bar{a},$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію іншого на вісь, що має однаковий напрям з першим вектором.

2.2. Властивості скалярного добутку

1. Скалярний добуток двох векторів не залежить від порядку співмножників: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ (*переставна властивість*).

2. $(\lambda\,\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda\cdot(\bar{a}\bar{b})$ (*сполучна властивість відносно скалярного множника).*

3. $\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$ (*розподільна властивість),* тобто при скалярному множенні суми векторів на вектор можна «розкрити дужки».

Із даних властивостей і властивостей лінійних операцій над векторами випливає, що вектори можна перемножувати скалярно як многочлени.

4. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\bar{a}^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2.$$

Зауваження $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1.$

Зауваження Якщо вектор $\overline{a}$ піднести скалярно до квадрату й потім добути корінь, то отримуємо вектор модуля $|\overline{a}|$, тобто

$$\sqrt{\overline{a}^2} = |\overline{a}|.$$

Приклад Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = 120°$. Відомо, що $|\overline{a}| = 11$, $|\overline{b}| = 2$, обчислити: $(2\overline{a} + 3\overline{b})\cdot(2\overline{a} - \overline{b})$.

$(2\overline{a} + 3\overline{b})\cdot(2\overline{a} - \overline{b}) = 4\overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + 6\overline{a}\overline{b} - 3\overline{b}^2 = 4\overline{a}^2 + 4\overline{a}\overline{b} - 3\overline{b}^2$.

Оскільки

$\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2 = 121$, $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2 = 4$,

$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 120° = 11\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -11$,

тоді

$(2\overline{a} + 3\overline{b})\cdot(2\overline{a} - \overline{b}) = 4\cdot 121 + 4\cdot(-11) - 3\cdot 4 = 428$.

5. Якщо ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні (ортогональні), то їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\overline{a}\perp\overline{b}\text{ , тоді } \overline{a}\overline{b} = 0.$$

Справедливим є й зворотне твердження.

Теорема Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні (ортогональні) тоді й тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Це твердження є справедливим, коли хоча б один з векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ нульовий.

Зауваження $\overline{i}\cdot\overline{j} = \overline{j}\cdot\overline{k} = \overline{k}\cdot\overline{i}$.

2.3. Вираз скалярного добутку векторів через їхні координати

Нехай маємо два вектори:

$$\overline{a} = a_x\cdot\overline{i} + a_y\cdot\overline{j} + a_z\cdot\overline{k}, \qquad \overline{b} = b_x\cdot\overline{i} + b_y\cdot\overline{j} + b_z\cdot\overline{k}.$$

Знайдемо скалярний добуток векторів, перемножуючи їх як многочлени та користуючись таблицею скалярного добутку векторів $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$:

	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	1	0	0
$\overline{j}$	0	1	0
$\overline{k}$	0	0	1

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Отже, скалярний добуток векторів дорівнює сумі парних добутків їхніх однойменних координат.

Приклад

Якщо $\overline{a} = (2; -1; 3)$, $\overline{b} = (1; 0; 5)$, то $\overline{a}\cdot\overline{b} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 5 = 17$.

2.4. Деякі застосування скалярного добутку

Знаходження кута (його косинуса) між векторами

Визначення кута φ між ненульовими векторами $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|},$$

тобто

$$cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Приклад

Визначити косинус кута φ між векторами $\overline{a} = (1; 2; 3)$ *і* $\overline{b} = (-3; 2; -1)$.

$\overline{a}\cdot\overline{b} = 1\cdot(-3) + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) = -2$,

$|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$,

$|\overline{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$,

$cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}$.

Приклад Маємо трикутник із вершинами *A(–2; 3; 1), B(–2; –1; 4), C(–2; –4; 0)*. Визначити його внутрішній кут при вершині С.

$cosC = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}|\cdot|\overline{CA}|}$,

$\overline{CB} = (0; 3; 4)$, $\quad |\overline{CB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$,

$\overline{CA} = (0; 7; 1)$, $\quad |\overline{CA}| = \sqrt{0^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

$\overline{CB}\cdot\overline{CA} = 0\cdot 0 + 3\cdot 7 + 4\cdot 1 = 25$, тоді

$cosC = = \frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, отже $\angle C = 45°$.

Звідси випливає умова перпендикулярності ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{a}\perp\overline{b} \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Приклад Перевірити, чи є ортогональними вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a} = (3; 1; -1)$ і $\overline{b} = (1; -4; 2)$.

Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$\overline{a}\cdot\overline{b} = 3\cdot 1 + 1\cdot(-4) + (-1)\cdot 2 = -3$.

Оскільки $\overline{a}\cdot\overline{b} \neq 0$, то вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ не є ортогональними.

Знаходження проекції вектора на заданий напрям

Знаходження проекції вектора $\overline{a}$ на напрям, заданий вектором $\overline{b}$, може здійснюватися за формулою:

$$пр_{\bar b}\,\bar a = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar b|} \text{ або } пр_{\bar a}\,\bar b = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar a|},$$

тобто

$$пр_{\bar b}\,\bar a = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Приклад Маємо три вектори $\bar a = (1; -4; 8)$, $\bar b = (4; 4; -2)$, $\bar c = (2; 3; 6)$. Знайти проекцію вектора $\bar b + \bar c$ на вектор $\bar a$.

$пр_{\bar a}(\bar b + \bar c) = \frac{(\bar b + \bar c)\cdot \bar a}{|\bar a|}$.

Знайдемо координати вектора $\bar b + \bar c$:

$\bar b + \bar c = (6; 7; 4)$.

$(\bar b + \bar c)\cdot \bar a = 6 \cdot 1 + 7 \cdot (-4) + 4 \cdot 8 = 10$.

$|\bar a| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2} = 9$.

$пр_{\bar a}(\bar b + \bar c) = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

2.5. Економічний зміст скалярного добутку. Простір товарів. Вектор цін.

Під *товаром* розуміють деяку продукцію або послугу, яка надходить на ринок для продажу в певний час у певному місці. Вважатимемо, що маємо n різних товарів. Обсяг *i-го* товару позначимо через x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора $\bar x = (x_1; x_2; ...; x_n)$. З економічних міркувань розглядатимемо лише такі набори товарів, у яких компоненти $x_i \geq 0$ для всіх $i = 1, 2, ..., n$. Множину всіх наборів товарів називають *простором товарів С*.

Уважаємо, що кожен товар має певну *ціну*. Всі ціни строго додатні. Нехай ціна одиниці *i-го* товару становить p_i, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді вектор $\bar p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ називають *вектором цін.*

Для набору товарів $\bar x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ розглянемо вектор відповідних цін $\bar p = (p_1, p_2, ..., p_n)$.

Скалярний добуток цих векторів: $\bar p \cdot \bar x = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ є числом, яке визначає ціну набору товарів і позначається $c(\bar x)$.

Індекс споживчих цін характеризує зміни у часі загального рівня цін на товари та послуги, які купує населення для невиробничого споживання. Введемо позначення $\bar q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ – вектор обсягу споживчих товарів**.** Тоді *індексом цін* (у відсотках) називають величину, яку обчислюють за формулою:

$p = \frac{\bar c \cdot \bar q}{\overline{c_n} \cdot \bar q} 100$, де $\bar c = (c_1; c_2; ... ; c_k)$ – вектор цін у поточному місяці, $\overline{c_n} = (c_1, c_2, ... , c_n)$ – вектор цін у попередньому місяці.

Звідси $100 \cdot \bar c \cdot \bar q = p \cdot \overline{c_n} \cdot \bar q$ або $(100 \cdot \bar c - p \cdot \overline{c_n}) \cdot \bar q = 0$, тобто індекс можна визначати як числовий коефіцієнт p, який робить вектор $\bar q$ перпендикулярним до вектора $(100 \cdot \bar c - p \cdot \overline{c_n})$.

Індекс інфляції обчислюють за формулою:

$i = p - 100$ або $i = \frac{\bar c \cdot \bar q}{\overline{c_n} \cdot \bar q} 100 - 100.$

Приклад Витрати фірми на ресурси, які використовуються для виготовлення одиниці продукції задано в таблиці:

Ресурси	Кількість	Вартість
Сировина першого виду	200 кг	3 у.о. / кг
Сировина другого виду	500 $м^2$	5 у.о. / кг
Витрати праці	0,65 людино-год	10 у.о. / людино-год
Обладнання	0,7 машино-год	15 у.о. / машино-год

Визначити ціну всіх ресурсів, що використовуються фірмою для виготовлення одиниці продукції.

Введемо вектор витрат ресурсів на одиницю продукції $\bar{x} = (200; 500; 0{,}65; 0{,}7)$ та вектор цін одиниць відповідних ресурсів $\bar{p} = (3; 5; 10; 15)$. Вартість усіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, буде скалярним добутком векторів $\bar{x}$ та $\bar{p}$. Тому

$$c(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{p} = 200 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 0{,}65 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 15 = 3117 \text{ (у.о.)}.$$

Приклад Комерційний банк, що бере участь у будівництві багатоповерхових будинків на одному з масивів міста, одержав кредити від трьох комерційних банків. Кожен з них надав кредити в розмірі *200, 300, 400* тис. у.о. під річні процентні ставки *40, 25 і 30 %*. Визначимо, яку суму треба заплатити за кредити наприкінці року.

Розглянемо вектор кредитів і вектор процентних ставок. Простим розрахунком керівник комерційного банку може визначити, скільки потрібно заплатити наприкінці року за кредити, взяті в банків:

$$c(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{p} = 200 \cdot 1{,}4 + 300 \cdot 1{,}25 + 400 \cdot 1{,}3 = 1175 \text{ тис. (у.о.)}.$$

Приклад (індекс цін та індекс інфляції)

Визначити індекс цін та індекс інфляції через розрахунок вартості «споживчого кошика», який складається з 300 видів товарів і послуг, для індексів цін певного місяця, що наведено в таблиці.

Вид товару	Обсяг товару	Ціна одиниці товару в поточному місяці	Витрати споживачів у поточному місяці	Ціна одиниці товару в попередньому місяці	Витрати споживачів у попередньому місяці
A	3	4000	12000	3500	10500
B	10	2000	20000	1800	18000
C	2	4000	8000	4500	9000
Загальні витрати:	-	-	40000	-	37500

Введемо вектор обсягу споживчих товарів $\bar{q} = (3; 10; 2)$, вектор цін у поточному місяці $\bar{c} = (4000; 2000; 4000)$, вектор цін у попередньому місяці

$\overline{c_n} = (3500; 1800; 4500)$.

Розрахуємо індекс цін. Для цього обчислимо скалярні добутки:

$\bar{c} \cdot \bar{q} = 3 \cdot 4000 + 10 \cdot 2000 + 2 \cdot 4000 = 40000;$

$\overline{c_n} \cdot \bar{q} = 3 \cdot 3500 + 10 \cdot 1800 + 2 \cdot 4500 = 37500.$

Тепер перейдемо до індексу інфляції.

p = 40000 : 37500 · 100 % = 106,7 %.
$i = p$ – 100 % = 106,7 % – 100 % = 6,7 %.
Таким чином, індекс інфляції становить 6,7 %.

Питання для самоконтролю

1. *Що називають скалярним добутком? Яка формула скалярного добутку?*
2. *Назвіть властивості скалярного добутку.*
3. *Якщо два вектори взаємно перпендикулярні, який тоді їхній скалярний добуток?*
4. *Як виразити скалярний добуток векторів через координати?*
5. *Як знайти кут між векторами?*
6. *Як знайти проекцію вектора на заданий напрям?*
7. *У чому полягає економічний зміст скалярного добутку?*

Завдання для самостійного розв'язання

1. Вектори $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *утворюють кут* $\varphi = \frac{2\pi}{3}$*. Відомо, що* $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$, *обчислити* $(\bar{a} + 2\bar{b})(3\bar{a} - \bar{b})$.

2. Відомо, що $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, *кут між векторами* $\varphi = \frac{\pi}{3}$*. Знайти модуль вектора* $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$.

3. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = 2\cdot\bar{i} + \bar{j}$ *та* $\bar{b} = -\bar{j} + 2\bar{k}$.

4. Знайти вектор $\bar{x}$*, якщо* $\bar{x} \perp \bar{a}$, $\bar{a}$ *= (1; 0; 1),* $\bar{x} \perp \bar{b}$, $\bar{b}$ *= (0; 2; – 1), проекція вектора* $\bar{x}$ *на вестор* $\bar{c}$ *= (1; 2; 2) дорівнює 1.*

5. Відомо вершини трикутника A(2; 3; – 1), B(4; 1; – 2), C(1; 0; 2). Знайти внутрішній кут при вершині C, проекцію вектора $\overline{CB}$ *на вектор* $\overline{CA}$.

6. Задано вектори $\bar{a}$ *= (3; – 6; – 1),* $\bar{b}$ *= (1; 4; – 5),* $\bar{c}$ *= (3; – 4; 12). Знайти* $\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b})$.

7. Задано некомпланарні вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$*. Відомо, що* $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 1$, $|\bar{c}| = 4$, $\bar{a} \perp \bar{b}$*, кут між векторами* $\bar{c}$ *і* $\bar{a}$ *дорівнює* 60^0*, кут між векторами* $\bar{c}$ *і* $\bar{b}$ *дорівнює* 60^0*. Знайти* $(\bar{a} - 2\bar{b})(\bar{c} - \bar{a})$; $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2$.

8. Задано вектори $\bar{a}$ *= (1; – 3; 4),* $\bar{b}$ *= (3; –4; 2),* $\bar{c}$ *= (–1; 1; 4). Знайти* $\text{пр}_{\bar{c}+\bar{b}}\,\bar{a}$.

9. У трикутнику ABC відомо, що $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$*. Виразити вектор* $\bar{h}$*, напрямлений по висоті AH через вектори* $\bar{b}$ *і* $\bar{c}$.

10. Одиничні вектори $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{0}$*. Знайти* $\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_3\,\bar{e}_1$.

Відповіді

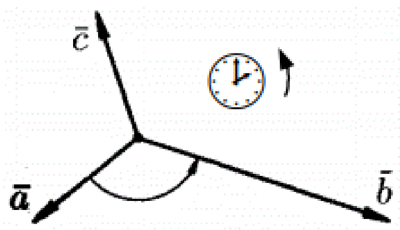
1. 242. *2.* $\sqrt{13}$. *3.* $\frac{\pi}{2}$. *4.* $\frac{-3}{2}\bar{i} + \frac{3}{4}\bar{j} + \frac{3}{2}\bar{k}$. *5.* $cos\varphi = \frac{9\sqrt{494}}{247}, \frac{18\sqrt{19}}{19}$.

6. – 4. *7. – 3; 26.* *8. 5.* *9.* $\bar{h} = \bar{b} + \frac{\bar{b}(\bar{b}-\bar{c})}{|\bar{c}-\bar{b}|^2}(\bar{c} - \bar{b})$. *10. – 1,5.*

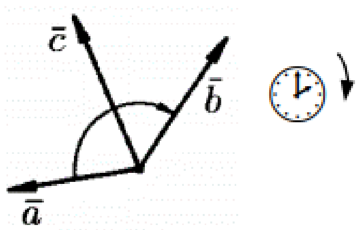
ТЕМА 3. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

3.1. Означення векторного добутку

Означення Три некомпланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, узяті в указаному порядку, *утворюють праву трійку*, якщо з кінця третього вектора $\overline{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\overline{a}$ до другого вектора $\overline{b}$ видно таким, що здійснюється проти годинникової стрілки, і *ліву трійку,* – якщо по годинниковій.

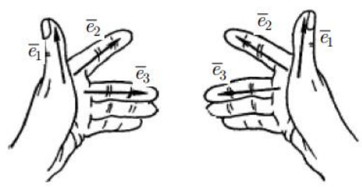


Права трійка векторів



Ліва трійка векторів

Приклад



Таким чином, трійка векторів є правою або лівою, якщо вона орієнтована за правилом правого гвинта або відповідно за правилом лівого гвинта.

Зауваження якщо в трійці некомпланарних векторів переставити два вектори, то вона змінить свою орієнтацію, тобто з правої зробиться лівою або навпаки.

Праву трійку вважають *стандартною*.

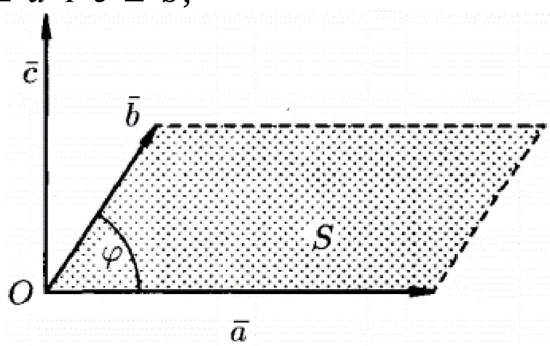
Означення *Векторним добутком* вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ на вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ називають вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$, який:

1) перпендикулярний векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$, тобто $\overline{c} \perp \overline{a}$ і $\overline{c} \perp \overline{b}$;

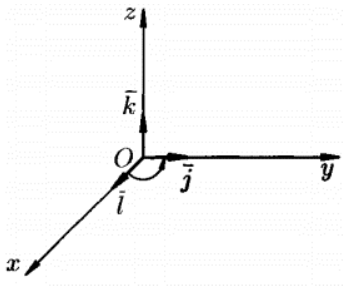
2) має модуль, який чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах, тобто

$$|\overline{c}| = |\,\overline{a}\,|\cdot|\,\overline{b}\,|\cdot sin\varphi\,;$$

3) вектори утворюють праву трійку.



Векторний добуток позначається: $\overline{a} \times \overline{b}$ або $[\overline{a}, \overline{b}]$.



З а у в а ж е н н я Із означення векторного добутку випливають співвідношення між ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \qquad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \qquad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

3.2. Властивості векторного добутку

1. При перестановці співмножників векторний добуток змінює знак:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}).$$

Отже, для векторного добутку не характерна переставна властивість.

2. Для векторного добутку характерна *сполучна властивість відносно скалярного множника*, тобто

$$\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}).$$

3. Для векторного добутку характерна *розподільна властивість відносно додавання:*

$$(\bar{a} + \bar{b})\times \bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

4. Два ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору, тобто

$$\bar{a}\|\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}.$$

5. $\bar{a}\times\bar{a} = \bar{0}$

(добуток $\bar{a} \times \bar{a}$ ще називають *векторним квадратом вектора* $\bar{a}$).

Таким чином, векторний квадрат дорівнює нуль-вектору.

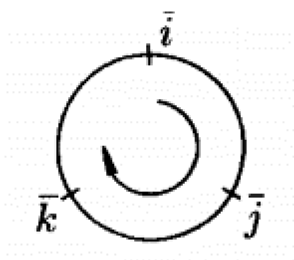
З а у в а ж е н н я $\bar{i}\times\bar{i} = \bar{j}\times\bar{j} = \bar{k}\times\bar{k} = \bar{0}$.

3.3. Вираз векторного добутку через координати векторів-множників

Будемо використовувати таблицю векторного добутку векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Щоб не помилитися із знаком, зручно користуватися схемою: якщо напрям найкоротшого шляху від першого вектора до другого співпадає з напрямом стрілки, то векторний добуток дорівнює третьому вектору, якщо не співпадає – третій вектор береться із знаком «мінус».



Нехай маємо два вектори:

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}, \qquad \overline{b} = b_x \cdot \overline{i} + b_y \cdot \overline{j} + b_z \cdot \overline{k}.$$

Знайдемо векторний добуток цих векторів, перемножуючи їх як многочлени (згідно властивостей векторного добутку):

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_z & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overline{k}.$$

З а у в а ж е н н я Одержану формулу можна записати коротше, у вигляді визначника третього порядку:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

П р и к л а д Знайти векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a} = (7; 5; -1)$ і $\overline{b} = (-6; 0; 1)$.

Скористаємося останнім зауваженням:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 7 & 5 & -1 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\overline{i} - \overline{j} + 30\overline{k}.$$

Отже,

$\overline{a} \times \overline{b} = (5; -1; 30)$.

3.4. Застосування векторного добутку

К о л і н е а р н і с т ь в е к т о р і в

Якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, тоді $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$, і навпаки, тобто

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overline{0}, \text{ тоді } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{a_z}, \text{ отже } \overline{a} \parallel \overline{b}.$$

П р и к л а д Перевірити, чи вектори $\overline{a} = (-2; 1; 2)$ і $\overline{b} = (-4; 2; 4)$ колінеарні?

Знайдемо векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0\overline{i} + 0\overline{j} + 0\overline{k}.$$

Отже

$\overline{a} \times \overline{b} = (0; 0; 0) = \overline{0}$.

Отже, вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є колінеарними.

З н а х о д ж е н н я п л о щ і п а р а л е л о г р а м а й п л о щ і т р и к у т н и к а

Згідно означенню векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi,$$

тобто

$$S_{пар} = |\overline{a} \times \overline{b}|.$$

Отже,

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\,|\overline{a}\times\overline{b}|.$$

<u>Приклад</u> Знайти площу трикутника з вершинами *A(1; 1; 0), B(1; 0; 1), C(0; 1; 1).*

Запишемо останню формулу у вигляді:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\overline{AB}\times\overline{AC}|.$

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = (0; -1; 1)$, $\overline{AC} = (-1; 0; 1)$.

Знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}.$$

Отже,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\overline{AB}\times\overline{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

Визначення кута (синуса) між векторами

Із означення векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$

$$|\overline{a}\times\overline{b}| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot \sin\varphi$$

маємо:

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{a}\times\overline{b}|}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

<u>Приклад</u> Визначити синус кута φ між векторами $\overline{a}$ *= (1; 2; 3)* і $\overline{b}$ *= (–3; 2; –1).*

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8\overline{i} - 8\overline{j} + 8\overline{k}.$$

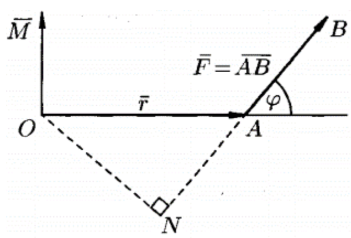
$|\overline{a}\times\overline{b}\,| = \sqrt{(-8)^2+(-8)^2+8^2} = \sqrt{64\cdot 3} = 8\sqrt{3}.$

$|\overline{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}.$

$|\overline{b}| = \sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{14}.$ Тоді

$\sin\varphi = \frac{|\overline{a}\times\overline{b}|}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$

Визначення моменту сили відносно точки



Нехай у точці *A* прикладена сила $\overline{F} = \overline{AB}$, *O* – деяка точка простору.

Із курсу фізики відомо, що *моментом сили* $\overline{F}$ відносно точки *O* називається вектор $\overline{M}$, який проходить через точку *O*, крім того:

1) перпендикулярний площині, що проходить через

точки O, A, B;

2) чисельно дорівнює добутку сили на плече (відстань від точки O до прямої, на якій зображений вектор сили $\overline{F}$), тобто

$$\left|\overline{M}\right| = |\overline{F}|\cdot|\overline{r}|\cdot sin\varphi,$$

де $\overline{r} = \overline{OA}$ – радіус-вектор точки прикладання сили $\overline{F}$;

3) утворює праву трійку з векторами $\overline{OA}$ і $\overline{AB}$.

Отже,

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F},$$

тобто момент сили $\overline{F}$ відносно деякої точки O є векторний добуток сили $\overline{F}$ на радіус-вектор $\overline{r}$ точки прикладання сили $\overline{F}$.

У цьому полягає фізичний зміст векторного добутку.

<u>Приклад</u>

Визначити момент прикладеної до точки $A(1;\ 5;\ 0)$ сили $\overline{F} = (2; -4; 3)$ відносно точки $B(0; 0; 0)$.

$\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{F}$.

$\overline{BA} = (1; 5; 0)$.

Тоді

$$\overline{BA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 15\overline{i} - 3\overline{j} - 14\overline{k},$$

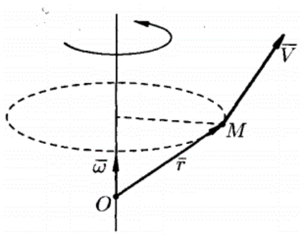
тобто $\overline{M} = (15; -3; -14)$.

Визначення лінійної швидкості обертання

Швидкість $\overline{v}$ точки M твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\overline{\varpi}$ навколо нерухомої осі, визначається *формулою Ейлера:*

$$\overline{v} = \overline{\varpi} \times \overline{r},$$

де $\overline{r} = \overline{OM}$, O – деяка нерухома точка осі.



Питання для самоконтролю

1. *Що Ви розумієте під правою трійкою векторів, лівою трійкою векторів?*
2. *Дайте означення векторного добутку векторів.*
3. *Які Ви знаєте співвідношення між ортами трьох векторів при векторному добутку?*
4. *Назвіть властивості векторного добутку.*
5. *Як можна виразити векторний добуток через координати векторів-множників?*
6. *Як дослідити вектори на колінеарність за допомогою векторного добутку?*
7. *Як знайти площу паралелограма та площу трикутника через векторний добуток?*
8. *За допомогою якої формули (із застосуванням векторного добутку) можна*

визначити кут між векторами?

Завдання для самостійного розв'язання

1. Задано вектори $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$*, для яких* $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 6$*, кут між векторами дорівнює* $\frac{5\pi}{6}$*. Знайти* $\overline{a} \times \overline{b}$*;* $|(2\overline{a} + 3\overline{b}) \times (\overline{a} - 4\overline{b})|$.

2. Знайти координати вектора $\overline{a} \times (2\overline{a} + \overline{b})$*, якщо* $\overline{a} = (3;\ -1;\ -2)$, $\overline{b} = (1;\ 2;\ -1)$.

3. Задано вектори $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = -2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$*. Знайти* $\overline{c} = (\overline{a} - \overline{b}) \times (2\overline{b})$*, а також його модуль.*

4. Відомо, що $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$*, кут між векторами дорівнює* $\frac{2\pi}{3}$*. Знайти* $|\overline{a} \times \overline{b}|$*;* $|(\overline{a} + 2\overline{b}) \times (-\overline{a} + 3\overline{b})|$.

5. Знайти площу трикутника з вершинами A(1; 2; 0), B(3; 2; 1), C(– 2; 1; 2).

6. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = 5\overline{j} - 7\overline{k}$.

7. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах якщо $\overline{a} = (8;\ 4;\ 1)$, $\overline{b} = (2;\ -2;\ 1)$.

8. Вектори $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ *утворюють кут* 45^0*. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах* $\overline{a} - 2\overline{b}$ *та* $3\overline{a} + 2\overline{b}$.

9. Сила $\overline{F} = (2;\ -4;\ 5)$ *прикладена до точки O(0; 2; 1). Визначити момент цієї сили відносно точки A(– 1; 2; 3).*

10. Спростити вирази:

a. $2\overline{i}\,(\overline{j} \times \overline{k}) + 3\overline{j}(\overline{i} \times \overline{k}) + 4\overline{k}(\overline{i} \times \overline{j})$;

b. $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) \times \overline{c} + (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) \times \overline{b} + (\overline{b} - \overline{c}) \times \overline{a}$;

c. $(3\overline{i} - 4\overline{j} - 5\overline{k}) \times (2\overline{i} + 6\overline{j} - \overline{k})$.

Відповіді

1. $6\overline{e}$*, де* $\overline{e}$ *– одиничний вектор, що однаково напрямлений з вектором* $\overline{a} \times \overline{b}$*; 66.*

2. (5; 1; 7). 3. (10; 10; 10); $10\sqrt{3}$*. 4.* $\sqrt{3}$*;* $5\sqrt{3}$*. 5.* $\frac{3\sqrt{6}}{2}$*. 6.* $\sqrt{195}/2$*.*

7. $18\sqrt{2}$*. 8.* $50\sqrt{2}$*. 9.* $\overline{M} = (8;\ 9;\ 4)$*. 10a. 3; 10b.* $2(\overline{a} \times \overline{c})$*;*

10c. $(34\overline{i} - 7\overline{j} + 26\overline{k})$.

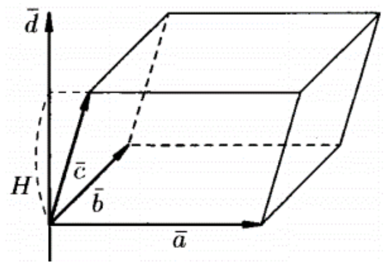
ТЕМА 4. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

4.1. Означення мішаного добутку, його геометричний зміст

Розглянемо добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, складений таким чином: перші два вектори перемножуються векторно, а їх результат – скалярно на третій вектор, тим самим визначається число $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$. Такий добуток називається *векторно-скалярним* або *мішаним добутком* трьох векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Скорочено змішаний добуток $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ позначатимемо $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ або $(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$.

З'ясуємо геометричний зміст виразу $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.



Нехай дані вектори $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ не компланарні. Побудуємо паралелепіпед на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ як на ребрах. Векторний добуток $\overline{a}\times\overline{b}$ є вектор $\overline{d}$, який чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, і напрямлений перпендикулярно до площини паралелограма. Скалярний добуток $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ є добуток модуля вектора $\overline{d}$ і проекції вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{d}$. Абсолютна величина цієї проекції – висота побудованого паралелепіпеда.

Отже, добуток $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ по абсолютній величині дорівнює добутку площі основи паралелепіпеда на його висоту, тобто об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$.

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, узятому із знаком «плюс», якщо ці вектори утворюють праву трійку векторів, і зі знаком «мінус», якщо вони утворюють ліву трійку векторів.

4.2. Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток не міняється при циклічній (круговій) перестановці його співмножників, тобто

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b}.$$

Дійсно, у цьому випадку не змінюється об'єм паралелепіпеда, а також орієнтація його ребер.

2. Мішаний добуток змінює свій знак при переміні місцями двох сусідніх векторів-співмножників, тобто

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\,\overline{a}\overline{c}\overline{b}, \qquad \overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\,\overline{b}\overline{a}\overline{c}, \qquad \overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\,\overline{c}\overline{b}\overline{a}.$$

Дійсно, така перестановка рівносильна перестановці співмножників у векторному добутку, що міняє в добутку знак.

3. Мішаний добуток ненульових векторів $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли вони – компланарні.

Таким чином, необхідною й достатньою умовою компланарності векторів $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0.$$

4.3. Вираз мішаного добутку через координати векторів-множників

Нехай маємо вектори

$$\overline{a} = a_x\cdot\overline{i} + a_y\cdot\overline{j} + a_z\cdot\overline{k}, \quad \overline{b} = b_x\cdot\overline{i} + b_y\cdot\overline{j} + b_z\cdot\overline{k}, \quad \overline{c} = c_x\cdot\overline{i} + c_y\cdot\overline{j} + c_z\cdot\overline{k}.$$

Як уже було з'ясовано,

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} a_z & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\overline{k}.$$

Використовуючи формулу для обчислення скалярного добутку векторів по їх координатах, маємо:

$$(\overline{a} \times \overline{b})\cdot\overline{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_z & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z$$

або

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Отже, мішаний добуток векторів дорівнює визначнику третього порядку, складеному з координат векторів-множників.

<u>Приклад</u> Маємо три вектори $\overline{a}$ = *(2; –3; 1)*, $\overline{b} =$ *(1; 1; 2)*, $\overline{c}$ = *(3; 1; –1)*. Знайти мішаний добуток цих векторів.

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -29.$$

4.4. Деякі застосування мішаного добутку

Визначення взаємної орієнтації векторів у просторі

Визначення взаємної орієнтації векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ засноване на таких міркуваннях:

якщо $\overline{a}\overline{b}\overline{c} > 0$, то $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – права трійка;

якщо $\overline{a}\overline{b}\overline{c} < 0$, то $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – ліва трійка.

Установлення компланарності векторів

Ненульові вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні тоді й тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0,$$ отже вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні.

<u>Приклад</u> Задано три вектори $\overline{a}$ = *(1; –3; 1)*, $\overline{b}$ = *(–3; 8; 0)*, $\overline{c}$ = *(4; 8; 5)*. З’ясувати, чи є означені вектори компланарними.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -61.$$

Оскільки мішаний добуток $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \neq 0$, то такі вектори – не компланарні.

Визначення об’ємів паралелепіпеда й трикутної піраміди

Можна показати, що об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, обчислюється за формулою:

$$V = |\overline{a}\overline{b}\overline{c}|,$$

а об’єм трикутної піраміди, побудованої на цих векторах, дорівнює:

$$V = \frac{1}{6}|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|.$$

Приклад Обчислити об’єм трикутної піраміди, вершини якої знаходяться в точках *A (2; –1; –1), B (5; –1; 2), C (3; 0; –3), D (6; 0; –1).*

Цю піраміду задають будь-які три вектори, які виходять з однієї вершини паралельно до ребер піраміди, наприклад $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Тоді об’єм піраміди можна обчислити за формулою:

$V = \frac{1}{6}|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}|$.

Знайдемо мішаний добуток перерахованих векторів.

Для цього заздалегідь знайдемо їх координати:

$\overline{AB} = (3; 0; 3)$, $\overline{AC} = (1; 1; -2)$, $\overline{AD} = (4; 1; 0)$.

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$. Тоді об’єм піраміди: $V = \frac{1}{6}|-3| = \frac{1}{2}$.

Питання для самоконтролю

1. *Сформулюйте означення мішаного добутку трьох векторів.*
2. *У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?*
3. *Сформулюйте властивості мішаного добутку.*
4. *Як можна виразити мішаний добуток через координати векторів-множників?*
5. *Як за допомогою мішаного добутку можна визначити взаємну орієнтацію векторів у просторі?*
6. *Як за допомогою мішаного добутку можна установити компланарність векторів?*
7. *Назвіть формули визначення об’ємів паралелепіпеда й трикутної піраміди.*

Завдання для самостійного розв'язання

1. *Довести, що чотири точки* $A_1(3; 5; 1)$, $A_2(2; 4; 7)$, $A_3(1; 5; 3)$, $A_4(4; 4; 5)$ *лежать в одній площині.*
2. *Перевірити на компланарність вектори:*

a. $\bar{a} = (1; 2; -2), \bar{b} = (1; -2; 1), \bar{c} = (5; -2; -1)$;

b. $\bar{a} = \bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = \bar{j} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{i}$.

3. *При якому значенні* λ *вектори* $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \lambda\bar{k}$, $\bar{b} = (0; 1; 0)$ *і* $\bar{c} = (3; 0; 1)$ *компланарні?*
4. *Задано вершини піраміди A(5; 1; – 4), B(1; 2; – 1), C(3; 3; – 4), S(2; 2; 2). Знайти довжину висоти, проведеної із вершини S на грань ABC.*
5. *Обчислити* $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c})$.
6. *Обчислити* $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a})$.
7. *Обчислити* $\bar{a}(\bar{b} - \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c})$.
8. *Яку трійку утворюють вектори* $\bar{a}, \bar{b}$ *і* $\bar{c}$:

a. $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j}, \bar{c} = \bar{k}$.

b. $\bar{a} = (1; -4; 0), \bar{b} = (6; 3; -2), \bar{c} = (1; -2; 2)$.

9. Вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ *і* $\overline{\mathrm{c}}$ *взаємо перпендикулярні, утворюють праву трійку. Знайти* $\overline{a}\overline{b}\overline{\mathrm{c}}$*, якщо* $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 3$.

10.Задано вектори $\bar{a} = (3;\ 5;\ -1), \bar{b} = (0; -2;\ 1), \bar{c} = (-2;\ 2;\ 3)$.
Знайти $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \bar{c}$.

Відповіді

1. Показати, що три вектори, які мають початок в одній із точок, наприклад, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ *компланарні.*

2. а) так; b) ні. *3.* $\frac{1}{3}$. *4.* $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. *5.* $-4\overline{a}\overline{b}\overline{\mathrm{c}}$. *6. 0.* *7.* $3\overline{a}\overline{b}\overline{\mathrm{c}}$.

8. а) ліву; b) праву. *9. 24.* *10. (3; 3; 0).*

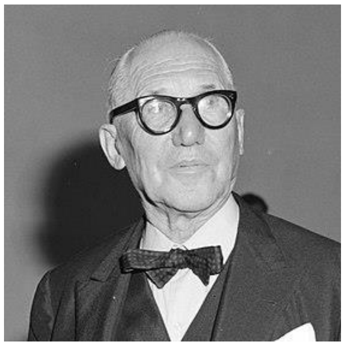
РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Цікаво знати Аналітична геометрія – розділ геометрії, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь) установлюються засобами алгебри за допомогою методу координат, тобто шляхом дослідження властивостей рівнянь, які визначають ці об'єкти.

Основні положення аналітичної геометрії (у т. ч. прямокутну систему координат) уперше сформулював філософ і математик Рене Декарт ще в 1637 році.

Готфрід Лейбніц, Ісаак Ньютон і Леонард Ейлер надали аналітичній геометрії сучасну структуру, що дозволяє досліджувати геометричні об'єкти за допомогою алгебраїчних методів.

«Усе навколо – геометрія» (Ле Корбюзьє (1887 – 1965 рр.) – французький архітектор і теоретик архітектури.



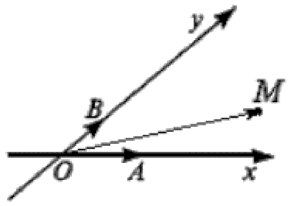
ТЕМА 1. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

1.1. Основні поняття

Означення *Під системою координат на площині* розуміють спосіб, що дозволяє чисельно описати положення точки на площині.

Розглянемо два неколінеарні вектори, які прикладені до спільного початку – точки O.

Означення Будь-якій точці M площини AOB поставимо у відповідність вектор $\overline{OM}$, який називають *радіусом-вектором* точки M.



Оскільки вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OM}$ компланарні, то існує єдина пара чисел $(x; y)$ така, що $\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$.

Сукупність точки і двох неколінеарних прикладених до неї векторів дають змогу ввести систему координат на площині: кожній точці M площини ставиться у відповідність єдина пара $(x; y)$ така, що $\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$.

Числа x та y називають *координатами* точки M. І навпаки, для кожної пари чисел $(x; y)$ існує єдина точка площини з такими координатами. Вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ задають орієнтовані прямі (прямі з вибраним напрямом), які називають *осями координат*, а точку їх перетину O – *початком координат*. Якщо вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ мають різну довжину, або $\overline{OA}$ не перпендикулярний до $\overline{OB}$, то таку систему координат називають *загальною афінною*.

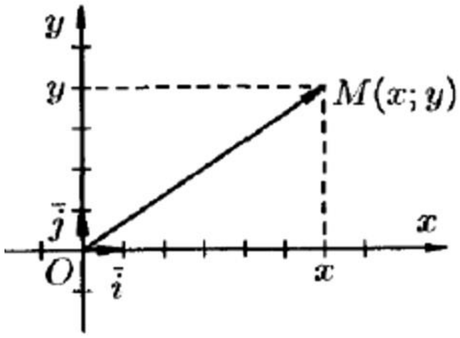
Означення Площина, в якій задано систему координат, називають *координатною площиною*.

Найбільш зручними для застосування є прямокутна система координат та полярна система координат.

1.2. Прямокутна система координат

Прямокутна система координат задається точкою O – *початком координат* та двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\bar{i} = (1; 0)$ та $\bar{j} = (0; 1)$, які визначають *осі координат – вісь абсцис Ох*, та *вісь ординат Оу*.

Зазвичай вісь абсцис розташована горизонтально та напрямлена зліва направо, а вісь ординат вертикально і напрямлена знизу вверх. Осі координат поділяють площину на чотири області, що називаються *чвертями* або *квадрантами*.



Розглянемо довільну точку M площини Oxy. *Координатами точки М* у системі координат Oxy називаються координати її радіус-вектора $\overline{OM}$. Якщо $\overline{OM} = (x; y)$, то координати точки M записують так: $M(x; y)$, причому число x називають *абсцисою* точки M, а число y – *ординатою* точки M. Ці два числа x і y повністю визначають положення точки на площині.

Розглянемо основні прикладні аспекти застосування метода координат на площині.

- **Відстань між двома точками у прямокутній (декартовій) системі координат**

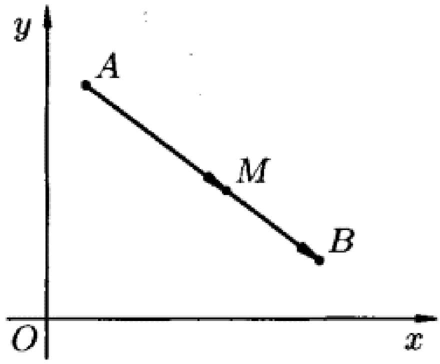
Відстань d між точками $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ на площині дорівнює довжині вектора $\overline{AB}$:

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- **Поділ відрізка в заданому відношенні у прямокутній системі координат**

Нехай відрізок AB, що з'єднує точки $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ потрібно поділити у заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайти координати точки $M(x; y)$ відрізка AB такої, що $AM : MB = \lambda$.

Тоді $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$. Останні формули називають *формулами поділу відрізка в заданому відношенні*.



<u>Зауваження</u>

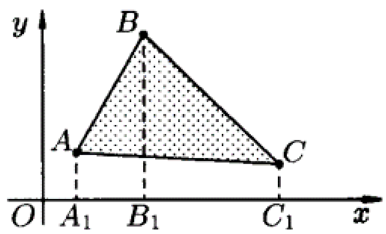
❖ Якщо $\lambda = 1$, тобто $AM = MB$, то останні формули набувають вигляду: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

❖ Якщо $\lambda = 0$, точки A і M співпадають.

❖ Якщо $\lambda < 0$, то точка М лежить поза відрізком AB. Кажуть, що точка М ділить відрізок зовнішнім чином.

- **Площа трикутника у декартовій системі координат**

Нехай на координатній площині задано три точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Знайдемо площу S трикутника ABC.

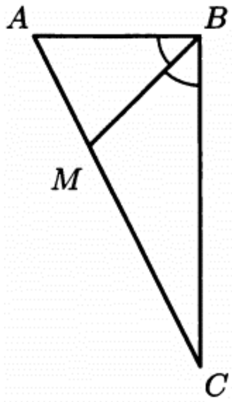


$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$

Зауважимо, випадок $S_{ABC} = 0$ означає, що точки *A, B* та *C* лежать на одній прямій. Якщо отримано від'ємне число, необхідно взяти його по модулю.

П р и к л а д

У трикутнику з вершинами *A(2; 3), B(6; 3), C(6; – 5)* знайти довжину бісектриси *BM*.



Відповідно до властивості внутрішнього кута трикутника $\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{BA}$. Знайдемо довжини сторін *BC* і *BA* за формулою

$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$

$|BC| = \sqrt{(6-6)^2 + (-5-3)^2} = 8,$

$|BA| = \sqrt{(2-6)^2 + (3-3)^2} = 4.$ Отже $\lambda = \frac{|BC|}{|BA|} = 2.$

Знаходимо координати точки $M(x_M; y_M)$.

$x_M = \frac{6+2\cdot 2}{1+2} = \frac{10}{3}$, $y_M = \frac{-5+2\cdot 3}{1+2} = \frac{1}{3}$. Знаходимо довжину бісектриси ВМ:

$|\overline{BM}| = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - 6\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 3\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$

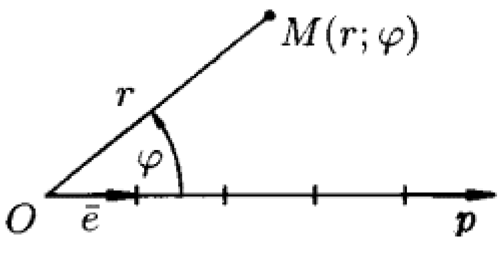
П р и к л а д

Знайти точку, у якій пряма, що проходить через точки *A(5; 5)* і *B(1; 3)* перетинає вісь *Ox*.

Координати точки *C(x; 0)*. Ураховуючи, що точки *A, B, C* належать одній прямій, буде виконуватися умова: $\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$, де $(x_1; y_1)$ – координати точки *A*, $(x_2; y_2)$ – координати точки *B*, $(x_3; y_3)$ – координати точки *C*.

Тоді $(1 - 5)(0 - 5) - (x - 5)(3 - 5) = 0, x = -5$. Відтак, точка С має координати $(-5; 0)$.

1.3. Полярна система координат



Полярна система координат задається початком відліку – точкою *O*, що називається *полюсом*, і віссю *Op*, яка називається *полярною віссю*, з вибраним на ній ортом $\bar{e}$.

Розглянемо на площині точку *M*, яка не співпадає з точкою *O*. Положення точки *M* однозначно визначається двома числами – відстанню *r* точки *M* до полюса *O* та кутом φ, який утворює відрізок *OM* з віссю *Op*. Відлік кутів ведеться у напрямку проти годинникової стрілки.

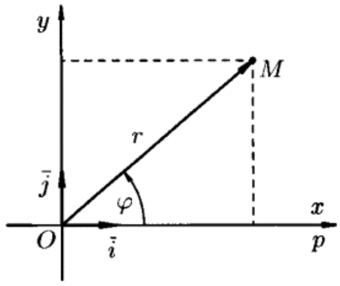
Числа *r* та φ називають *полярними координатами* точки *M*. Записують це так: $M(r; \varphi)$.

При цьому *r* називають *полярним радіусом* точки *M*, а φ – *полярним кутом*. Для отримання всіх точок площини достатньо вважати, що $-\pi < \varphi \le \pi$ (або $0 \le \varphi < 2\pi$), а $0 \le r < \infty$.

Отже, кожній точці *M* площини відповідає єдина пара чисел $(r; \varphi)$ і навпаки, кожній парі чисел *(r; φ)* відповідає єдина точка *М* площини.

Встановимо **зв'язок між декартовими та полярними системами координат**.

З малюнка видно, що декартові координати *(x; y)* точки *M* виражають через полярні координати *(r; φ)* так:



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Полярні координати *(r; φ)* точки *M* виражають через декартові координати *(x; y)* так:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Для визначення величини φ необхідно з'ясувати чверть, у якій знаходиться кут (по значенням *x* і *y*), а також ураховувати, що $-\pi < \varphi \leq \pi$.

<u>**Приклад**</u> Знайти прямокутні координати точки М з полярними координатами $(2; \frac{-2\pi}{3})$. Маємо, що $r = 2, \varphi = \frac{-2\pi}{3}$. Тоді $\begin{cases} x = 2\cos\frac{-2\pi}{3} \\ y = 2\sin\frac{-2\pi}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2\left(\frac{-1}{2}\right) = -1 \\ y = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \end{cases}$, отже $M(-1; -\sqrt{3})$.

<u>**Приклад**</u> Знайти полярні координати точки *M* з прямокутними координатами $(-\sqrt{3}; -1)$. Маємо, що $x = -\sqrt{3};$, $y = -1$. Відповідно до формул $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$ маємо, що $\begin{cases} r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \\ tg\varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} \end{cases}$, отже $\begin{cases} r = 2 \\ tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

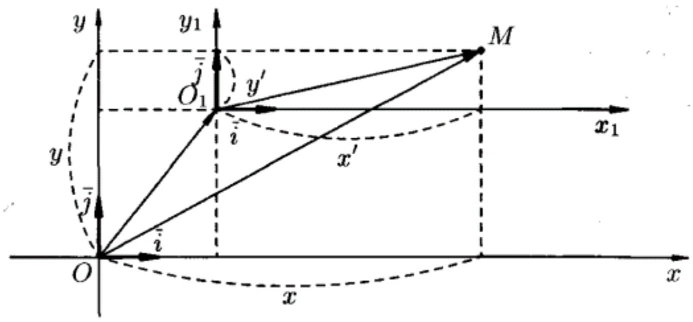
Точка М знаходиться в III чверті, отже, з урахуванням того, що $-\pi < \varphi \leq \pi$, маємо $\varphi = \frac{\pi}{6} - \pi = \frac{-5\pi}{6}$. Отже, $M(2; \frac{-5\pi}{6})$.

1.4. Перетворення декартової системи координат

<u>**Означення**</u> Перехід від однієї системи координат до іншої називають *перетворенням системи координат*.

Паралельний перенос системи координат

Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат *Oxy*.



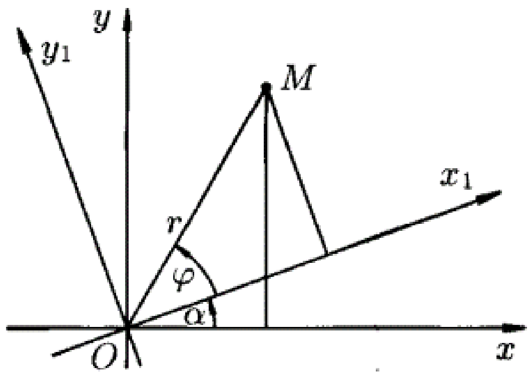
<u>**Означення**</u> *Під паралельним переносом осей координат* розуміють перехід від системи координат *Oxy* до системи координат $Ox'y'$, при якому змінюють положення початку координат, а напрям та маштаб осей залишають незмінним.

Нехай новий початок координат – точка O' має у старій системі координат *Oxy* координати $(x_0; y_0)$, тобто $O'(x_0; y_0)$.

Тоді $\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$. Ці формули дозволяють знаходити старі координати x, y за новими x', y', і навпаки.

Поворот системи координат

<u>**Означення**</u> *Під поворотом осей координат* розуміють таке перетворення координат, при якому обидві осі повертають на один і той самий кут, а початок координат та масштаб залишають незмінними.



Нехай нова система координат Ox_1y_1 отримується поворотом системи координат *Oxy* на кут α. Нехай $(x; y)$ – координати довільної точки *M* у старій системі координат *Oxy*, а $(x'; y')$ – координати цієї точки у новій системі координат Ox_1y_1.

Позначимо довжину відрізка *OM* через r. Зауважимо, що вона є однаковою для обох систем координат. Нехай також φ – кут, який утворює вектор $\overline{OM}$ з віссю Ox_1 (у новій системі координат). Тоді

$\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$, де $x' = rcos\varphi$, $y' = rsin\varphi$. Ці формули називають *формулами повороту осей*. Вони дозволяють визначити старі координати $(x; y)$ точки *M* за новими координатами $(x'; y')$ цієї ж точки *M*, і навпаки.

Питання для самоконтролю

1. Що розуміють під системою координат на площині?

2. Які числа називають координатами точки M?

3. Яку систему координат називають загальною афінною?

4. Як можна задати прямокутну систему координат?

5. Як знайти відстань між двома точками у прямокутній (декартовій) системі координат.

6. Запишіть формулу поділу відрізка в заданому відношенні.

7. Запишіть формулу площі трикутника у декартовій системі координат.

8. Як можна задати полярну систему координат?

9. Як виражають полярні координати декартові координати?

10. Як виражають декартові координати через полярні координати?

11. Запишіть формулу паралельного переносу системи координат.

12. Запищіть формулу повороту системи координат.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Задано точку A(3; – 2). Знайти координати точок, симетричних точки A відносно Ox, Oy, початку координат.

2. Знайти координати точки A_1, яка симетрична точці A(2; 4) відносно бісектриси:

a) другого та четвертого координатних кутів;

b) першого та третього координатних кутів.

3. Точки A(2; 4), B(– 3; 7), C (– 6; 6) – три вершини паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайти четверту вершину.

4. Задано трикутник з вершинами A(– 2; 4), B(– 6; 8), C(5; – 6). Обчислити площу трикутника.

5. У яких чвертях можуть бути розташовані точки M(x; y), якщо:

a. xy > 0;
b. xy < 0;
c. x – y = 0;
d. x – y > 0;
e. x + y = 0.

6. Знайти прямокутні координати точок A, B, C, D, E для яких відомо їхні полярні координати A(3; 0), $B(2;\frac{-\pi}{3})$, $C(5;\frac{\pi}{2})$, $D(0;\frac{-\pi}{4})$, $E(1;\frac{2\pi}{3})$.

7. Знайти полярні координати точок A, B, C, D, E для яких відомо їхні прямокутні координати $A(-3;3)$, $B(0;-5)$, $C(-2;-2)$, $D(-4;0)$, $E(2\sqrt{3};2)$.

8. У полярній системі координат задано точки $M_1(r_1;\varphi_1)$ *і* $M_2(r_2;\varphi_2)$. *Знайти відстань між точками* M_1 *і* M_2; *площу трикутника* OM_1M_2, *ураховуючи, що O – полюс.*

9. У полярній системі координат задано дві протилежні вершини квадрату $A(2;\frac{-\pi}{3})$ *і* $C(2;\frac{2\pi}{3})$. *Знайти його площу.*

10. Одна із вершин трикутника лежить в полюсі полярної системи координат, а інші в точках A(2; 0) і $B(4;\frac{\pi}{3})$. *Знайти радіус кола, вписаного у трикутник.*

Відповіді

1. (3; 2), (– 3; – 2), (– 3; 2). 2a. (– 4; – 2). 2b. (4; 2). 3. (– 1; 3). 4. 6.
5a. I, III. 5b. II, IV. 5c. I, III. 5d. I, III, IV. 5e. II, IV.

6. $A(3;0)$, $B(1;-\sqrt{3})$, $C(0;5)$, $D(0;0)$, $E(\frac{-1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$.

7. $A(3\sqrt{2};\frac{3\pi}{4})$, $B(5;\frac{-\pi}{2})$, $C(2\sqrt{2};\frac{-3\pi}{4})$, $D(4;\pi)$, $E(4;\frac{\pi}{6})$.

8. $d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$; $S=\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)$.

9. 8. 10. $\sqrt{3}-1$.

ТЕМА 2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

2.1. Поняття про лінію на площині та її рівняння

Лінію (криву) на площині задають як множину точок, які мають певну геометричну властивість. Використання на площині системи координат дозволяє визначати розташування точки на площині за допомогою двох чисел – її координат, а розташування лінії на площині визначати за допомогою рівняння (тобто рівності, що зв'язує координати точок лінії).

<u>Означення</u> *Рівнянням лінії* на площині відносно певної системи координат називається рівняння $F(x,y)=0$, якому задовольняють координати x і y кожної точки цієї лінії та не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Змінні x і y в рівнянні $F(x,y)=0$ лінії називаються *змінними координатами її точок*.

Лінія є геометричним місцем точок площини, координати яких задовольняють рівнянню $F(x,y)=0$.

<u>Приклад</u> Перевірити, чи належать точки $K(-2;1)$ і $L(1;1)$ лінії $2x+y+3=0$.

Підставляємо у рівняння замість x і y координати точки K, отримаємо, що $2\cdot(-2)+1+3=0$, отже, точка K належить прямій. Точка L не належить прямій, тому, що $2\cdot 1+1+3\neq 0$.

Отже, для того, щоб з'ясувати, чи лежить точка $A(x_0;\ y_0)$ на кривій, треба підставити її координати у рівняння кривої $F(x;\ y)=0$. Якщо при цьому рівняння перетвориться на тотожність, тобто $F(x_0;\ y_0)=0$, то точка A належить кривій, інакше (якщо $F(x_0;\ y_0)\neq 0$) точка A не належить кривій.

Для того, щоб знайти точки перетину двох кривих, заданих своїми рівняннями $F_1(x;\ y)=0$ і $F_2(x;\ y)=0$, необхідно розв'язати систему рівнянь

$\begin{cases}F_1(x;y)=0\\F_2(x;y)=0\end{cases}$. Якщо система не має розв'язків, то криві не перетинаються.

Криву на площині можна також задавати за допомогою двох рівнянь: $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, де x і y – координати довільної точки $M(x;\ y)$ кривої, а t – змінна, що називається *параметром*. Параметр t визначає положення кожної точки $M(x;y)$ кривої на площині Oxy. Таке задання кривої на площині називають *параметричним*.

<u>Приклад</u>

Якщо $x=t+1,\ y=t^2$, тоді значенню параметра $t=2$ відповідає точка площини (3; 4), тому, що $x=2+1=3,\ y=2^2=4$.

Для того, щоб перейти від параметричного задання кривої до рівняння типу $F(x;\ y)=0$, потрібно з будь-якого рівняння виключити змінну t.

<u>Приклад</u>

З рівняння $\begin{cases}x=t\\y=t^2\end{cases}$ можна отримати рівняння $y=x^2$ або $y-x^2=0$.

Проте, виключати змінну не завжди доцільно та можливо.

Класифікація ліній в аналітичній геометрії відбувається за виглядом виразу $F(x, y)$ у рівнянні лінії.

Означення Лінія, що задана рівнянням $F(x, y) = 0$ називається *алгебраїчною*, якщо функція $F(x, y)$ є многочленом з дійсними коефіцієнтами.

Степінь многочлена $F(x, y)$ називається порядком алгебраїчної лінії.

Лінія, яка не є алгебраїчною, називається *трансцендентною*.

Ми вивчатимемо лише алгебраїчні лінії першого й другого порядку.

Приклади

1. Рівняння $2x - y - 1 = 0$ визначає пряму лінію.
2. Рівняння $x^2 - y^2 = 0$ або $(x - y)(x + y) = 0$ визначає дві прямі – бісектриси координатних кутів.
3. Рівняння $x^2 + y^2 = 0$ визначає точку $(0;\ 0)$ – вироджену лінію.
4. Рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не визначає жодного геометричного місця точок, оскільки для будь-яких x і y маємо, що $x^2 + y^2 + 1 > 0$.

Отже, кожній кривій на площині відповідає рівняння $F(x;\ y) = 0$, і навпаки, кожному рівнянню $F(x;\ y) = 0$ відповідає якась крива на площині, властивості якої визначаються її рівнянням.

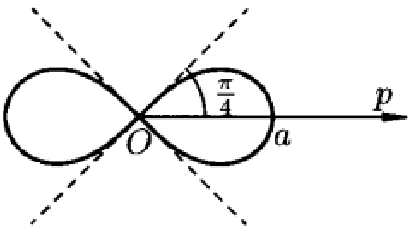
В аналітичній геометрії на площині розглядають дві основні задачі:

1) знаючи геометричні властивості кривої, знайти її рівняння;
2) за відомим рівнянням кривої $F(x;\ y) = 0$ вивчити її властивості та форму.

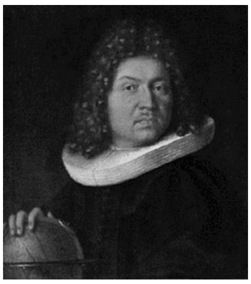
Приклади Деякі криві на площині

Цікаво знати

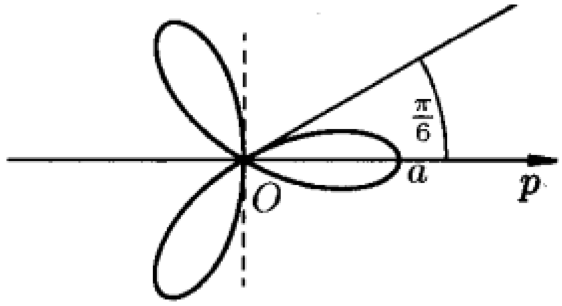
Назва походить з античного Риму, де «лемніскатою» називали бантик, з допомогою якого прикріпляли вінок до голови переможця на спортивних іграх.



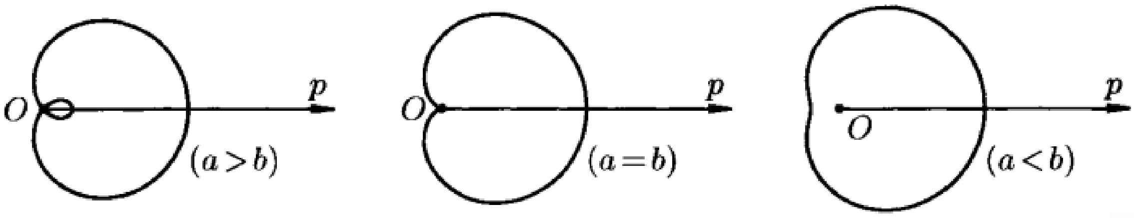
Якоб Бернуллі (1655 – 1705 рр.) – швейцарський математик, основоположник теорій варіаційного числення і диференційних рівнянь, старший із відомої родини науковців Бернуллі.



Лемніската Бернуллі ($(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ або в полярних координатах:
$r = a\sqrt{cos2\varphi}$)



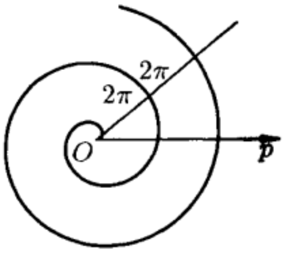
Трипелюсткова троянда ($r = acos3\varphi$)



Равлик Паскаля ($r = b + acos\varphi$)

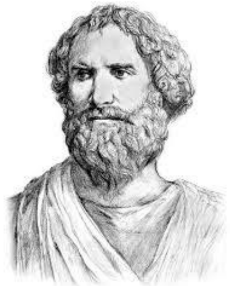
Цікаво знати

Блез Паскаль (1623 – 1662 рр.) – французький філософ, письменник, фізик, математик. Криву присвятив своєму батьку Етьєну Паскалю.



Цікаво знати

Архімед (близько 287 р. до н. е. – 212 р. до н. е.) – давньогрецький математик, фізик, інженер, винахідник та астроном, один із найвидатніших науковців античності.

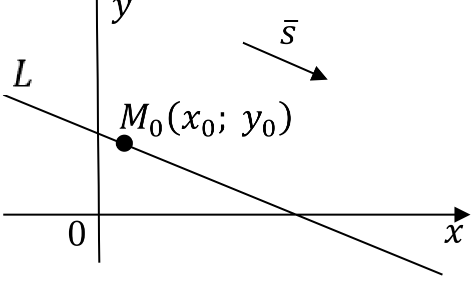


Спіраль Архімеда ($r = a\varphi$)

2.2. Різні види рівняння прямої на площині

Найпростішою лінією на площині є пряма. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x і y.

1. Нехай пряма L проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно заданому ненульовому вектору $\bar{s} = (l, m)$, який називають *напрямним вектором прямої*:

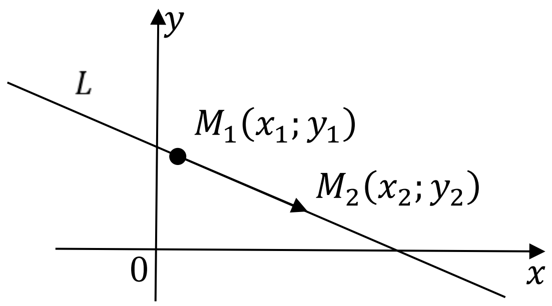


L Зауважимо, що пряма L має безліч напрямних векторів. Усі вони паралельні, отже їхні відповідні координати пропорційні.

Розглянемо довільну точку $M(x;\ y) \in L$ і вектор $\overline{\mathrm{M_0M}} = (x - x_0, y - y_0)$. Вектори $\overline{\mathrm{M_0M}}$ і $\bar{s}$ колінеарні, тому їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$ – *канонічне рівнянням прямої.*

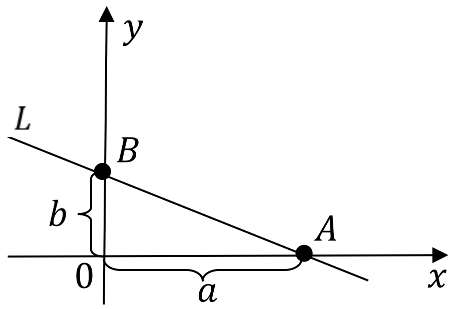
2. Нехай пряма L проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)\in L$. Якщо за напрямний вектор $\bar{s}$ прямої взяти вектор $\overline{\mathrm{M_1M_2}}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$:



тоді з попереднього рівняння отримаємо *рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

3. Якщо пряма L проходить через точки $A(a;0)$ і $B(0;b)$,

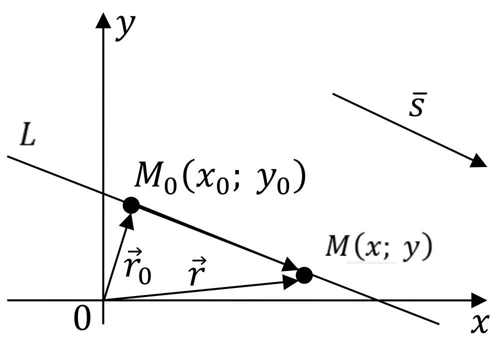


то отримаємо *рівняння прямої «у відрізках» на осях*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

де a,b – відрізки, які відтинає пряма на осях Ox і Oy відповідно.

4. Нехай пряма L проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$, паралельно вектору $\bar{s}=(l;m)$, а $M(x;\ y)\in L$ – довільна точка. Розглянемо радіус-вектори $\overline{r_0}=\overline{OM_0}$ і



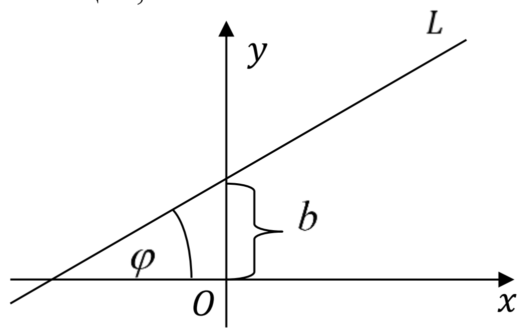
$\bar{r}=\overline{OM}$ точок M_0 і M відповідно.

Оскільки вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{s}$ колінеарні, то $\bar{r}-\overline{r_0}=\bar{s}t, t\in R$, тоді $\bar{r}=\overline{r_0}+\bar{s}t$ – *векторне параметричне рівняння прямої*.

З нього одержимо *координатні параметричні рівняння*:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \quad t \in R;$$

5. Якщо відомо відрізок b, що відтинається прямою L на осі ординат, і тангенс кута φ нахилу прямої до осі абсцис,



то отримаємо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*:

$$y = kx + b, \text{ де } k = tg\varphi.$$

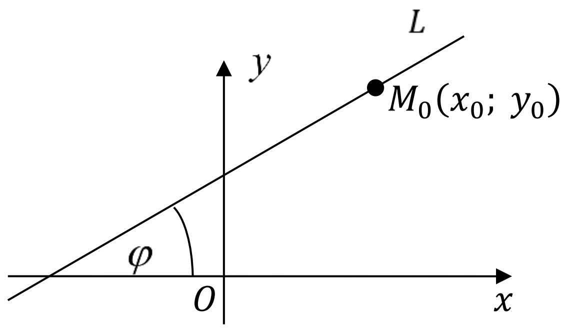
Зауваження

- Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і пряма визначається рівнянням

$$y = kx.$$

- Якщо пряма паралельна осі Ox, то $\varphi = 0$, то $k = tg\varphi = 0$, то рівняння має вигляд $y = b$.
- Якщо пряма паралельна осі Oy, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, отже кутовий коефіцієнт k не існує, тоді рівняння прямої має вигляд: $x = a$.

Різновид рівняння $y = kx + b$ отримаємо, коли відома точка, що лежить на прямій:

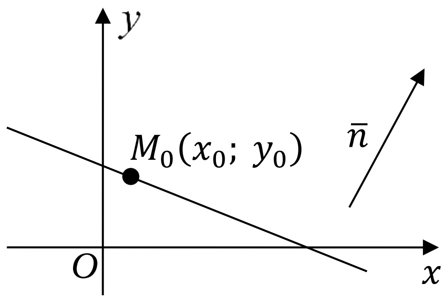


$$y - y_0 = k(x - x_0) -$$

рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку.

6. Нехай пряма L проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданому ненульовому вектору $\bar{n} = (A;\ B)$, який називають *нормальним вектором* (*вектором нормалі*) прямої.

Зауважимо, що пряма L має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, отже їхні відповідні координати пропорційні.



Розглянемо довільну точку $M(x;\ y) \in L$ і вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0)$.

Вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{n}$ ортогональні, тому їх скалярний добуток дорівнює 0:

$$\bar{n}\ \cdot\ \overline{M_0M} = 0,$$

тобто

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – *рівняння прямої, що проходить через задану точку із заданим вектором нормалі*.

7. Якщо відомо лише нормальний вектор $\bar{n} = (A;\ B)$ прямої, то будемо мати рівняння вигляду

$$Ax + By + C = 0,$$

яке називається *загальним рівнянням прямої*.

Зауваження

• Якщо $A = 0$, то рівняння має вигляд $y = -\frac{C}{B}$. Це рівняння прямої, яка паралельна осі Ox.

• Якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі Oy.

• Якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат.

Усі рівняння наведено в наступній таблиці:

Види рівнянь прямої на площині

Назва рівняння	Вид рівняння	Основні параметри	Зауваження
Канонічне рівняння прямої	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$	$M_0(x_0; y_0)$ $\bar{s} = (l;\ m)$	точка, напрямний вектор
Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$	дві точки прямої
Рівняння прямої «у відрізках» на осях	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a, b	відрізки на координатних осях
Параметричне рівняння прямої; векторне рівняння прямої	$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$ $t \in R;$ $\bar{r} = \bar{r_0} + t\bar{s}$	$M_0(x_0;\ y_0)$, $\bar{s} = (l;\ m)$	точка, напрямний вектор

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$	k, b	кутовий коефіцієнт, відрізок на осі Oy
Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку	$y - y_0 = k(x - x_0)$	$M_0(x_0; y_0), k$	точка прямої, кутовий коефіцієнт
Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора	$A(x - x_0) +$ $+B(y - y_0) = 0$	$M_0(x_0; y_0),$ $\bar{n} = (A;\ B)$	точка прямої, нормальний вектор
Загальне рівняння прямої	$Ax + By + C = 0$	$\bar{n} = (A;\ B)$	нормальний вектор

Взаємозв'язок рівнянь прямої на площині

Початкове рівняння прямої	Отримане рівняння	Зв'язок параметрів рівнянь
Канонічне $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$	Загальне $Ax + By + C = 0$	$A = m, B = -l,$ $C = -mx_0 + ly_0$
Канонічне $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$	З кутовим коефіцієнтом і точкою $y - y_0 = k(x - x_0)$	$k = \frac{m}{l}$
З заданою точкою із заданим вектором нормалі $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	Канонічне $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$	$-\frac{B}{A} = m, l = 1$
Загальне $Ax + By + C = 0$	«У відрізках» $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$
Загальне $Ax + By + C = 0$ Загальне «з точкою» $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	З кутовим коефіцієнтом і точкою $y - y_0 = k(x - x_0)$, З кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$	$k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$

Приклад Пряма задана точкою $M_0(-1;\ 2)$ і напрямним вектором $\bar{s} = (3;\ -1)$.

- Записати канонічне рівняння прямої.

Підставимо координати вектора $\bar{s} = (3;\ -1)$ і координати точки $M_0(-1;\ 2)$ у канонічне рівняння прямої $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}.$$

- Записати загальне рівняння прямої.

$-1 \cdot (x+1) = 3 \cdot (y-2)$, тоді $x + 3y - 5 = 0$.

- Записати рівняння прямої «у відрізках» на осях.

Знайдемо $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$. Підставимо в рівняння прямої «у відрізках» $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1;$$

- Записати рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Знайдемо $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ та підставимо в рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

2.3. Взаємне розташування прямих на площині

<u>**Означення**</u> *Кутом між двома прямими* L_1 і L_2 називається кут φ, на який треба повернути пряму L_1 (проти годинникової стрілки), щоб вона збіглася з прямою L_2.

Задача знаходження кута між прямими, умов паралельності й перпендикулярності зводиться до відповідної задачі для векторів. Вигляд формул для знаходження кута між прямими, умов паралельності й перпендикулярності залежить від того, якими рівняннями задані прямі.

Взаємне розташування прямих на площині

Назва рівняння	**Параметри прямих**	**Умова паралельності**	**Умова перпендику-лярності**	**Кут між прямими**
Загальне	$\overline{n_1} = (A_1;\ B_1)$ $\overline{n_2} = (A_2, B_2)$	$\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	$\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	$cos\,\varphi = \frac{\overline{n_1 n_2}}{\lvert\overline{n_1}\rvert\lvert\overline{n_2}\rvert}$
Канонічне	$\bar{s_1} = (l_1; m_1)$ $\bar{s_2} = (l_2;\ m_2)$	$\bar{s_1} \parallel \bar{s_2}$ $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$	$\bar{s_1} \perp \bar{s_2}$ $l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$	$cos\,\varphi = \frac{\bar{s_1}\bar{s_2}}{\lvert\bar{s_1}\rvert\lvert\bar{s_2}\rvert}$
З кутовим коефіцієн-том	k_1, k_2	$k_1 = k_2$	$k_1 k_2 = -1$ $k_2 = -\frac{1}{k_1}$	$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

Загальне й канонічне	$\overline{n_1} = (A_1;\ B_1)$ $\overline{s_2} = (l_2;\ m_2)$	$\overline{n_1} \parallel \overline{s_2}$ $\frac{A_1}{l_2} = \frac{B_1}{m_2}$	$\overline{n_1} \perp \overline{s_2}$ $A_1 l_2 + B_1 m_2 = 0$	$\sin\varphi = \frac{\lvert\overline{n_1}\overline{s_2}\rvert}{\lvert\overline{n_1}\rvert\lvert\overline{s_2}\rvert}$

<u>З а у в а ж е н н я</u>

$\overline{n_1}\overline{n_2} = A_1A_2 + B_1B_2, \quad \overline{s_1}\overline{s_2} = l_1l_2 + m_1m_2, \quad \overline{n_1}\overline{s_2} = A_1l_2 + B_1m_2,$

$|\overline{n_1}| = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad |\overline{n_2}| = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}, \quad |\overline{s_1}| = \sqrt{l_1^2 + m_1^2}, |\overline{s_2}| = \sqrt{l_2^2 + m_2^2}.$

<u>З а у в а ж е н н я</u>

Відстань між паралельними прямими L_1 *і* L_2 на площині визначається формулою:

$$d = \frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \text{ де}$$

$\overline{n_1} = (A_1;\ B_1)$ – нормальний вектор прямої L_1, $M_0(x_0;\ y_0)$ – деяка точка прямої L_2.

<u>П р и к л а д</u> Знайти відстань від початку координат до прямої $x + 3y - 5 = 0$.

$d = \frac{|1\cdot 0 + 3\cdot 0 - 5|}{\sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$

2.4. Задачі економічного змісту на пряму

Задача про дослідження впливу розширення тракторного парку на зростання врожаю зернових

<u>П р и к л а д</u>

У 1980 р. держава мала 108,5 тисяч тракторів і одержала з одного гектара 8,5 ц зернових. У 1995 р. держава мала 510 тисяч тракторів і одержала з одного гектара 21 ц зернових. Позначимо час – x, кількість тисяч тракторів – y; врожай, який одержали з одного гектара, позначимо – z (центнерів).

За умовою задачі маємо чотири точки:

$A(x_1;\ y_1)$, де $x_1 = 1980$, $y_1 = 108{,}5$;

$B(x_2;\ y_2)$, де $x_2 = 1995$, $y_2 = 510$;

$M_1(x_1;\ z_1)$, де $x_1 = 1980$, $z_1 = 8{,}5$;

$M_2(x_2;\ z_2)$, де $x_2 = 1995$, $z_2 = 21$.

Знайдемо рівняння прямих – графіків зростання тракторного парку та врожайності зернових з одного гектара за 1980 – 1995 роки у вигляді $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, одержимо:

$\frac{x-1980}{1995-1980} = \frac{y-108{,}5}{510-108{,}5}$, тоді отримаємо, що $y = \frac{401{,}5}{15}x - \frac{793342{,}5}{15}$. Таким чином, кутовий коефіцієнт прямої зростання тракторного парку буде дорівнювати: $k_1 = \frac{401{,}5}{15}$.

Використовуючи точки M_1 і M_2, аналогічно знаходимо рівняння прямої зростання врожайності зернових з одного гектара:

$\frac{x-1980}{1995-1980} = \frac{z-8{,}5}{21-8{,}5}$, тоді $z = \frac{12{,}5}{15}x - \frac{24877{,}5}{15}$. Отже, її кутовий коефіцієнт буде такий: $k_2 = \frac{12{,}5}{15}$.

З умов задачі можна зробити висновок, що при зростанні тракторного парку врожайність зернових з 1 га також зростає. Але кутовий коефіцієнт k_1 графіка зростання кількості тракторів значно більший за кутовий коефіцієнт k_2 графіка зростання врожайності зернових.

Таким чином, зростання тракторного парка сприяє зростанню врожайності зернових, але не пропорційно. Зростання кількості тракторів не є основним факторам у підвищенні ефективності сільського господарства. Необхідно враховувати вплив інших факторів, наприклад, якість насіння, культуру агротехніки тощо.

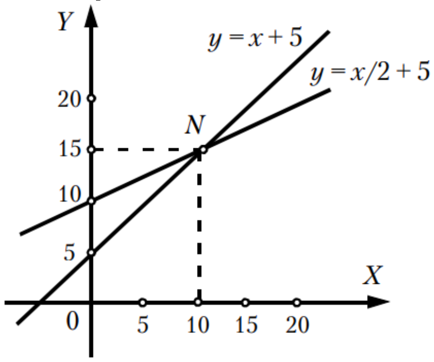
Задача про визначення рентабельності транспортного постачання

Приклад Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу (y) залізничним та автомобільним транспортом на відстань x знаходять за формулами:

$y = \frac{1}{2}x + 10, \quad y = x + 5$, де x вимірюється десятками км.

Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення. Графіки прямих перетинаються в точці $N(10;\ 15)$. Для перевірки координат точки N знайдемо точку перетину аналітично:

$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 10 \\ y = x + 5 \end{cases}$, знаходимо, що $x = 10, y = 15.$



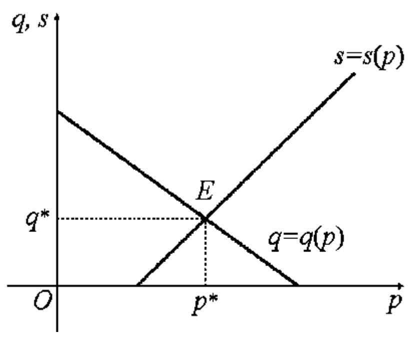
Графіки витрат дозволяють зробити висновки:
a) якщо $x < 100$ км, транспортні витрати y перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;
b) якщо $x > 100$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

Задача про модель рівноваги ринку

Візьмемо деякий товар. За даної ціни p за одиницю товару через $s(p)$ позначимо число одиниць товару, яку продавці на ринку пропонують для продажу. Функцію $s = s(p)$ називають *функцією пропозиції товару*. Через $q(p)$ позначимо число одиниць товару, які покупці бажають купити за даною ціною p. Функцію $q = q(p)$ називають *функцією попиту на товар*. З економічних міркувань функція пропозиції $s = s(p)$ зростаюча, а функція попиту $q = q(p)$ спадна. Ціну, за якої попит на певний товар дорівнює пропозиції цього товару на ринку, називають *рівноважною ціною*. Тобто за рівноважної ціни p^* виконується рівність:

$s(p^*) = q(p^*)$.

Точку $E(p^*;\ q^*)$ називають *точкою рівноваги*.



Приклад

За умови, що функція попиту має вигляд, $q = -5p + 40$, а функція пропозиції $s = 7{,}5p - 10$, визначити рівноважну ціну. Нехай уряд деякої країни встановив акцизний податок T за одиницю товару (цей податок є фіксованим числом). З'ясувати, як зміняться при цьому рівноважна ціна та обсяг товару.

Координати точки рівноваги $E(p^*;\ q^*)$ задовольняють умову рівноваги $s(p^*) = q(p^*)$, тобто $7{,}5p - 10 = -5p + 40$, звідки $p^* = 4$, $s(p^*) = q(p^*) = 20$. Якщо уряд установить акцизний податок T за одиницю товару, то функція пропозиції зміниться і задаватиметься співвідношенням:

$s = s(p - T) = 7{,}5(p - T) - 10$, а функція попиту залишиться незмінною. Тоді нову точку рівноваги $(pT;\ qT)$ можна визначити з умови рівноваги $s(pT) = q(pT)$, тобто $7{,}5(pT - T) - 10 = -5pT + 40$.

Отже, нова рівноважна ціна $pT = 4 + 0{,}6T$, а відповідний обсяг товару $s(pT) = q(pT) = 20 - 3T$. Дістали нову точку рівноваги $(4 + 0{,}6T;\ 20 - 3T)$.

Модель рівноваги доходів і збитків

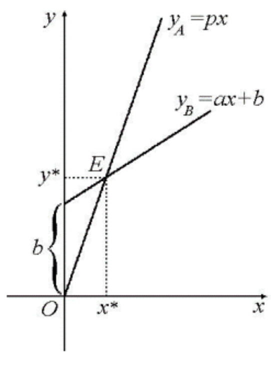
Розглянемо просту модель рівноваги доходів і збитків компанії. Компанія випускає продукцію й продає її за ціною p (у. о.) за одиницю. Керівництво компанії встановило, що зміна суми $y_в$ загальних щомісячних витрат на виготовлення продукції в кількості x (тис.од.) має таку закономірність: $y_в = ax + b$. Знайдемо точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії.

Оскільки дохід від продажу x (тис.) виробів продукції ціною p (у. о.) за одиницю визначатиметься функцією доходу $y_д = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно, щоб виконувалась умова рівноваги:

$y_в = y_д$.

Знаходимо розв'язок рівняння $px = ax + b$. Маємо $x^* = \frac{b}{p-a}$.

Отже, визначили точку рівноваги $E = \left(\frac{b}{p-a}; \frac{pb}{p-a}\right)$.



Прибуток Q компанії визначається рівністю $Q = y_д - y_в$.

Якщо $0 \le x \le x^*$, то графік функції доходу проходить нижче за графік функції витрат. Тоді $Q < 0$, і компанія несе збитки.

Якщо $x > x^*$, то графік функції доходу проходить вище за графік функції витрат.

Тоді $Q > 0$, і компанія одержує прибуток.

Питання для самоконтролю

1. *Що називають рівнянням лінії на площині?*
2. *Як можна перевірити, чи належить точка певній лінії?*
3. *Які дві основні задачі розглядають в аналітичний геометрії на площині?*
4. *Запишіть канонічне рівняння прямої.*
5. *Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.*
6. *Запишіть рівняння прямої «у відрізках» на осях.*
7. *Запишіть векторне параметричне рівняння прямої.*

8. *Запищіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.*

9. *Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку.*

10. *Запишіть рівняння прямої, що проходить через задану точку із заданим вектором нормалі.*

11. *Який вигляд має загальне рівняння прямої?*

12. *Які умови паралельності та перпендикулярності прямих ви знаєте?*

13. *Як знайти відстань між паралельними прямими?*

14. *Наведіть приклади застосування аналітичної геометрії для вирішення економічних проблем.*

Завдання для самостійного розв'язання

1. *Установити, при якому значенні α пряма* $(\alpha^2-\alpha)x+(2+\alpha)y-3\alpha+1=0$ *паралельна осі Ох; проходить через початок координат.*

2. *Знайти k із умови, що пряма y = kx + 2 віддалена від початку координат на відстань* $\sqrt{3}$.

3. *Записати рівняння з кутовим коефіцієнтом, у відрізках та визначити, на якому відстані від початку координат вони знаходяться:*

a) $2x – 3y + 6 = 0$;

b) $x + 2{,}5 = 0$;

c) $y = x – 1$;

d) $x + 5y = 0$.

4. *Записати рівняння прмої, що проходить через точки:*

a) *A(0; 2), B(– 3; 7);*

b) *A(2; 1), B(4; 1).*

5. *Знайти кутовий коефіцієнт прямої та ординату її точки перетину з віссю Оу, якщо пряма проходить через точки A(1; 1), B(– 2; 3).*

6. *Пряма проходить через точки A(2; 3) і B(– 4; – 1), перетинає вісь Оу у точці С. Знайти координати точки С.*

7. *Знайти абсцису точки М, яка лежить на прямій, що проходить через точки A(– 2; – 2) і B(– 1; 6). Відомо також, що ордината точки М дорівнює 22.*

8. *Знайти кут між прямими:*

a) $y = 2x – 3$, $y = \frac{1}{2}x + 5$;

b) $2x – 3y + 10 = 0$, $5x – y + 4 = 0$;

c) $y = \frac{3}{4}x - 2$, $8x + 6y + 5 = 0$;

d) $y = 5x + 1$, $y = 5x – 2$.

9. *Дослідити взаємне розташування наступних прямих:*

a) $3x + 5y – 9 = 0$, $10x – 6y + 4 = 0$;

b) $2x + 5y – 2 = 0$, $x + y + 4 = 0$;

c) $2y = x – 1$, $4y – 2x + 2 = 0$;

d) $x + 8 = 0$, $2x – 3 = 0$;

e) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1$, $y=\frac{1}{2}x+2$;

f) $x + y = 0,\ x - y = 0;$

g) $y + 3 = 0,\ 2x + y - 1 = 0;$

h) $y = 3 - 6x,\ 12x + 2y - 5 = 0;$

i) $2x + 3y = 8,\ x + y - 3 = 0;$

j) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y - 1 = 0, \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y + 2 = 0.$

10. При яких значеннях a прямі: паралельні, перпендикулярні

a) $2x - 3y + 4 = 0,\ ax - 6y + 7 = 0;$

b) $ax - 4y + 1 = 0,\ -2x + y + 2 = 0;$

c) $4x + y - 6 = 0,\ 3x + ay - 2 = 0;$

d) $x - ay + 5 = 0,\ 2x + 3y + 3 = 0.$

11. Знайти координати точки M_2, яка симетрична точці $M_1(-3; 4)$ відносно прямої $4x - y - 1 = 0$.

12. Записати рівняння прямої l_2, що проходить через точку $A(0; 2)$ під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої l_1: $x - 2y + 3 = 0$.

13. Знайти відстань між паралельними прямими $3x + 4y - 20 = 0$ і $6x + 8y + 5 = 0$.

14. Знайти довжину висоту BD трикутника $A(4; -3)$, $B(-2; 6)$ і $C(5; 4)$.

15. Скласти рівняння прямої, симетричної прямої $x + 2y - 6 = 0$ відносно точки $A(4; 2)$.

Відповіді

1. $\alpha = 0,\ \alpha = 1;\ \alpha = \frac{1}{3}$. *2.* $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. *3. Відстань: a)* $\frac{6\sqrt{13}}{13}$, *b)* 2,5, *c)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$, *d)* 0.

4a) $5x + 3y - 6 = 0$, *4b)* $y = 1$. *5.* $k = -\frac{2}{3}, b = \frac{5}{3}$. *6.* $\left(0; \frac{5}{3}\right)$. *7.* $3x + y - 3 = 0$.

8a) $\varphi = arctg\frac{3}{4}$, *8b)* $\varphi = \frac{\pi}{4}$, *8c)* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *8d)* $\varphi = 0$.

9a) перпендикулярні, 9b) перетинаються, 9c) співпадають, 9d) паралельні, 9e) співпадають, 9f) перпендикулярні, 9g) перетинаються, 9h) паралельні, 9i) перетинаються, 9j) перпендикулярні.

10a) 4, – 9; *10b)* 8, – 2; *10c)* $\frac{3}{4}, -12$; *10d)* $\frac{-3}{2}, \frac{2}{3}$. *11.* $M_2(5; 2)$.

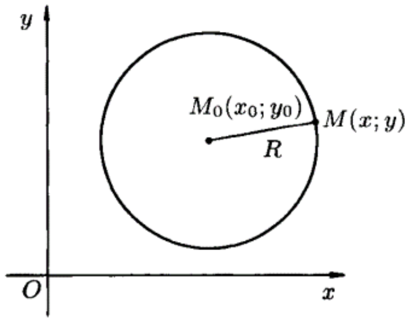
12. $3x - y + 2 = 0,\ x + 3y - 6 = 0$. *13.* 4,5. *14.* $5{,}1\sqrt{2}$. *15.* $x + 2y - 10 = 0$.

ТЕМА 3. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3.1. Поняття лінії другого порядку. Коло

Означення *Кривою (лінією) другого порядку* на площині називають сукупність точок (геометричне місце точок), які в деякій декартовій системі координат Oxy задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому хоча б одне із чисел A, B, C не дорівнює нулю.

З шкільного курсу математики відомо, що найпростішою кривою другого порядку є коло. Нагадаємо, що *колом* радіуса R з центром у точці M_0 називають множину всіх точок M площини, які задовольняють умові: $M_0M = R$.



Запишемо канонічне рівняння кола:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

де $M(x; y)$, $M_0(x_0; y_0)$.

Зазначимо, що цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки $M(x; y)$ кола та не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на колі.

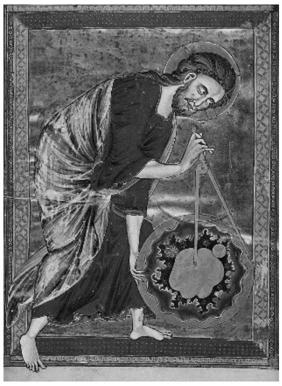
Цікаво знати

Коло було відомим ще зі стародавніх часів.

1700 р. до н. е. – Папірус Рінда описує метод знаходження площі круглого поля.

300 р. до н. е. – Книга 3 із «Начал» Евкліда присвячена властивостям кола.

Циркуль, зображений у рукописі 13-го століття, є символом Божого акту створення світу. Німб також має форму кола.



Приклад

Знайти координати центра і радіус кола:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$. Виділимо повні квадрати $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 8y - 16 = 0$, тоді $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 6^2$, тобто центр кола знаходиться в точці $(2;\ -4)$, а радіус дорівнює 6.

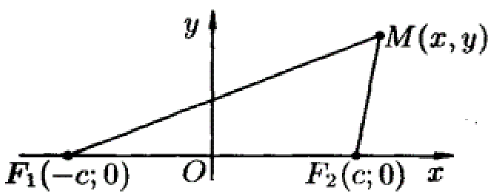
2) $9x^2 + 9y^2 + 42x - 54y - 95 = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на 9, отримаємо $x^2 + y^2 + \frac{14}{3}x - 6y - \frac{95}{9} = 0$. Тоді

$$x^2 + \frac{14}{3}x + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + y^2 - 6y + 9 - \frac{49}{9} - 9 - \frac{95}{9} = 0 \text{ й } (x + \tfrac{7}{3})^2 + (y-3)^2 = 5^2.$$

Отже, тобто центр кола знаходиться в точці $\left(-\frac{7}{3};\ 3\right)$, а радіус дорівнює 5.

3.2. Еліпс. Канонічне рівняння. Властивості.

Означення *Еліпсом* називають геометричне місце точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок F_1 і F_2 цієї площини (*фокусів*) є величиною сталою та більшою за відстань між фокусами.



Нехай $F_1(-c; 0), F_2(c; 0),$ де c – додатне дійсне число. Точка $M(x; y)$ – довільна точка еліпса, причому $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Відстані $r_1 = F_1M$ і $r_2 = F_2M$ називають фокальними радіусами.

Вважаючи, що $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо

канонічне рівняння еліпса:

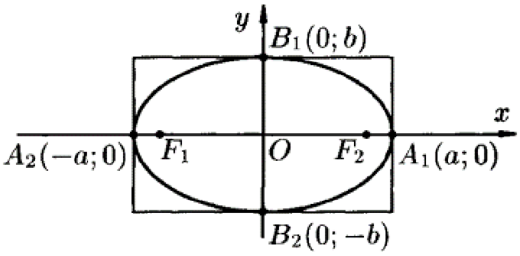
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0,\ b>0.$$

Зауваження

У випадку, коли $a = b$ зазначене рівняння описує на площині коло з центром у початку координат та радіусом $R = a$.

Дослідимо форму еліпса за його канонічним рівнянням та з'ясуємо властивості еліпса.

1. Координати точки $M(x;\ y)$ еліпса входять до канонічного рівняння в парних степенях, це означає, що еліпс є крива, яка симетрична відносно осей Ox і Oy, а також відносно початку координат – *центру еліпса*. Таким чином, для встановлення форми еліпса достатньо дослідити його частину, що розміщена в одній, наприклад, у першій координатній чверті.



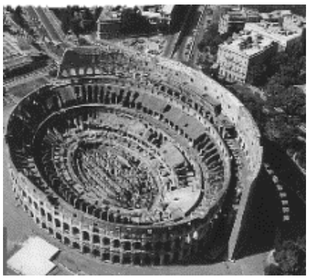
2. Еліпс вміщується в прямокутнику зі сторонами $2a$ і $2b$. Еліпс перетинає осі координат в точках $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;\ b)$ і $B_2(0;\ -b)$,. Ці точки називають *вершинами еліпса*.

Величини $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ називають відповідно *великою та малою осями* еліпса, а величини a і b називають відповідно *великою й малою півосями* еліпса.

Відстань між фокусами $F_1(-c;\ 0)$ $F_2(c;0)$ називають *фокальною відстанню,* $F_1F_2 = 2c$.

В якості характеристики форми еліпса використовують відношення $\frac{c}{a}$.

Деякі приклади еліпсів у житті

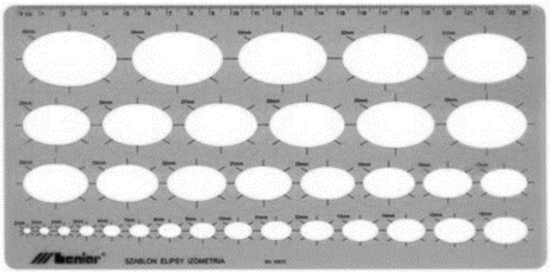



3. **Означення** *Ексцентриситетом еліпса* називають відношення половини фокальної відстані до довжини великої півосі еліпса.

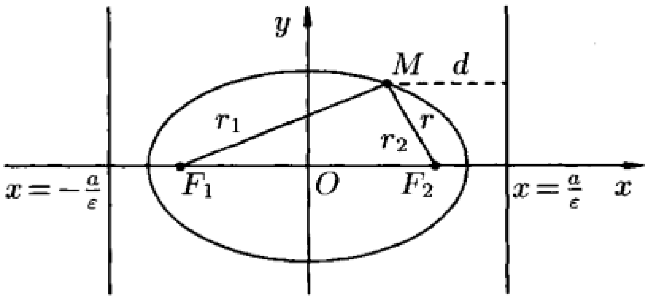
Позначають: $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Оскільки $0 \le c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$. Звідси випливає, чим меншим є ексцентриситет, тим меньше сплющений еліпс.

Якщо $\varepsilon = 0$, то $a = b$, тобто еліпс перетворюється на коло, якщо ε наближається до одиниці, то еліпс стискується вздовж малої осі.



Можна показати, що $r_1 = a + \varepsilon x$ і $r_2 = a - \varepsilon x$.



4. **Означення** *Директрисами еліпса* називають прямі D_1 і D_2, що задають рівняннями

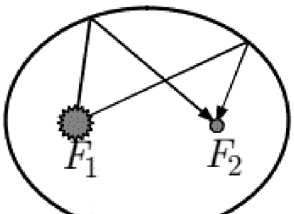
$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$$

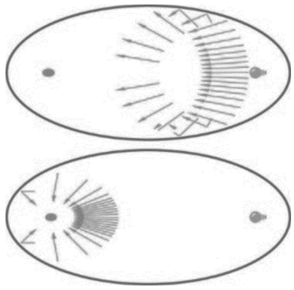
(причому знак «–» відповідає фокусу F_1, «+» відповідає фокусу F_2).

Нехай d_1 – відстань від довільної точки *M* еліпса до директриси D_1, аналогічно d_2 – до D_2.Тоді справедлива наступна рівність:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

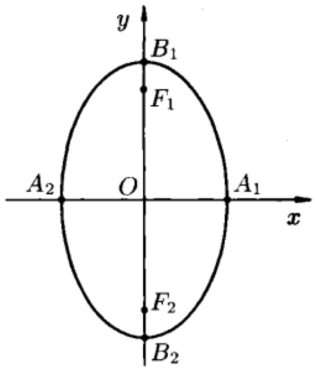
5. Оптична властивість еліпса: усі промені, що виходять з F_1, збираються в F_2.





Зауваження

Із рівності $a^2 - c^2 = b^2$ виходить, що $a > b$.



Якщо $a < b$, тоді рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ визначає еліпс, велика вісь якого лежить на осі *Oy*, а маленька вісь – на осі *Ox*. Фокуси цього еліпса знаходяться в точках $F_1(0; c), F_2(0; -c)$, причому $b^2 - c^2 = a^2$.

Приклад

Задано рівняння еліпса $24x^2 + 49y^2 = 1176$. Знайти:

1) довжину півосей;
2) координати фокусів;

3) ексцентриситет;

4) рівняння директрис і відстань між ними;

5) точки еліпса, відстань від яких до лівого фокусу F_1 дорівнює *12*.

1) Запишемо рівняння еліпса у вигляді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, для цього треба поділити ліву та праву частину рівняння на 1176:

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$. Тоді $a^2=49$, $b^2=24$, звідки $a=7, b=2\sqrt{6}$.

2) Із рівності $a^2-c^2=b^2$ знаходимо, що $c=5$. Тоді $F_1(-5;0)$ i $F_2(5;0)$.

3) Із формули $\varepsilon=\frac{c}{a}$ маємо, що $\varepsilon=\frac{5}{7}$.

4) Рівняння директрис має вигляд $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{7}{\frac{5}{7}}=\pm\frac{49}{5}$, відстань між ними $\frac{49}{5}+\frac{49}{5}=19{,}6$.

5) Відповідно до формули $r_1=a+\varepsilon x$ знаходимо абсцису точок, відстань від яких до точки F_1 дорівнює *12*: $7+\frac{5}{7}x=12$, тоді $x=7$. Підставляємо значення x у рівняння еліпса, знаходимо ординати цих точок: $24\cdot 49+49y^2=1176$, тоді $y=0$. Отримали, що умові задачі задовольняє точка *A(7; 0)*.

3.3. Гіпербола. Канонічне рівняння. Властивості

Означення *Гіперболою* називають геометричне місце всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох заданих точок F_1 і F_2 (*фокусів*) цієї площини є величиною сталою та меншою за відстань між фокусами.

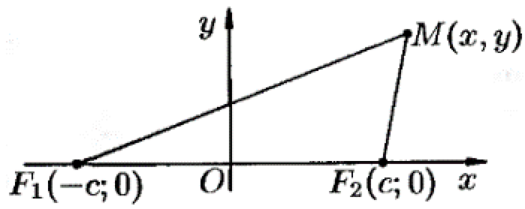
Нехай $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$, де c – відоме додатне дійсне число, точка $M(x;y)$ – довільна точка гіперболи. Відстані $r_1=F_1M$ і $r_2=F_2M$ називають *фокальними радіусами*.

За означенням гіперболи модуль різниці відстаней від точки $M(x;y)$ до фокусів є сталою величиною, позначимо її через $2a$.

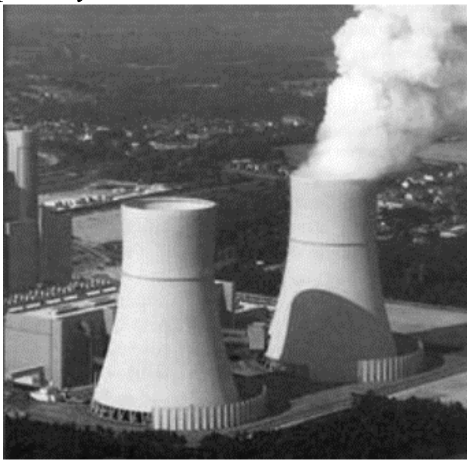
Отже $|r_1-r_2|=2a$.

Вважаючи, що $c^2-a^2=b^2$, отримаємо *канонічне рівняння гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0.$$



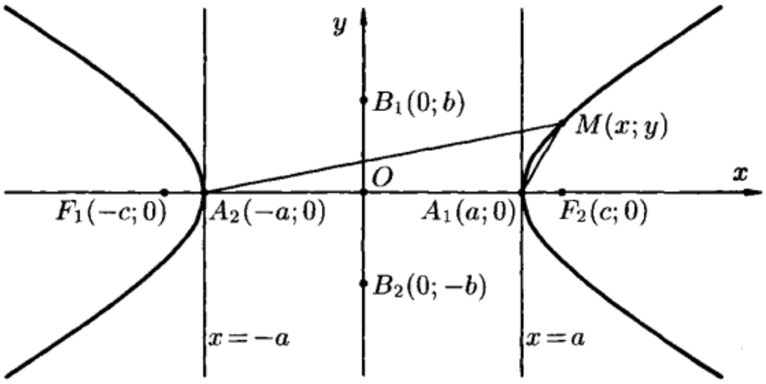
Деякі приклади гіпербол у житті



Дослідимо форму гіперболи за її канонічним рівнянням та з’ясуємо властивості гіперболи.

1. Координати точки $M(x;\ y)$ гіперболи входять до канонічного рівняння в парних степенях, це означає, що гіпербола є крива, симетрична відносно осей Ox і Oy, а також відносно початку координат – *центру гіперболи*. Таким чином, для встановлення форми гіперболи достатньо дослідити її частину, що розміщена в одній, наприклад, у першій координатній чверті.

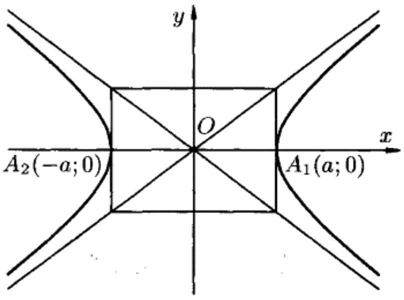
2. Гіпербола перетинає вісь Ox в точках $A_1(a;0)$ і $A_2(-a;0)$, які називають *вершинами гіперболи*. Вісь Oy гіпербола не перетинає.



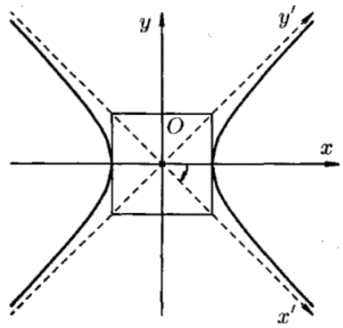
Величини $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ називають відповідно *дійсною та уявною осями гіперболи*, а величини a і b називають відповідно *дійсною та уявною півосями* гіперболи.

3. **<u>Означення</u>** Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називають *асимптотами гіперболи*.

Уся гіпербола складається з двох віток (лівої та правої), має дві асимптоти $y = \pm \frac{b}{a}x$ та розташована поза прямокутником зі сторонами $2a$ і $2b$, який називають основним.



Для побудови гіперболи рекомендують спочатку побудувати основний прямокутник гіперболи, далі – прямі, що проходять через протилежні вершини прямокутника, – асимптоти гіперболи та відмітити вершини $A_1(a;0)$ і $A_2(-a;0)$.



Якщо $a = b$, то рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ перетворюється на рівняння:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

яке визначає *рівнобічну гіперболу*. Основним прямокутником цієї гіперболи є квадрат із стороною $2a$, а асимптотами – прямі $y = \pm x$.

4. **Означення**. *Ексцентриситетом гіперболи* називають відношення половини фокальної відстані до довжини дійсної півосі еліпса.

Позначають: $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Крім того, з формули $c^2 - a^2 = b^2$ випливає, що $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1 -} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

Чим більший ексцентриситет гіперболи, тим більше гіпербола відхиляється від осі Ox, якщо ε наближається до одиниці, то гіпербола наближається до осі Ox.

У рівнобічній гіперболі $\varepsilon = \sqrt{2}$.

5. Нехай $M(x;\ y)$ – довільна точка гіперболи. Розглянемо фокальні радіуси $MF_1 = r_1$ і $MF_2 = r_2$. Для точок правої гілки гіперболи вони мають вигляд:

$r_1^* = a + \varepsilon x, \quad r_2^* = -a + \varepsilon x.$

Для точок лівої гілки гіперболи фокальні радіуси задаються формулами:

$r_1^{**} = -a - \varepsilon x, \quad r_2^{**} = a - \varepsilon x.$

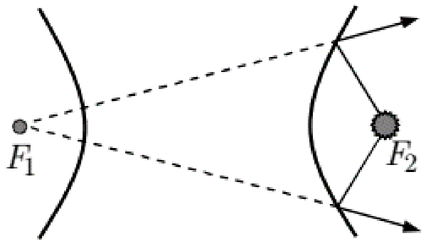
6. **Означення**. *Директрисами гіперболи* називаються прямі D_1 і D_2 з рівняннями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

(причому знак «–» відповідає фокусу F_1, знак «+» відповідає фокусу F_2).

Так само, як й у еліпса, отримаємо:

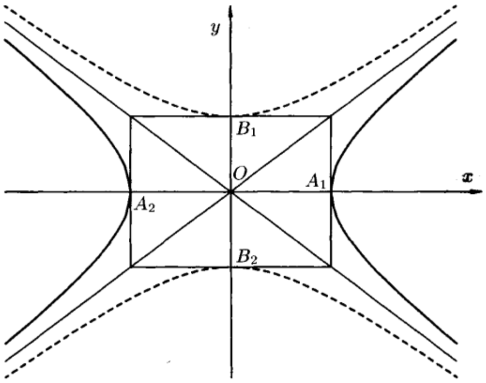
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

7. Оптична властивість гіперболи: усі промені, що виходять F_2, після віддзеркалення здаються такими, що витікають з F_1.



Зауваження

Крива $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ також є гіперболою. Дійсна вісь $2b$ цієї гіперболи розташована на осі Oy, а уявна $2a$ – на осі Ox.



Гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ мають однакові асимптоти. Гіперболу $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ називають *спряженою* до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

На малюнку *спряжену гіперболу* позначено пунктиром.

Приклад

Задано рівняння гіперболи $5x^2 - 4y^2 = 20$. Знайти:

1) довжину півосей гіперболи;
2) координати фокусів;
3) ексцентриситет гіперболи;
4) рівняння асимптот і директрис;
5) фокальні радіуси точки *M(3; 2,5).*

1) Поділимо обидві частини рівняння $5x^2 - 4y^2 = 20$ на *20,* щоб привести до канонічного вигляду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, тоді $a = 2, b = \sqrt{5}$.

2) Відповідно до співвідношення $c^2 - a^2 = b^2$ отримаємо, що $c = 3$. Знаходимо фокуси гіперболи: $F_1(-3;\ 0)$ і $F_2(3;\ 0)$.

3) За формулою $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

4) Рівняння асимптот і директрис знаходимо за формулами: $y = \pm\frac{b}{a}x$ і $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, отже $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x,\ \ x = \pm\frac{2}{3}$.

5) Для точки М запишемо формулу $r_1 = a + \varepsilon x = 2 + \frac{3}{2} \cdot 3 = 6{,}5$,

$r_2 = -2 + \frac{3}{2} \cdot 3 = 2{,}5$.

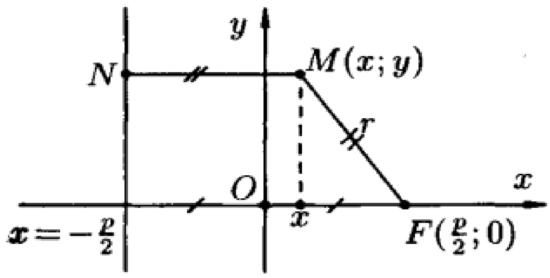
3.4. Парабола. Канонічне рівняння. Властивості

Означення *Параболою* називається геометричне місце всіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки F цієї площини (фокуса) й від заданої прямої D (*директриси*), яка не проходить через фокус.

Відстань від фокуса до директриси параболи називають *параметром параболи* і позначають p ($p > 0$).

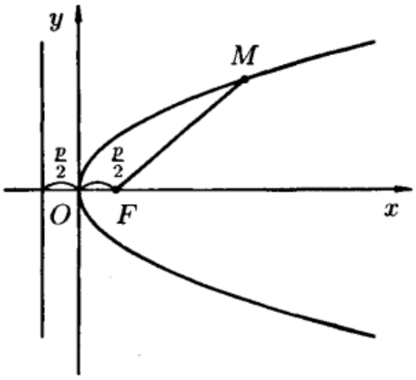
Канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px.$$



Нехай $M(x;\ y)$ – довільна точка параболи. Позначимо $r = FM$ *(фокальний радіус точки M),* $d = MD$, $r = d$, крім того,

$F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$.



Дослідимо форму параболи за її канонічним рівнянням та з'ясуємо властивості параболи.

1. Координата y точки $M(x; y)$ параболи входить до рівняння $y^2 = 2px$ у парному степені, це означає, що парабола є крива, симетрична відносно осі Ox. Таким чином, для встановлення форми достатньо дослідити її частину, що розміщена у верхній півплощині.

2. Для верхньої півплощини $y \geq 0$, тому з рівняння $y^2 = 2px$ маємо $y = \sqrt{2px}$. З цього рівняння випливає, що парабола розміщена справа від осі Oy. Крім того, частина параболи, розміщена у верхній півплощині, має форму нескінченної дуги.

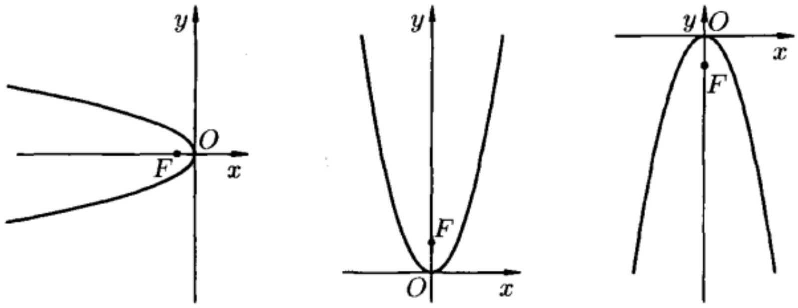
Парабола перетинає вісь Ox в точці $O(0;\ 0)$, яку називають *вершиною параболи*. Вісь симетрії Ox параболи називають *віссю параболи*.

3. Параметр p впливає на форму параболи. Із збільшенням параметра p парабола розширюється відносно осі Ox.

4. Рівняння

$$y^2 = -2px,\ x^2 = 2py,\ x^2 = -2py,$$

в яких $p > 0$, теж визначають параболи

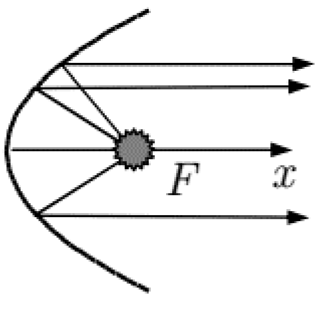


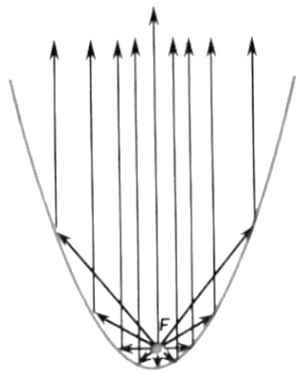
$y^2 = -2px$ $x^2 = 2py$ $x^2 = -2py$

5. *Директриса параболи* має рівняння

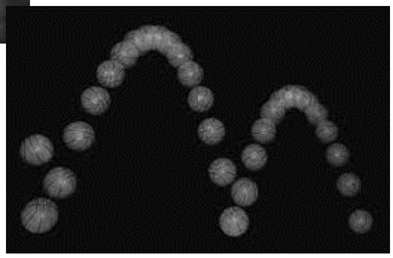
$$x = -\frac{p}{2}$$

6. Оптична властивість гіперболи: промені, що виходять з фокусу, після віддзеркалення йдуть паралельно оси параболи.





Деякі приклади парабол у житті



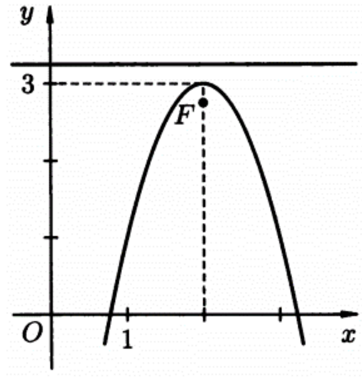
Приклад

Знайти вершину, фокус і директрису параболи $y = -2x^2 + 8x - 5$, побудувати ескіз графіка.

Перетворимо рівняння $y = -2x^2 + 8x - 5$, виділивши у правій частині повний квадрат:

$y = -2x^2 + 8x - 5 = -2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{5}{2}\right) =$

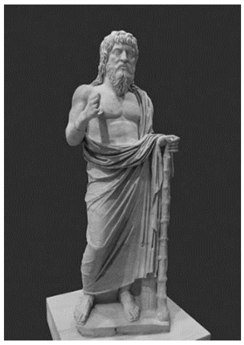
$= -2\left((x-2)^2 - \frac{3}{2}\right) = -2(x-2)^2 + 3$. Можна записати, що $(x-2)^2 = \frac{-1}{2}(y-3)$.



Вершина параболи має координати *(2; 3)*, $2p = \frac{1}{2}, p = \frac{1}{4}$.

Пряма $x = 2$ є віссю симетрії параболи. Координати фокусу $x = 2$, $y = 3 - \frac{1}{8} = 2\frac{7}{8}$, тобто $F(2; 2\frac{7}{8})$. Рівняння директриси $y = 3 + \frac{p}{2} = 3 + \frac{1}{8} = 3\frac{1}{8}$.

Цікаво знати



Більшість типів ліній другого порядку відомі давно, їх досить добре вивчив Аполлоній Аполлоній Тіанський (1 р. н. е. – 98 р. н. е.) – філософ. Він утворював основні типи ліній другого порядку як плоскі перерізи кругового конуса, тому в математичній літературі лінії другого порядку відомі ще як конічні перерізи.

Лінії другого порядку зустрічаються в явищах навколишнього світу: по еліпсу рухаються планети Сонячної системи, по гіперболі або параболі – комети. Траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, є параболою; космічні кораблі, ракети, залежно від наданої їм швидкості, рухаються по колу, еліпсу, параболі чи гіперболі.

3.5. Задачі економічного змісту на криву другого порядку

Задача про визначення витрат палива судном на підводних крилах

Приклад

Дослідженням виявлено, що витрати палива судном на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна. Треба знайти аналітичну залежність між витратами палива m та швидкістю судна V, враховуючи, що при $V = 40$ *км/год* витрачено *20 л* палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості *60 км/год*.

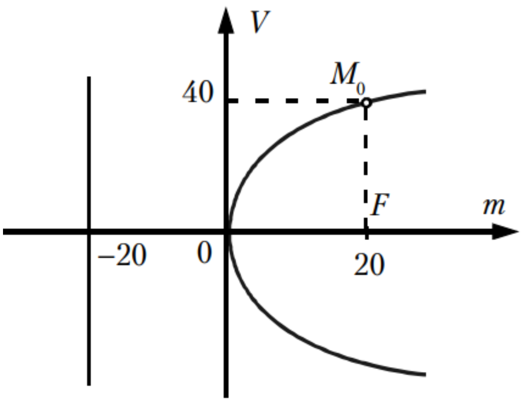
Згідно з умовою задачі шукану залежність можна записати у вигляді: $V^2 = km$, де k – деякий коефіцієнт пропорційності.

Порівняння цієї формули з рівнянням параболи $y^2 = 2px$ дозволяє зробити висновок, що витрати палива змінюються за параболічним законом. При $m = 0$ швидкість $V = 0$, тобто парабола проходить через початок системи координат mOV. Згідно з умовою задачі парабола проходить через точку $M_0(20; 40)$, тому її координати задовольняють рівняння параболи:

$40^2 = k \cdot 20$, тоді $k = 80$.

Таким чином, аналітична залежність між витратами палива та швидкістю судна буде:

$V^2 = 80 \cdot m$, тоді $m = \frac{V^2}{80}$. Графік цієї залежності зображено на рисунку.



З останньої формули випливає, що при швидкості *60 км/год* витрати палива (у літрах) за годину повинні дорівнювати

$m = \frac{60^2}{80} = 45$ (літрів).

Задача про рівновагу доходу та збитків

<u>Приклад</u>

Компанія виробляє вироби *А* та продає їх по *2 у.о.* за кожний. Керівництво компанії встановило, що сума $Y_В$ загальних щотижневих витрат (в у.о.) на виготовлення виробів *А* кількістю x (тисяч одиниць) має таку закономірність:

$Y_В = 1000 + 1300x + 100x^2$.

Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів *А*, що забезпечує рівновагу витрат та доходу.

Доход від продажу x тисяч виробів *А* вартістю *2* у.о. за кожний буде:

$Y_Д = 2000x$.

Для рівноваги доходу та витрат треба щоб виконувалась рівність: $Y_В = Y_Д$, отже $1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x$.

Тоді $x_1 = 2, x_2 = 5$.

Ця задача має дві точки рівноваги. Компанія може виробляти *2000* $(x = 2)$ виробів *А* з доходом та витратами *4000* у.о. або *5000* $(x = 5)$ виробів з доходом та витратами *10000 у.о.*

Розглянемо на прикладі можливості компанії. Позначимо щотижневий прибуток P, тоді $P = Y_Д - Y_В = -100(x-2)(x-5)$.

З останньої рівності випливає, що при x = 2 або x = 5 маємо $P = 0$, тобто ці значення x будуть точками рівноваги.

Коли $2 < x < 5$, тоді $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$ і маємо $P > 0$, тобто компанія одержить прибуток. При інших значеннях x будемо мати, що $P < 0$ – компанія несе збитки.

Задача про витрати

Приклад

Два однотипові підприємства *A* і *B* виробляють продукцію за оптовою ціною m. Однак, автопарк, що обслуговує підприємство *A*, оснащений новішими та потужнішими вантажними автомобілями. Тому транспортні витрати на перевезення одного виробу складають за *1 км*: для підприємства *A – 10 у.о.*, для підприємства *B – 20 у.о.* Відстань між підприємствами *300 км*. Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспортування були мінімальними?

Позначимо через S_1 і S_2 відстані до ринку від пунктів A і B відповідно. Тоді витрати споживачів складуть:

$f(A) = m + 10S_1$ і $f(B) = m + 20S_2$.

Знайдемо множину точок, для яких $S_1 = 2S_2$, тобто ті випадки розміщення ринку, коли $f(A) = f(B)$.

$S_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $S_2 = \sqrt{(300 - x)^2 + y^2}$, тоді $(x - 400)^2 + y^2 = 200^2$. Це рівняння визначає коло, отже, для споживача всередині кола вигідніше купувати в пункті *B*, поза колом – у пункті *A*, на колі – однаково.

Питання для самоконтролю

1. *Що таке крива (лінія) другого порядку на площині, яке її рівняння?*
2. *Запишіть канонічне рівняння кола.*
3. *Що називають еліпсом?*
4. *Яке канонічне рівняння еліпса?*
5. *Як можна знайти ексцентриситет еліпса? Що він показує?*
6. *Запишіть формулу директрис еліпса.*
7. *Що називають гіперболою?*
8. *Запишіть канонічне рівняння гіперболи.*
9. *Запишіть рівняння асимптот гіперболи.*
10. *За допомогою яких формул можна знайти ексцентриситет і директриси гіперболи?*
11. *Дайте означення параболи.*
12. *Запишіть канонічне рівняння параболи.*
13. *Запишіть формулу директриси параболи.*

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти координати центра і радіус кола:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$.

2. Записати рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$*, що проведені із точки M(0; 3).*

3. Записати рівняння кола, що торкається осей координат і проходить через точку (4; – 2).

4. Записати рівняння дотичних до кола $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$*, якщо вони проходять через початок координат.*

5. Знайти центр і радіус кола, вписаного у трикутник зі сторонами

3x + 4y – 12 = 0, 4x – 3y + 12 = 0 і y = 0.

6. Знайти піввісі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис еліпса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

7. Скласти рівняння еліпса, якщо:

a) його більша піввісь дорівнює 10, фокуси $F_1(-6; 0)$, $F_2(10; 0)$*;*

b) $a = 5$, $F_1(-3; 5)$, $F_2(3; 5)$.

8. Скласти рівняння еліпса, що проходить через точки $M_1(2;\ -4\sqrt{3})$, $M_2(-1;\ 2\sqrt{15})$.

9. Записати канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі Ox, симетрично відносно початку координат, якщо:

a) відомо точку $M_1\left(2\sqrt{3}; 1\right)$*, а його мала піввісь дорівнює 2;*

b) відомо дві точки еліпса $M_1(0; 7)$ *і* $M_2(8; 0)$*;*

c) відстань між фокусами дорівнює 24, велика вісь дорівнює 26;

d) ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{25}$*, відомо фокуси (*$\pm 7; 0$).

10. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі Ox, симетрично відносно початку координат, якщо:

a) $M_1\left(2\sqrt{3}; 0{,}4\sqrt{10}\right)$, $M_2\left(\frac{-5}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ *– точки еліпса;*

b) точка $M\left(3; -2\sqrt{3}\right)$ *лежить на еліпсі,* $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$*;*

c) $a = 10$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$*;*

d) Відстань між фокусами дорівнює 4, відстань між директрисами дорівнює 5.

11. Скласти рівняння гіперболи, якщо її фокуси лежать на осі Oy і відстань між ними дорівнює 10, а довжина дійсної осі дорівнює 8.

12. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо:

a) $2c = 10, a = 3$;

b) $c = 3, \varepsilon = 1{,}5$;

c) $b = 6$*, рівняння асимптот* $y = \pm\frac{5}{3}x$.

13. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо:

a) $c = 10$*, рівняння асимптот* $y = \pm\frac{4}{3}x$;

b) $\varepsilon = \frac{3}{2}$*, відстань між директрисами дорівнює* $\frac{8}{3}$*;*

c) $\varepsilon = \sqrt{2}$*, точка* $M(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$ *лежить на гіперболі.*

14. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться в точках $F_1(-2; 4), F_2(12; 4)$*, а довжина уявної осі дорівнює 6.*

15. Знайти кут між асимптотами гіперболи, якщо її ексцентриситет *дорівнює 2.*

16. Задано параболу $x^2 = 4y$. Знайти її фокус, рівняння директриси, довжину фокального радіуса точки M(4; 4).

17. Парабола симетрична відносно осі Ox, її вершина співпадає з початком координат. Скласти рівняння параболи, якщо вона проходить через точку A(– 3 ; – 3).

18. Знайти рівняння дотичної до параболи y2 = 4x, проведеної із точки A(– 2 ; – 1).

19. До параболи $y^2 = 4x$ проведено дотичну, яка паралельна прямій $2x – y + 7 = 0$. Скласти рівняння цієї дотичної.

20. При яких значеннях k пряма $y = kx – 1$ перетинає параболу $y^2 = – 5x$? Торкається її?

Відповіді

1a. $(2; -3), R = 4,$ *1b.* $\left(-1; \frac{2}{3}\right), R = \frac{\sqrt{19}}{3}.$ *2.* $y = 3,\ y = \frac{15}{8}x + 3.$

3. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4,$ $(x-10)^2 + (y+10)^2 = 100.$

4. $y = 0,$ $4x – 3y = 0.$ *5.* $\left(-\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right), R = \frac{7}{5}.$

6. 5 і 4; (3; 0) і (– 3; 0); $\varepsilon = 0{,}6;$ $x = \pm\frac{25}{3}.$

7a. $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$ *7b.* $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1.$ *8.* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1.$

9a. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$ *9b.* $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} = 1.$ *9c.* $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$ *9d.* $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1.$

10a. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1.$ *10b.* $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$ *10c.* $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$ *10d.* $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$

11. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$

12a. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$ *12b.* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$ *12c.* $\frac{25x^2}{324} - \frac{y^2}{36} = 1.$

13a. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$ *13b.* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$ *13c.* $x^2 - y^2 = 1.$

14. $\frac{(x-5)^2}{40} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$ *15.* $60^0.$ *16.* (0; 1), $y = – 1,$ $r = 5.$ *17.* $y^2 = – 3x.$

18. $y = x + 1, y = -\frac{x}{2} - 2.$ *19.* $4x – 2y + 1 = 0.$ *20.* $k < \frac{5}{4}, k = \frac{5}{4}.$

ТЕМА 4. СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА ТА ПРЯМА У ПРОСТОРІ

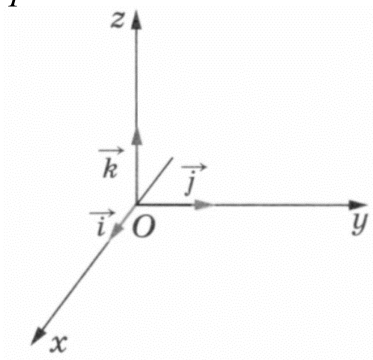
4.1. Система координат у просторі

Під *системою координат у просторі* розуміють спосіб, що дозволяє чисельно описати положення будь-якої точки простору.

Систему координат у просторі розглядають по аналогії з системою координат на площині. Для цього потрібно зафіксувати впорядковану трійку некомпланарних векторів, прикладених до спільної точки *O*: $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}.$ Будь-якій точці M простору поставити у відповідність вектор $\overline{OM}$. Оскільки вектори $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}$ утворюють базис, то існує єдина трійка чисел *(x; y; z)* така, що

$$\overline{OM} = x\overline{OA_1} + y\overline{OA_2} + z\overline{OA_3}.$$

Числа x, y та z називають *координатами точки* M. І навпаки, для кожної трійки чисел $(x; y; z)$ існує єдина точка простору з такими координатами. Вектори $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{OA_3}$ задають орієнтовані прямі – осі, які називають *осями координат*.



Найбільш зручною є *прямокутна система координат*, що задається точкою O -*початком координат*, та трьома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\bar{\imath} = (1; 0; 0)$, $\bar{\jmath} = (0; 1; 0)$, $\bar{k} = (0; 0; 1)$. Вони і визначають осі координат – *вісь абсцис Ох*, *вісь ординат Оу* та *вісь аплікат Oz*. Осі координат поділяють простір на вісім областей, що називають *октантами*.

Поверхні у просторі, як правило, можна розглядати як геометричне місце точок, що задовольняють певній умові.

О з н а ч е н н я *Рівнянням даної поверхні* в прямокутній системі координат $Oxyz$ називають таке рівняння $F(x; y; z) = 0$ з трьома невідомими x, y, z, якому задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні, і не задовольняють координати точок, що не лежать на поверхні.

З а у в а ж е н н я Для того, щоб установити, чи лежить точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на даній поверхні, треба підставити координати точки M_1 у рівняння поверхні замість змінних: якщо координати задовольняють рівняння, то точка лежить на поверхні, інакше – точка не лежить на поверхні.

Лінію у просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, спільних для двох поверхонь.

Так, якщо $F_1(x; y; z) = 0$ і $F_2(x; y; z) = 0$ – рівняння двох поверхонь, що визначають лінію l, то координати точок цієї лінії задовольняють системі двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x;\ y;\ z) = 0 \\ F_2(x;\ y;\ z) = 0 \end{cases}.$$

Так само, як і у випадку аналітичної геометрії на площині, можна визначити **основні задачі аналітичної геометрії у просторі**:

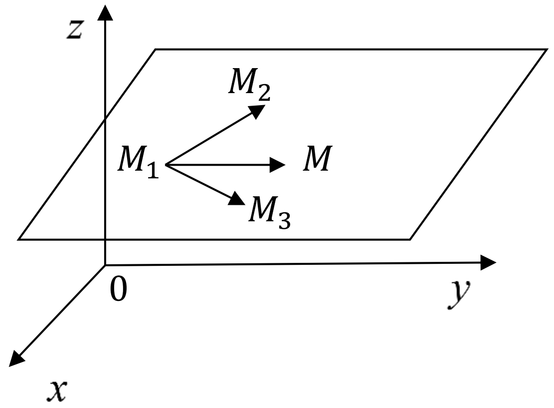
1) Задана поверхня як геометричне місце точок. Знайти рівняння цієї поверхні.

2) Задано рівняння поверхні $F(x; y; z) = 0$. Дослідити види та геометричні властивості цієї поверхні.

4.2. Різні види рівнянь площини у просторі

Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x, y, z. Розглянемо різні види рівнянь площини у просторі.

1. Нехай площина P проходить через три задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій, і нехай $M(x;\ y;\ z)$ – довільна точка площини P.



Розглянемо вектори

$\overline{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)$;

$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$;

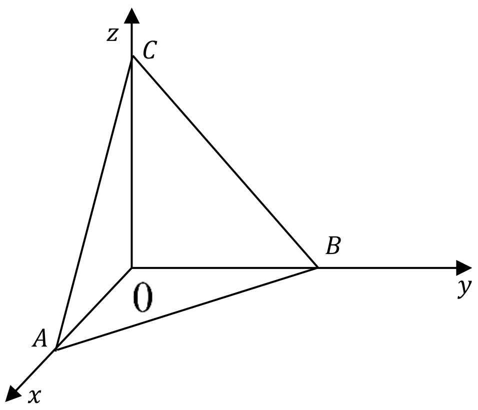
$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$.

Усі вектори лежать в одній площині P, тобто вони *компланарні*. За умовою компланарності їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$\overline{M_1M}\ \overline{M_1M_2}\ \overline{M_1M_3} = 0$, тобто можна записати, що

$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$. Отримано *рівняння площини, що проходить через три задані точки*.

2. Нехай площина P відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c відповідно. Це означає, що площина P проходить через точки $A(a;0;\ 0)$ і $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$.



Підставимо координати цих точок в рівняння $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$:

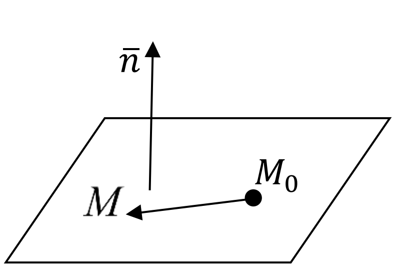
$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислимо визначник:

$$xbc + yac + zab - abc = 0$$

або

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{c}{z} = 1$ – *рівняння площини у відрізках на осях*.



3. Нехай площина P проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно заданому ненульовому вектору $\bar{n} = (A;\ B;C)$, який називають *нормальним вектором площини*.

Зауважимо, що площина P має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, отже їхні відповідні координати пропорційні.

Розглянемо довільну точку $M(x;\ y;\ z) \in P$ і вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$.

Вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{n}$ $\vec{n}$ ортогональні, тому їх скалярний добуток дорівнює 0:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – *рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору.*

4. Якщо відомий тільки нормальний вектор $\bar{n} = (A;\ B;C)$ площини, то будемо мати рівняння вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

яке називають *загальним рівнянням площини*. Його різновид з п. 3 називають *загальним рівнянням площини з точкою***.** Усі ці рівняння узагальнено в таблиці.

Види рівнянь площини

Назва	Вид рівняння	Параметри
Рівняння площини, що проходить через три задані точки	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$	$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2; z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$
Рівняння «у відрізках» на осях	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	$a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$
Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора	$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$	$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $\bar{n} = (A;\ B;\ C)$
Загальне рівняння	$Ax + By + Cz + D = 0$	$\bar{n} = (A;\ B;\ C)$

Отже, для завдання площини достатньо задати *три точки* або *точку й вектор, перпендикулярний шуканої площини*. В обох випадках відповідні рівняння площини зводяться до вигляду, який називається *загальним рівнянням*.

Таким чином, для завдання площини використається набагато менше видів рівнянь, ніж для прямої на площині. Але всі вони зводяться до одного виду – *загальному рівнянню*. Всі інші рівняння можна одержати із загального шляхом нескладних алгебраїчних перетворень.

Приклад Задано точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$, $M_2(-1;\ 0;\ 2)$, $M_3(-2;\ 1;\ 0)$.

а) Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислимо визначник розкладанням за першим рядком:

$(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$, тоді

$5(x-1) - 3(y-2) + (-4)(z-3) = 0$, $5x - 5 - 3y - 4z + 12 = 0$, отже, $5x - 3y - 4z + 13 = 0$.

б) Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;\ 2;\ 3)$, перпендикулярно вектору $\overline{M_2M_3}$.

Знайдемо координати вектора $\overline{M_2M_3}$:

$\overline{M_2M_3} = (-1;\ 1;\ -2)$.

Підставимо координати вектора $\overline{M_2M_3}$ і координати точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$ у загальне рівняння площини «з точкою»:

$-1(x-1)+1(y-2)-2(z-3)=0.$

в) Звести отримане рівняння до загального вигляду.

Розкриємо дужки:

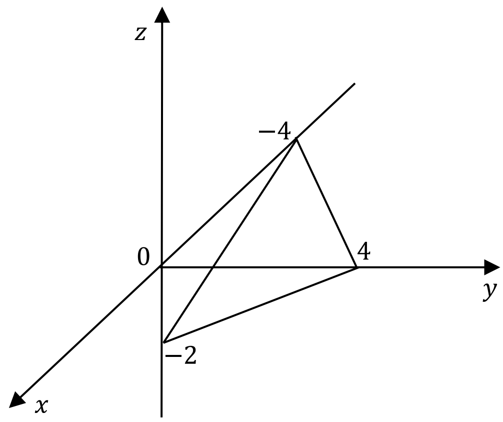
$-x+1+y-2-2z-3=0,$

$x-y+2z+4=0.$

г) Побудувати площину в системі координат.

Для цього запишемо рівняння «у відрізках» на осях:

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{4}+\frac{c}{-2}=1.$$



4.3. Взаємне розташування двох площин у просторі

Нехай дві площини P_1 і P_2 задано загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ відповідно.

Кут між площинами

Площини утворюють два суміжних кута, один з яких дорівнює куту між нормальними векторами $\overline{n_1}=(A_1;\,B_1;\,C_1)$ і $\overline{n_2}=(A_2;\,B_2;\,C_2)$ цих площин, позначимо його через φ.

Тоді $cos\,\varphi=\frac{\overline{n_1 n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}$ або

$$cos\,\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Умовою паралельності площин є колінеарність їх нормальних векторів $\overline{n_1}=(A_1;\,B_1;\,C_1)$ і $\overline{n_2}=(A_2;\,B_2;\,C_2)$, тобто пропорційність їх координат:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Зауваження Якщо додатково виконується умова $\frac{D_1}{D_2}$, то обидві площини збігаються.

Умовою перпендикулярності площин є перпендикулярність їхніх нормальних векторів $\overline{n_1}=(A_1;\,B_1;\,C_1)$ і $\overline{n_2}=(A_2;\,B_2;\,C_2)$, тобто рівність нулю їхнього скалярного добутку:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Відстань від заданої точки $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ до площини P: $Ax+By+Cz+D=0$ визначають за допомогою формули:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

П р и к л а д Знайти відстань від точки $M_0(-1;\ 1;\ 0)$ до площини P: $5x-3y-4z+13=0$.

$$d=\frac{|5(-1)-3\cdot1-4\cdot0+13|}{\sqrt{5^2+3^2+4^2}}=\frac{|-5-3+13|}{\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4.4. Різні види рівнянь прямої у просторі

1. Перший спосіб визначити пряму в просторі – задати точку, що належить прямій і вектор, спрямований уздовж прямій, – *напрямний вектор*. При цьому одержимо *канонічні рівняння прямої*:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

де $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – точка прямої, $\bar{s}=(l;\ m;\ n)$ – *напрямний вектор прямої*.

2. Задаючи дві точки $M_1(x_1;\ y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ прямої, одержимо рівняння прямої, що проходить через дві точки. Як відомо зі стереометрії, дві різні точки в просторі однозначно визначають пряму (*аксіома*).

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, записують аналогічно канонічному рівнянню:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_0}{z_2-z_1}.$$

3. З канонічного рівняння алгебраїчним шляхом можна одержати *параметричні рівняння прямої*, дорівнюючи дроби окремо якомусь параметру t. Потім із цих трьох рівностей виражають координати $(x;\ y;\ z)$ точок прямої:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt,\ t\in R; \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

4. Пряму в просторі можна одержати як результат перетинання двох площин (*аксіома стереометрії*). Отже, задати пряму в просторі можна системою двох рівнянь площин:

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Відповідні нормальні вектори площин $\overline{n_1}=(A_1;\ B_1;\ C_1)$ і $\overline{n_2}=(A_2;\ B_2;\ C_2)$ неколінеарні. Отримані рівняння називаються *загальними рівняннями прямої у просторі*.

Види рівнянь прямої у просторі

Назва рівняння	Вид рівняння	Дані
Канонічні рівняння прямої	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$	$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – точка прямої, $\bar{s}=(l;\ m;\ n)$ – напрямний вектор прямої

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_0}{z_2-z_1}$	$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$,$M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ – дві точки прямої
Параметричні рівняння прямої; векторне рівняння прямої	$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt,\ t\in R \\ z=z_0+nt \end{cases}$	$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – точка прямої, $\bar{s}=(l;\ m;\ n)$ – напрямний вектор прямої
Загальні рівняння прямої	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – площини, лінією перетину яких є пряма

П р и к л а д Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку *M(1; –1; 2)* паралельно вектору $\bar{g}=(0;-2;3)$.

Рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}.$$

У цьому випадку запис *нуля в знаменнику* вважається припустимим, тому що це *символічний* запис, що рівносильний системі двох рівнянь: $\begin{cases} -2(x-1)=0(y+1) \\ 3(y+1)=-2(z-2) \end{cases}$ або $\begin{cases} x=1 \\ 3y+2z-1=0 \end{cases}$.

Тобто ми привели канонічні рівняння до виду загальних рівнянь.

Розглянемо докладніше зв'язок рівнянь прямої у просторі. Як й у випадку прямої на площині, при розв'язуванні задач корисно вміти переходити від одного виду рівняння прямій до іншого виду рівнянь. Якщо перехід від канонічних рівнянь до параметричного не становить праці, то перехід від загальних рівнянь до канонічного вимагає деякого зусилля. Ідея такого переходу, що являє собою суто алгебраїчну операцію, стає зовсім очевидною, якщо ми розглянемо геометричну ілюстрацію цього переходу.

Нехай пряма L задана своїми загальними рівняннями:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Щоб записати *канонічні рівняння* цієї прямої, потрібно:

1) Знайти точку $M_0(x_0; y_0;\ z_0)$ на прямій. Для цього одну з координат беруть довільною, а дві інші визначають з системи $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$.

2) Знайти напрямний вектор $\bar{s}$ прямої.

Оскільки пряма, а, значить, і її напрямний вектор, перпендикулярна нормальним векторам $\overline{n_1}=(A_1;\ B_1;\ C_1)$ і $\overline{n_2}=(A_2;\ B_2;\ C_2)$ площин, то за вектор $\bar{s}$ можна взяти векторний добуток векторів $\overline{n_1}$ і $\overline{n_2}$:

$$\bar{s}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases} 5x+y+z+=0; \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

Знайдемо будь-яку точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на прямій. Для цього покладемо в обох рівняннях $x=0$ та розв'яжемо систему

$\begin{cases} y+z=0 \\ 3y-2z+5=0, \end{cases}$ тоді $\begin{cases} y=-1; \\ z=1. \end{cases}$

Отже, $M_0(0;\ -1;\ -1) \in L$.

Знайти напрямний вектор $\bar{s}$ прямої:

$$\bar{s}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\bar{\imath}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}-\bar{\jmath}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=-5\bar{\imath}+12\bar{\jmath}+13\bar{k}.$$

Отже, знаючи точку M_0 і вектор $\bar{s}$, запишемо канонічні рівняння:

$$\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}.$$

Зауваження Розглянута задача допомагає сформулювати геометричний зміст розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомими:

1) якщо система має нескінченно багато розв'язків, це відповідає випадку, коли площини перетинаються по прямій;

2) якщо система не має розв'язків, відповідні площини паралельні.

Отже, ми простежуємо зв'язки між алгебраїчною мовою опису математичного об'єкта та геометричною інтерпретацією алгебраїчних співвідношень.

4.5. Взаємне розташування двох прямих у просторі

Нехай дві прямі L_1 і L_2 задано канонічними рівняннями:

$$L_1: \frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}=\frac{z-z_0}{n_1}, \qquad L_2: \frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{n_2}.$$

Тоді **кут** φ **між прямими** знаходять за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{s_1}\,\overline{s_2}}{|\overline{s_1}||\overline{s_2}|}$$

або

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Умовою паралельності прямих L_1 і L_2 є колінеарність їхніх напрямних векторів $\overline{s_1}=(l_1;\ m_1;\ n_1)$ і $\overline{s_2}=(l_2;\ m_2;\ n_2)$, тобто пропорційність їхніх координат:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Умовою перпендикулярності прямих L_1 і L_2 є перпендикулярність їх напрямних векторів $\overline{s_1}=(l_1;\ m_1;\ n_1)$ і $\overline{s_2}=(l_2;\ m_2;\ n_2)$, тобто рівність нулю їхнього скалярного добутку:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Приклад Знайти кут між прямими

$$L_1: \begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \text{ і } L_2: \begin{cases} x = 5t \\ y = 1 + t. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Відповідно до попередньої задачі для L_1 напрямний вектор має вигляд $\bar{s_1} = (-5;\ 12;\ 13)$. Для L_2 напрямний вектор $\bar{s_2} = (5;\ 1;\ 1)$. Отже,

$$cos\,\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{-5\cdot 5 + 12\cdot 13 + 13\cdot 1}{\sqrt{5_2^2 + 12_2^2 + 13_2^2}\cdot\sqrt{5_2^2 + 1_2^2 + 1_2^2}} = 0,$$

звідки $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

4.6. Взаємне розташування прямої і площини

<u>Означення</u>. *Кутом між прямою* L *і площиною* P називають кут між прямою L та її проекцією на площину P.

Нехай пряма L і площина P задані рівняннями:

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad P: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Кут φ між прямою L і площиною P знаходять за формулою:

$$sin\,\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Умовою паралельності прямої L і площини P є перпендикулярність векторів $\bar{n} = (A;\ B;\ C)$ і $\bar{s} = (l;\ m; n)$:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Умовою перпендикулярності прямої L і площини P є колінеарність векторів $\bar{n} = (A;\ B;\ C)$ і $\bar{s} = (l;\ m; n)$, тобто пропорційність їхніх координат:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Питання для самоконтролю

1. *Що називають системою координат у просторі?*
2. *Як установити, чи лежить точка на даній поверхні?*
3. *Як можна визначити лінію у просторі?*
4. *Сформулюйте основні задачі аналітичної геометрії у просторі.*
5. *Запишіть рівняння площини, що проходить через три задані точки.*
6. *Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.*
7. *Запишіть рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору.*
8. *Запишіть загальне рівнянням площини.*
9. *Як можна знайти кут між площинами?*
10. *Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності площин.*
11. *Як знайти відстань від заданої точки до площини?*
12. *Які види рівнянь прямої у просторі Ви знаєте?*
13. *Як знайти кут між прямими у просторі?*
14. *Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямих у просторі.*

15. Як визначити кут між прямою і площиною?

16. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

Завдання для самостійного розв'язання

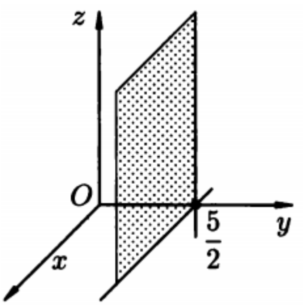
1. *Побудувати площину, що задається рівнянням:*
   a) $2x - y = 5$;
   b) $x + z - 1 = 0$;
   c) $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.
2. *Скласти рівняння площини, що проходить через:*
   a) *точку* $M(-2; 3; 1)$ *паралельно площині* Oxy;
   b) *точку* M *і вісь* Oy.
3. *Скласти рівняння площини, що проходить через:*
   a) *точку* $A(5; -4; 6)$ *перпендикулярно осі* Ox;
   b) *точку* A *і відтинає рівні відрізки на додантіх координатних піввісях.*
4. *Записати рівняння площини, що проходить через точки* $M_1(2; 0; -1)$ *і* $M_2(-3; 1; 3)$ *паралельно вектору* $\bar{s} = (1; 2; -1)$.
5. *Записати рівняння площини, що проходить через три точки* $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(2; 2; 3)$ *і* $M_3(0; -3; 1)$.
6. *Знайти гострий кут між площинами:*
   a) $11x - 8y - 7z - 15 = 0$, $4x - 10y + z - 2 = 0$;
   b) $2x + 3y - 4z + 4 = 0$, $5x - 2y + z - 3 = 0$.
7. *Записати рівняння площини, що паралельна до площини* $x - 2y + 2z + 5 = 0$ *та віддалена від точки* $M(3; 4; -2)$ *на відстань* $d = 5$.
8. *Скласти рівняння площини, що проходить через точки* $M_1(-1; 3; 0)$ *і* $M_2(2; 4; -1)$ *перпендикулярно до площини* $x - 2y + 3z - 10 = 0$.
9. *Записати канонічні рівняння прямої, що проходять через точку* $M_0(4; 3; -2)$ *паралельно:*
   a) *вектору* $\bar{a} = (3; -6; 5)$;
   b) *прямій* $\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0 \\ 2x - y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$.
10. *Записати параметричне рівняння прямої:*
    a) *яка проходить через точку* $(1; 0; -1)$ *паралельно вектору* $\bar{a} = (2; 3; 0)$;
    b) *яка проходить через точки* $(2; 2; 2)$ *і* $(6; 2; 1)$.
11. *Знайти гострий кут між прямими:*
    $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}$, $\begin{cases} x - y + 2z - 8 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$.
12. *Знайти величину кута між прямою* $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+7}{-2}$ *і площиною* $4x - 2y - 2z - 3 = 0$.
13. *Установити взаємне розташування прямої та площини:*
    a) $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ *і* $5x - 6y + 2z - 10 = 0$;
    b) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ *і* $3x + y - 4z - 15 = 0$.

14. Записати рівняння площини, що проходить через паралельні прямі
$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ *і* $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{-1}$.

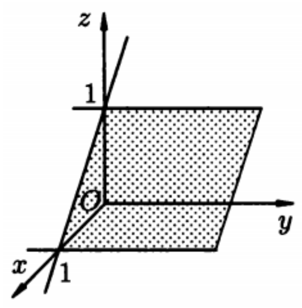
15. Знайти координати точки перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ *з площею*
$3x - y + 2z + 5 = 0$.

Відповіді

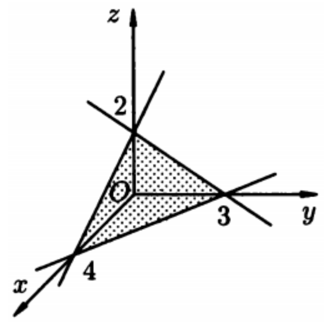
1a.



1b.



1c.



2a. $z - 1 = 0$.   *2b.* $x + 2z = 0$.
3a. $x - 5 = 0$.   *3b.* $x + y + z - 7 = 0$.
4. $9x + y + 11z - 7 = 0$.   *5.* $16x - 6y - z - 17 = 0$.   *6a.* $\frac{\pi}{4}$.   *6b.* $\frac{\pi}{2}$.
7. $x - 2y + 2z + 24 = 0$ *і* $x - 2y + 2z - 6 = 0$.   *8.* $x - 10y - 7z + 31 = 0$.
9a. $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z+2}{5}$.   *9b.* $\frac{x-4}{-11}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+2}{-7}$.
10a. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 \end{cases}$.   *10b.* $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$.   *11.* $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{35}$.   *12.* $\frac{\pi}{6}$.
13 a. Пряма перетинає площу.   *13b. Пряма лежить у площині.*
14. $2x + y - z - 1 = 0$.   *15.* $(-3; -4; 0)$.

ТЕМА 5. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5.1. Поняття поверхні другого порядку

Означення *Поверхнею другого порядку* називають сукупність точок (геометричне місце точок) простору, які в деякій декартовій системі координат $Oxyz$ задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$,

де a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} – дійсні числа, причому хоча б одне із чисел a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не дорівнює нулю.

Найважливіші поверхні другого порядку: *еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди*.

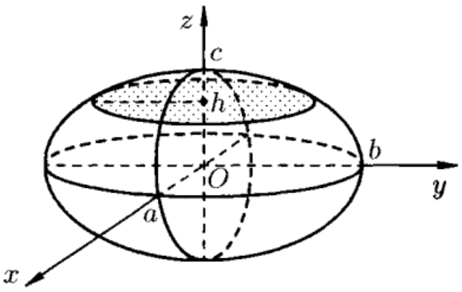
Означення *Еліпсоїдом* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

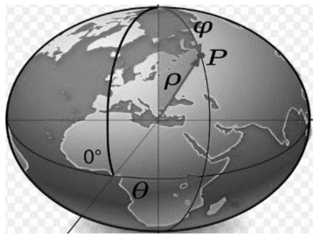
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Величини $2a,\ 2b,\ 2c$ називають *осями*; $a,\ b,\ c$ називаються *півосями* еліпсоїда.

Будь-які перерізи еліпсоїда площинами, паралельними координатним площинам – еліпси.

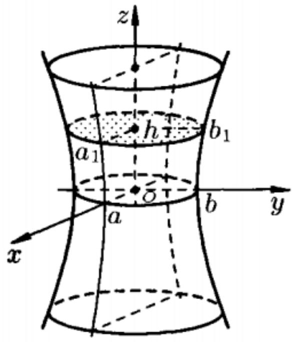
Деякі приклади еліпсоїдів у житті





Означення *Однопорожнинним гіперболоїдом* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

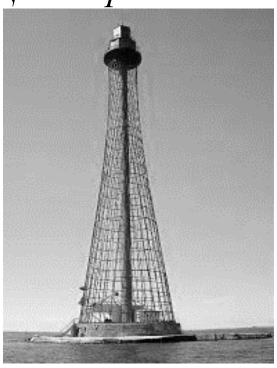


Будь-які перерізи однопорожнинного гіперболоїда площинами, паралельними координатній площині Oxy, $z=const$ – еліпси. Будь-які перерізи однопорожнинного гіперболоїда площинами $x=const$ або $y=const$ – гіперболи.

Означення *Двопорожнинним гіперболоїдом* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

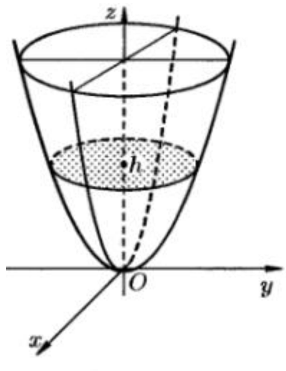
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Деякі приклади гіперболоїдів у житті



Означення *Еліптичним параболоїдом* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

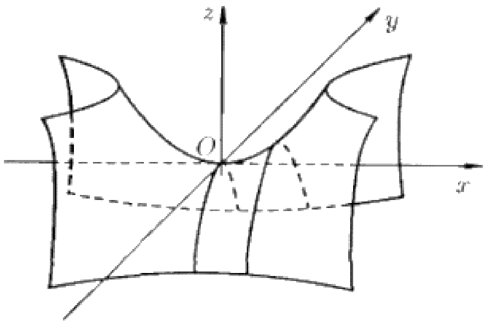
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z.$$



Будь-які паралельні перерізи еліптичного параболоїда є еліпси або параболи.

<u>**Означення**</u> *Гіперболічним параболоїдом* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

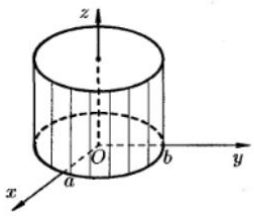


Будь-які паралельні перерізи гіперболічного параболоїда є гіперболи або параболи.

5.2. Циліндричні та конічні поверхні

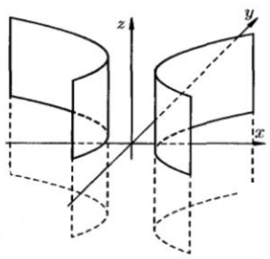
<u>**Означення**</u> *Еліптичним циліндром* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Еліптичний циліндр називають *круговим*, якщо $a = b$.

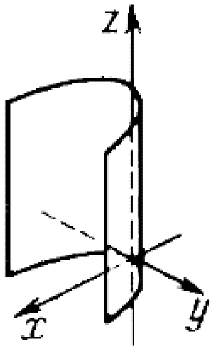


<u>**Означення**</u> *Гіперболічним циліндром* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



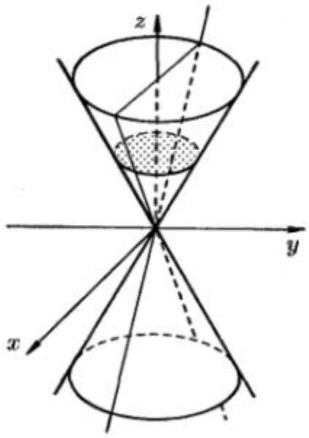
<u>**Означення**</u> *Параболічним циліндром* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням $y^2 = 2px$.



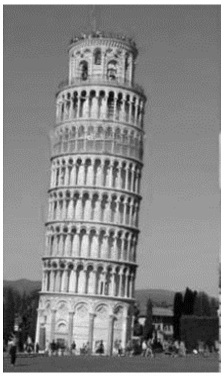
<u>**Означення**</u> *Конусом* називають поверхню, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

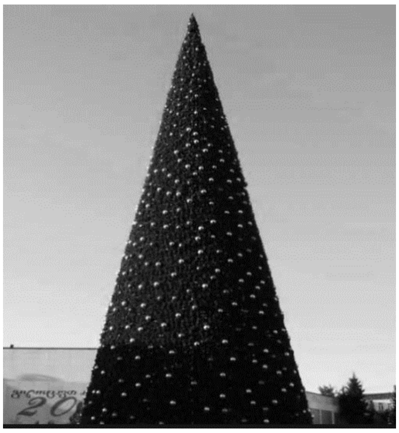
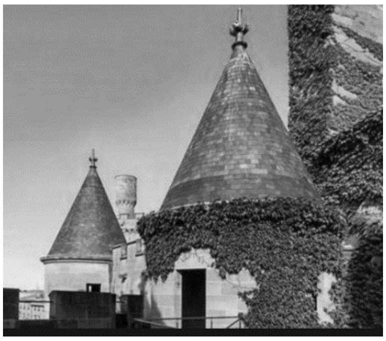
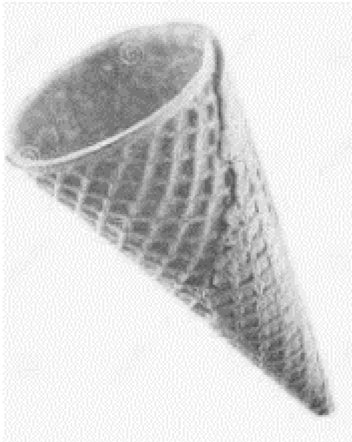
Конус називають круговим, якщо $a = b$.



Деякі приклади циліндричних і конічних поверхонь у житті





Питання для самоконтролю

1. *Що називають поверхнею другого порядку?*
2. *Запишіть рівняння еліпсоїда.*
3. *Запишіть рівняння однопорожнинного гіперболоїда.*
4. *Складіть рівняння двопорожнинного гіперболоїда.*
5. *Яке рівняння еліптичного параболоїда?*
6. *Складіть рівняння гіперболічного параболоїда.*
7. *Запишіть рівняння еліптичного циліндра.*
8. *Складіть рівняння гіперболічного циліндра.*
9. *Запишіть рівняння параболічного циліндра.*
10. *Яке рівняння має конус?*

Завдання для самостійного розв'язання

1. Записати рівняння сфери з цетром у точці $M_0(-5; 3; 2)$, яка торгається площини $2x-2y+z-4=0$.

<u>Зауваження.</u> Рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ відповідає сфері радіуса R із центром у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

2. Скласти рівняння сфери, яка торкається двох паралельних площин $6x-3y-2z-35=0$ і $6x-3y-2z+63=0$, якщо її центр розташовано на прямій $\frac{x-11}{6}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+3}{-2}$.

3. Знайти точку перетину поверхні $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ і прямої $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

4. При яких значеннях параметра p площина $2x-2y-z=p$ торкається сфери

$x^2 + y^2 + z^2 = 81$?

5. Установити, при яких m площина $y + mz = 1$ перетинає двопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = -1$:

a) по еліпсу;

b) по гіперболі.

6. Установити, при яких m площина $my + z = 2$ перетинає еліптичний параболоїд $y = \frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{2}$:

a) по еліпсу;

b) по параболі.

7. Установити вид поверхонь:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$;

b) $x^2 + y^2 - 4z^2 = -1$;

c) $3x^2 + y^2 = 2a(z - 2)$;

d) $2y = \frac{x^2}{1} - \frac{z^2}{4}$;

e) $y^2 = 15z$;

f) $z = 5 - x^2 - y^2$;

g) $x^2 - 9y^2 = 4z^2$;

h) $x^2 = 5y - 1$;

i) $2x^2 - 4x + y^2 - 6y - 4z^2 = 0$;

j) $2x^2 - 7y^2 + 11z^2 = 0$;

k) $x + 2 = y^2 - 3y + 3z^2 + 6z$;

l) $x^2 = yz$.

Відповіді

1. $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36$.
2. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 49$.
3. $M(4; -3; 2)$.
4. $p = \pm 27$.

5a. $1 < |m| < \sqrt{2}$. *5b.* $|m| < 1$.

6a. $m \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. *6b.* $m = 0$.

7.

a) Еліпсоїд, $a = 2$, $b = 4$, $c = 9$.

b) Двопорожнинний гіперболоїд з віссю Oz.

c) Еліптичний параболоїд з вершиною в точці $(0; 0; 2)$, спрямованою вгору, якщо $a > 0$, униз, якщо $a < 0$; вісь Oz, якщо $a = 0$.

d) Гіперболічний параболоїд.

e) Параболічний циліндр.

f) Параболоїд з вершиною в точці $(0; 0; 5)$.

g) Конус з віссю Oz.

h) Параболічний циліндр.

i) Однопорожнинний гіперболоїд.

j) Конус з віссю Oy.

k) Еліптичний параболоїд.

l) Конус.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ЗАВДАННЯ № 1.

a) Виконати дії над матрицами. Знайти $a\cdot A+b\cdot B$; $c\cdot B+d\cdot A$; $m\cdot A-n\cdot B$; $p\cdot B-q\cdot A$;

b) Виконати дії над матрицами. Знайти $A\cdot B$ *і* $B\cdot A$, $C\cdot D$ *і* $D\cdot C$;

c) Обчислити визначники матриць A і B.

Варіант 1.

a) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-9 & 9 & 6\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ -4 & 2 & -6\\ 7 & 3 & 1\end{pmatrix},$

$a=5; b=-3; \mathrm{c}=-9; d=4; m=-8; n=-5; \mathrm{p}=3; q=4.$

b) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 9 & 8 & 7\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}2\\ -6\\ -3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ $і\ C=\begin{pmatrix}-5 & 9 & 6\\ 3 & 5 & 8\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-8 & -9\\ 5 & 6\\ 9 & 2\end{pmatrix}.$

Варіант 2.

a) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 9 & -9\\ 8 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 0 & 2 & -6\\ 7 & 1 & 1\end{pmatrix},$

$a=-2; b=-3; \mathrm{c}=5; d=8; m=-8; n=9; \mathrm{p}=3; q=-3.$

b) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 9 & 5 & 7\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ -2\\ 9\\ 8\end{pmatrix}$ $і\ C=\begin{pmatrix}-8 & 9 & 0\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}7 & -9\\ 8 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}.$

Варіант 3.

a) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-3 & 9 & 2\\ 8 & 9 & 1\\ -5 & 4 & 2\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 1 & -9 & 7\\ 7 & 1 & 1\end{pmatrix},$

$a=5; b=-3; \mathrm{c}=-2; d=2; m=-8; n=6; \mathrm{p}=3; q=-5.$

b) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-9 & 7 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}-3\\ -1\\ 8\\ 9\\ 2\end{pmatrix}$ $і\ C=\begin{pmatrix}-8 & 9 & 0\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 4 & 1\\ 9 & 0\end{pmatrix}.$

Варіант 4.

a) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 9 & 2\\ 8 & -6 & 1\\ -5 & 2 & 2\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ -5 & 3 & 7\\ 7 & 1 & -7\end{pmatrix},$

$a=2; b=-7; \mathrm{c}=-7; d=4; m=-8; n=-6; \mathrm{p}=9; q=6.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}\; i\; C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix},\, D = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$

Варіант 5.

$a)\, A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 1 & -7 & 7 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix},$

$a = -8; b = -3; c = -7; d = 6; m = -5; n = 6; p = 2; q = -5.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 4 & -8 & 7 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}\; i\; C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix},\, D = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 6.

$a)\, A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ -5 & 8 & -7 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -7 \\ 7 & 2 & -5 \end{pmatrix},$

$a = 5; b = 6; c = -5; d = 6; m = -7; n = -2; p = -7; q = 4.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}\; i\; C = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix},\, D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -8 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$

Варіант 7.

$a)\, A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 \\ 8 & -7 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 4 & -9 & 7 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix},$

$a = 4; b = -3; c = -7; d = 6; m = -8; n = -6; p = 3; q = 7.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}\; i\; C = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix},\, D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 8.

$a)\, A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \\ -5 & -7 & 2 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$a = 5; b = 2; c = -8; d = 6; m = 7; n = -6; p = -6; q = 5.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}\; i\; C = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix},\, D = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$

Варіант 9.

$a) \, A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 8 & 9 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix},$

$a = 4; b = 7; c = -2; d = 5; m = 8; n = -6; p = -4; q = 6.$

$b) \, A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 7 & 1 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}.$

Варіант 10.

$a) \, A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & -9 & 7 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix},$

$a = -5; b = 7; c = 2; d = 6; m = 8; n = -5; p = -2; q = 5.$

$b) \, A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 11.

$a) \, A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -6 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$a = -3; b = 3; c = -7; d = 2; m = -8; n = 6; p = 3; q = -5.$

$b) \, A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}.$

Варіант 12.

$a) \, A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -9 & 2 & -2 \\ 1 & -9 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{pmatrix},$

$a = 5; b = -5; c = 2; d = 6; m = -8; n = -2; p = 8; q = -3.$

$b) \, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$

Варіант 13.

$a) \, A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \\ 7 & 1 & 7 \end{pmatrix},$

$a = 5; b = -6; c = -2; d = 6; m = -4; n = -6; p = 2; q = 4.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 2 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}.$

Варіант 14.

$a)\, A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & -8 \end{pmatrix},$

$a = 5; b = -2; c = 7; d = 6; m = -9; n = -6; p = 2; q = 5.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 7 & -7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$

Варіант 15.

$a)\, A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 7 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 7 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix},$

$a = 2; b = -7; c = -7; d = 6; m = -8; n = 6; p = -2; q = 5.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 & 5 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 16.

$a)\, A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \\ -9 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$a = 5; b = -3; c = -2; d = 6; m = 7; n = 5; p = -4; q = -2.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 7 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}.$

Варіант 17.

$a)\, A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & -9 & -2 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix},$

$a = -8; b = 4; c = -2; d = 3; m = -8; n = 8; p = 3; q = -4.$

$b)\, A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \; i \; C = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Варіант 18.

$a)$A $=\begin{pmatrix}-9 & 9 & 6\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ -4 & 2 & -6\\ 7 & 3 & 1\end{pmatrix}$,
$a=5; b=-3;$ c $=-9; d=4; m=-8; n=-5;$ p $=3; q=4$.

$b)$A $=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 9 & 8 & 7\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}2\\ -6\\ -3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ $i\ C=\begin{pmatrix}-5 & 9 & 6\\ 3 & 5 & 8\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-8 & -9\\ 5 & 6\\ 9 & 2\end{pmatrix}$.

Варіант 19.

$a)$A $=\begin{pmatrix}2 & 9 & -9\\ 8 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 0 & 2 & -6\\ 7 & 1 & 1\end{pmatrix}$,
$a=-2; b=-3;$ c $=5; d=8; m=-8; n=9;$ p $=3; q=-3$.

$b)$A $=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 9 & 5 & 7\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ -2\\ 9\\ 8\end{pmatrix}$ $i\ C=\begin{pmatrix}-8 & 9 & 0\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7 & -9\\ 8 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}$.

Варіант 20.

$a)$A $=\begin{pmatrix}-3 & 9 & 2\\ 8 & 9 & 1\\ -5 & 4 & 2\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 1 & -9 & 7\\ 7 & 1 & 1\end{pmatrix}$,
$a=5; b=-3;$ c $=-2; d=2; m=-8; n=6;$ p $=3; q=-5$.

$b)$A $=\begin{pmatrix}-9 & 7 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}-3\\ -1\\ 8\\ 9\\ 2\end{pmatrix}$ $i\ C=\begin{pmatrix}-8 & 9 & 0\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 4 & 1\\ 9 & 0\end{pmatrix}$.

Варіант 21.

$a)$A $=\begin{pmatrix}1 & 9 & 2\\ 8 & -6 & 1\\ -5 & 2 & 2\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ -5 & 3 & 7\\ 7 & 1 & -7\end{pmatrix}$,
$a=2; b=-7;$ c $=-7; d=4; m=-8; n=-6;$ p $=9; q=6$.

$b)$A $=\begin{pmatrix}-9 & 0 & 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}2\\ 7\\ -8\\ 9\\ -9\end{pmatrix}$ $i\ C=\begin{pmatrix}3 & 9 & -8\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -8 & 1\\ 9 & 3\end{pmatrix}$.

Варіант 22.

$a)$A $=\begin{pmatrix}-3 & 9 & 2\\ 8 & 4 & 7\\ 7 & 4 & 2\end{pmatrix}$, B $=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 1 & -7 & 7\\ 7 & 4 & 1\end{pmatrix}$,
$a=-8; b=-3;$ c $=-7; d=6; m=-5; n=6;$ p $=2; q=-5$.

$b)$ $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Варіант 23.

$a)$ $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ -5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -7 \\ 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$,

$a = 5; b = 6; c = -5; d = 6; m = -7; n = -2; p = -7; q = 4.$

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -8 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Варіант 24.

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 \\ 8 & -7 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 4 & -9 & 7 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$a = 4; b = -3; c = -7; d = 6; m = -8; n = -6; p = 3; q = 7.$

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Варіант 25.

$a)$ $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \\ -5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$a = 5; b = 2; c = -8; d = 6; m = 7; n = -6; p = -6; q = 5.$

$b)$ $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ № 2. *При виготовленні продукції чотирьох видів витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задаються таблицею в умовних одиницях:*

Ресурси	*Витрати на одну деталь кожного виду*			
	1	*2*	*3*	*4*
Матеріали	a_1	a_2	a_3	a_4
Робоча сила	a_5	a_6	a_7	a_8
Електроенергія	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

Обчислити загальну потребу в матеріалах, робочій силі та електроенергії для виготовлення заданої кількості продукції кожного виду:

Варіант	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	y_1	y_2	y_3	y_4
1.	1	2	2	3	4	5	3	4	5	3	4	5	7	6	8	9
2.	4	3	1	1	2	4	5	6	2	1	1	2	11	6	8	8
3.	3	3	2	1	4	5	1	4	4	1	2	2	11	6	7	9
4.	1	2	2	1	4	4	3	5	1	1	2	5	6	11	9	7
5.	4	5	2	3	3	2	5	4	2	5	3	2	7	9	12	8
6.	3	5	2	3	4	5	2	4	4	3	2	3	6	11	9	12
7.	5	3	2	4	1	4	2	3	4	3	5	4	12	11	6	9
8.	2	1	3	6	4	6	3	1	2	5	2	2	6	8	6	12
9.	2	1	3	4	3	4	3	1	4	1	2	4	7	9	8	6
10.	5	1	2	5	1	5	2	1	4	3	5	4	9	12	11	8
11.	2	5	5	4	4	4	5	5	3	5	2	3	7	9	9	7
12.	3	3	5	4	3	4	5	3	4	2	3	4	11	8	10	6
13.	3	5	2	3	4	5	2	4	4	3	2	3	12	9	10	6
14.	5	3	2	4	1	4	2	3	4	3	5	4	7	14	11	8
15.	2	1	3	6	4	6	3	1	2	5	2	2	6	6	9	12
16.	2	1	3	4	3	4	3	1	4	1	2	4	9	10	9	16
17.	3	4	3	2	4	1	3	2	4	1	4	3	11	7	11	7
18.	4	4	1	3	6	4	5	3	6	4	2	1	10	6	8	12
19.	2	2	1	3	4	3	1	3	4	3	4	1	9	7	6	10
20.	4	4	1	2	5	1	3	2	5	1	4	1	12	10	9	12
21.	4	4	5	5	4	4	5	5	4	4	3	5	8	11	10	9
22.	3	3	3	5	4	3	2	5	4	3	4	3	11	7	6	8
23.	4	4	5	2	3	4	3	2	3	4	3	5	13	9	13	12
24.	3	4	3	2	4	1	3	2	4	1	4	3	11	8	10	6
25.	4	4	1	3	6	4	5	3	6	4	2	1	6	10	12	8

ЗАВДАННЯ № 3. *Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера, методом Гауса, матричним методом і зробити перевірку.*

Варіант 1.

а) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -4, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + 2z = 0. \\ x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$

Варіант 2.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 + 2_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 4y = -5 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -4 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Варіант 3.

а) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+6y+4z=6 \\ 3x+10y+8z=21 \end{cases}$.

Варіант 4.

а) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2, \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 5x_1-9x_2+2x_3=-4 \\ -3x_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=-1 \end{cases}$, *в* $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+2z=0. \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$

Варіант 5.

а) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-3 \\ 3x_1+x_2+x_3=5 \\ 3x_1-5x_2-6x_3=-9 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$.

Варіант 6.

а) $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} -3x_1+4x_2+2x_3=12 \\ 3x_1-5x_2-2x_3=-12, \\ -2x_1+9x_2+x_3=7 \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 4x+5y+6z=8. \\ 7x+8y=2 \end{cases}$

Варіант 7.

а) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+2z=0, \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1. \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$

Варіант 8.

а) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_2+4x_3+6=0 \\ x_1+x_3=1 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 5x-3y+4z=6 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$.

Варіант 9.

а) $\begin{cases} 3x+2y+z=-8 \\ 2x+3y+z=-3, \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 9x_1+x_2+2x_3=-12 \\ -6x_1+x_2-2x_3=6 \\ 4x_1+x_2+x_3=-5 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 3x-2y+z=10 \\ x+5y-2z=-15. \\ 2x-2y-z=3 \end{cases}$

Варіант 10.

а) $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 4x+5y+6z=19, \\ 7x+8y=1 \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=3 \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} 5x+3y+3z=48 \\ 2x+6y-3z=18. \\ 6x-3y+2z=21 \end{cases}$

Варіант 11.

а) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3=-5 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 5x+y-3z=-2 \\ 4x+3y+2z=16 \\ 2x-3y+z=17 \end{cases}$.

Варіант 12.

а) $\begin{cases} x+2y+3z=-4 \\ 2x+6y+4z=-6 \\ 3x+10y+8z=-8 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-2 \\ 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ -x_1+2x_2-2x_3=1 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$.

Варіант 13.

а) $\begin{cases} 3x+2y+z=3 \\ 5x-2y-2z=3 \\ x+y-z=-2 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} -7x_1+x_2+2x_3=20 \\ 6x_1+x_2-2x_3=-18 \\ -4x_1+x_2+x_3=11 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 4x+5y+6z=8 \\ 7x+8y=2 \end{cases}$.

Варіант 14.

а) $\begin{cases} 5x+8y+z=2 \\ 3x-2y+6z=-7 \\ 2x+y-z=-5 \end{cases}$, *б* $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3=3 \\ 3x_1-2x_2+x_3=2 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 2x-7y+z=-4 \\ 3x+y-z=17 \\ x-y+3z=3 \end{cases}$.

Варіант 15.

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ x+4y+2z=-1 \\ x-4y=-5 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+2x_3=5 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 2x-7y+z=-4 \\ 3x+y-z=17 \\ x-y+3z=3 \end{cases}$.

Варіант 16.

а) $\begin{cases} 2x-7y+z=-4 \\ 3x+y-z=17 \\ x-y+3z=3 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 4x_1+3x_2-2x_3=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1 \\ x_1+2x_2+x_3=-3 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 4x+3y+3z=4 \end{cases}$.

Варіант 17.

а) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 4x+5y+6z=8 \\ 7x+8y=2 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} -11x_1+x_2+2x_3=28 \\ 9x_1+x_2-2x_3=-24 \\ -6x_1+x_2+x_3=15 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 4x+3y+3z=4 \end{cases}$.

Варіант 18.

а) $\begin{cases} 3x+2y+z=-8 \\ 2x+3y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 9x_1+x_2+2x_3=-12 \\ -6x_1+x_2-2x_3=6 \\ 4x_1+x_2+x_3=-5 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 3x-2y+z=10 \\ x+5y-2z=-15 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases}$.

Варіант 19.

а) $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 4x+5y+6z=19 \\ 7x+8y=1 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=3 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 5x+3y+3z=48 \\ 2x+6y-3z=18 \\ 6x-3y+2z=21 \end{cases}$.

Варіант 20.

а) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3=-5 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 5x+y-3z=-2 \\ 4x+3y+2z=16 \\ 2x-3y+z=17 \end{cases}$.

Варіант 21.

а) $\begin{cases} x+2y+3z=-4 \\ 2x+6y+4z=-6 \\ 3x+10y+8z=-8 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-2 \\ 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ -x_1+2x_2-2x_3=1 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$.

Варіант 22.

а) $\begin{cases} 3x+2y+z=3 \\ 5x-2y-2z=3 \\ x+y-z=-2 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} -7x_1+x_2+2x_3=20 \\ 6x_1+x_2-2x_3=-18 \\ -4x_1+x_2+x_3=11 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 4x+5y+6z=8 \\ 7x+8y=2 \end{cases}$.

Варіант 23.

а) $\begin{cases} 5x+8y+z=2 \\ 3x-2y+6z=-7 \\ 2x+y-z=-5 \end{cases}$, *б* $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3=3 \\ 3x_1-2x_2+x_3=2 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 2x-7y+z=-4 \\ 3x+y-z=17 \\ x-y+3z=3 \end{cases}$.

Варіант 24.

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ x+4y+2z=-1 \\ x-4y=-5 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+2x_3=5 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} 2x-7y+z=-4 \\ 3x+y-z=17 \\ x-y+3z=3 \end{cases}$.

Варіант 25.

а) $\begin{cases} 2x-7y+z=-4 \\ 3x+y-z=17 \\ x-y+3z=3 \end{cases}$, *б)* $\begin{cases} 4x_1+3x_2-2x_3=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1 \\ x_1+2x_2+x_3=-3 \end{cases}$, *в)* $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 4x+3y+3z=4 \end{cases}$.

ЗАВДАННЯ № 4. З*адано трикутник ABC, A* (x_1, y_1), *B* (x_2, y_2), *C* (x_3, y_3). *Знайти:*

1) *AB, BC, AC;*
2) *площу трикутника ABC;*
3) *медіану BM;*
4) *бісектрису AD;в – и*
5) *координати точки T, що ділить відрізок AB у відношенні* t.

Варіант 1. $x_1 = 1, y_1 = -6, x_2 = 3, y_2 = -2, x_3 = -5, y_3 = 7, t = 2:3.$

Варіант 2. $x_1 = 9, y_1 = 6, x_2 = -6, y_2 = 2, x_3 = -4, y_3 = -7, t = 1:3.$

Варіант 3. $x_1 = -7, y_1 = 6, x_2 = -2, y_2 = 4, x_3 = 5, y_3 = -7, t = 2:1.$

Варіант 4. $x_1 = -9, y_1 = -3, x_2 = 3, y_2 = 1, x_3 = -5, y_3 = 5, t = 2:1.$

Варіант 5. $x_1 = -9, y_1 = 6, x_2 = 3, y_2 = 2, x_3 = -4, y_3 = -7, t = 4:1.$

Варіант 6. $x_1 = -8, y_1 = 6, x_2 = -3, y_2 = -6, x_3 = 5, y_3 = 5, t = 1:3.$

Варіант 7. $x_1 = -8, y_1 = 2, x_2 = 3, y_2 = 4, x_3 = 5, y_3 = -5, t = 2:3.$

Варіант 8. $x_1 = -1, y_1 = -3, x_2 = 3, y_2 = -2, x_3 = 5, y_3 = 1, t = 1:2.$

Варіант 9. $x_1 = 1, y_1 = 6, x_2 = 3, y_2 = -2, x_3 = -5, y_3 = -7, t = 2:3.$

Варіант 10. $x_1 = 1, y_1 = -8, x_2 = -3, y_2 = -1, x_3 = 5, y_3 = 3, t = 2:1.$

Варіант 11. $x_1 = -5, y_1 = 6, x_2 = -5, y_2 = 2, x_3 = 5, y_3 = -9, t = 3:4.$

Варіант 12. $x_1 = 1, y_1 = -4, x_2 = 3, y_2 = 2, x_3 = -5, y_3 = -7, t = 2:1.$

Варіант 13. $x_1 = 7, y^1 = 6, x^2 = -3, y^2 = -2, x_3 = -5, y_3 = 7, t = 1:3.$

Варіант 14. $x_1 = -7, y_1 = 6, x_2 = -3, y_2 = 2, x_3 = -5, y_3 = 4, t = 2:1.$

Варіант 15. $x_1 = 1, y_1 = -8, x_2 = 3, y_2 = -1, x_3 = 5, y_3 = -3, t = 2:1.$

Варіант 16. $x_1 = -8, y_1 = 2, x_2 = 3, y_2 = -4, x_3 = 5, y_3 = -5, t = 2:3.$

Варіант 17. $x_1 = 1, y_1 = -6, x_2 = -3, y_2 = 2, x_3 = 5, y_3 = -7, t = 2:3.$

Варіант 18. $x_1 = -1, y_1 = -6, x_2 = 3, y_2 = -2, x_3 = 6, y_3 = 4, t = 2:1.$

Варіант 19. $x_1 = -9, y_1 = 6, x_2 = -6, y_2 = 2, x_3 = 4, y_3 = -7, t = 2:3.$

Варіант 20. $x_1 = 2, y_1 = 6, x_2 = -2, y_2 = -4, x_3 = -5, y_3 = 5, t = 2:3.$

Варіант 21. $x_1 = -9, y_1 = -3, x_2 = 3, y_2 = 1, x_3 = -5, y_3 = 3, t = 2:5.$

Варіант 22. $x_1 = -9, y_1 = 2, x_2 = 3, y_2 = -2, x_3 = -4, y_3 = 1, t = 4:3.$

Варіант 23. $x_1 = -6, y_1 = 6, x_2 = -3, y_2 = -6, x_3 = 5, y_3 = 5, t = 1:3.$

Варіант 24. $x_1 = -3, y_1 = 2, x_2 = -3, y_2 = 2, x_3 = 5, y_3 = -5, t = 2:3.$

Варіант 25. $x_1 = 1, y_1 = -3, x_2 = 3, y_2 = -2, x_3 = 5, y_3 = -1, t = 1:2.$

ЗАВДАННЯ № 5. *Скласти рівняння прямої, що проходить через точку з координатами (x_0; y_0), якщо:*

- *вектор нормалі має координати (n_1; n_2);*
- *напрямний вектор має координати (p_1; p_2).*

Знайти відстані від цих прямих до точки з координатами (x_1; y_1).
Записати рівняння «у відрізках». Зробити рисунок.

Варіант 1

$x_0 = 1,\ y_0 = -5,\ n_1 = -6,\ n_2 = 7,\ p_1 = -7,\ p_2 = -9,\ x_1 = -4,\ y_1 = 2.$

Варіант 2

$x_0 = 0,\ y_0 = -5,\ n_1 = 7,\ n_2 = 9,\ p_1 = 0,\ p_2 = 5,\ x_1 = -9,\ y_1 = 5.$

Варіант 3

$x_0 = -1,\ y_0 = -5,\ n_1 = -6,\ n_2 = 7,\ p_1 = -7,\ p_2 = 5,\ x_1 = -6,\ y_1 = 2.$

Варіант 4

$x_0 = 2,\ y_0 = -5,\ n_1 = -5,\ n_2 = 9,\ p_1 = -7,\ p_2 = 5,\ x_1 = -2,\ y_1 = 5.$

Варіант 5

$x_0 = 1,\ y_0 = 5,\ n_1 = -2,\ n_2 = 9,\ p_1 = -7,\ p_2 = 1,\ x_1 = -9,\ y_1 = 0.$

Варіант 6

$x_0 = 1,\ y_0 = -4,\ n_1 = -4,\ n_2 = 9,\ p_1 = -7,\ p_2 = 4,\ x_1 = -9,\ y_1 = 5.$

Варіант 7

$x_0 = 7,\ y_0 = -3,\ n_1 = 0,\ n_2 = 9,\ p_1 = -1,\ p_2 = 5,\ x_1 = -7,\ y_1 = 1.$

Варіант 8

$x_0 = 1,\ y_0 = -5,\ n_1 = -6,\ n_2 = 0,\ p_1 = -7,\ p_2 = 1,\ x_1 = -9,\ y_1 = 1.$

Варіант 9

$x_0 = 9,\ y_0 = -5,\ n_1 = 0,\ n_2 = 9,\ p_1 = -9,\ p_2 = 7,\ x_1 = -3,\ y_1 = 9.$

Варіант 10

$x_0 = 1,\ y_0 = -5,\ n_1 = -6,\ n_2 = 1,\ p_1 = -7,\ p_2 = 5,\ x_1 = -7,\ y_1 = 9.$

Варіант 11

$x_0 = 3,\ y_0 = 0,\ n_1 = -2,\ n_2 = 7,\ p_1 = -7,\ p_2 = 7,\ x_1 = -8,\ y_1 =5.$

Варіант 12

$x_0=1,\ y_0= -1,\ n_1 = -6,\ n_2 = 6,\ p_1 = -8,\ p_2 = 8,\ x_1 = -3,\ y_1 = 4.$

Варіант 13

$x_0 = 3,\ y_0 = -4,\ n_1 = -1,\ n_2 = 5,\ p_1 = -1,\ p_2 = 1,\ x_1 = -4,\ y_1 = 1.$

Варіант 14

$x_0 = 2,\ y_0 = -6,\ n_1 = -5,\ n_2 = 9,\ p_1 = -9,\ p_2 = 5,\ x_1 = -2,\ y_1 = 5.$

Варіант 15

$x_0 = 1,\ y_0 = 5,\ n_1 = -2,\ n_2 = 9,\ p_1 = -4,\ p_2 = 1,\ x_1 = -9,\ y_1 = 1.$

Варіант 16

$x_0 = 1,\ y_0 = -4,\ n_1 = -2,\ n_2 = 9,\ p_1 = -2,\ p_2 = 4,\ x_1 = -9,\ y_1 = 5.$

Варіант 17

$x_0 = 7,\ y_0 = -\ 3,\ n_1 = 0,\ n_2 = 9,\ p_1 = -9,\ p_2 = 5,\ x_1 = -9,\ y_1 = -1.$

Варіант 18

$x_0 = 1,\ y_0 = -5,\ n_1 = -4,\ n_2 = 0,\ p_1 = -7,\ p_2 = -1,\ x_1 = -9,\ y_1 = 1.$

Варіант 19

$x_0 = 9,\ y_0 = -5,\ n_1 = 0,\ n_2 = 4,\ p_1 = -9,\ p_2 = 7,\ x_1 = -3,\ y_1 = 9.$

Варіант 20

$x_0 = 1,\ y_0 = -5,\ n_1 = -6,\ n_2 = 1,\ p_1 = -7,\ p_2 = 4,\ x_1 = -7,\ y_1 = 9.$

Варіант 21

$x_0 = 3,\ y_0 = 0,\ n_1 = -2,\ n_2 = 7,\ p_1 = -7,\ p_2 = 7,\ x_1 = -8,\ y_1 = -5.$

Варіант 22

$x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ n_1 = -6,\ n_2 = 1,\ p_1 = -8,\ p_2 = 8,\ x_1 = -3,\ y_1 = 4.$

Варіант 23

$x_0 = 3,\ y_0 = -6,\ n_1 = -1,\ n_2 = -5,\ p_1 = -1,\ p_2 = 1,\ x_1 = -5,\ y_1 = 1.$

Варіант 24

$x_0 = 3,\ y_0 = 0,\ n_1 = -2,\ n_2 = -7,\ p_1 = -7,\ p_2 = 9,\ x_1 = -8,\ y_1 = -5.$

Варіант 25

$x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ n_1 = -6,\ n_2 = -8,\ p_1 = -8,\ p_2 = 8,\ x_1 = -3,\ y_1 = 2.$

Шановні студенти! У процесі роботи над посібником використано теоретичний матеріал і задачі з наступних навчально-методичних посібників і онлайн джерел, раджу й Вам ознайомитися з ними!

Список рекомендованих джерел

- Барковський В. В., Барковська Н. В. *Вища математика для економістів*. Київ: Центр учбової літератури, 2010. 448 с.
- Булдигін В. В., Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія*: навч. посібник. Київ: ТВіМС, 2011. 224 с.
- Буценко Ю. П., Диховичний О. О., Тимошенко О. А. *Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс)*. Київ: НТУ України «Київський політехнічний інститут», 2014. 256 с.
- Буценко Ю. П., Диховичний О. О., Тимошенко О. А. *Математичні моделі в економічних задачах. Практикум (І курс).* Київ: НТУ України «Київський політехнічний інститут», 2014. 57 с.
- Васильченко І. П. *Вища математика для економістів: підручник.* Київ: Знання, 2007. 458 с.
- Клепко В. Ю., Голець В. Л. *Вища математика в прикладах і. задачах.* Київ: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
- Кремер Н. Ш. и др. *Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям*. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. 479 с.
- Лунгу К. Н., Письменный Д. Т., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. *Сборник задач по высшей математике. 1 курс.* Москва: Айрис-пресс, 2008. 576 с.
- Ординська З. П., Орловський І. В., Руновська М. К. *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри.* Київ: НТУ України «Київський політехнічний інститут», 2014. 175 с.
- Письменный Д. Т. *Конспект лекций по высшей математике: полный курс.* Москва: Айрис-пресс, 2009, 608 с.
- Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. *Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів: навч. посіб*. Вінниця: ВНТУ, 2019. Ч1. 102 с.
- Семко М. М., Скасків Л. В., Ярова О. А., Чернобай О. Б. *Вища та прикладна математика. Вища математика*. Київ, 2017. 181 с.
- Історія математики. *https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%86%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8.*