

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка**  
**Фізико-математичний факультет**

**ISSN 2413-1571 (print)**  
**ISSN 2413-158X (online)**

# **ФІЗИКО- МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА**

**Науковий журнал**

**Том 38, № 4**

**Суми – 2023**

Рекомендовано до видання вченою радою  
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка  
(протокол № 12 від 25.09.2023 р.)

**Редакційна колегія**

М.П. Вовк	доктор педагогічних наук, старший науковий співробітник (Україна)
М.Гр. Воскоглу	доктор філософії, почесний професор математичних наук (Греція)
Т.Г. Дерека	доктор педагогічних наук, професор (Словацька республіка)
М.Г. Друшляк	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
Р.А. Зіатдінов	доктор педагогічних наук, професор (Південна Корея)
А.П. Кудін	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
О.Ю. Кудріна	доктор економічних наук, професор (Україна)
О.О. Лаврентьева	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
Т.Д. Лукашова	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
Т.Ю. Осипова	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
М.В. Працьовитий	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
Д.О. Сарфо	доктор педагогічних наук, професор (Гана)
О.В. Семеніхіна	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
О.М. Семенов	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
В.І. Статівка	доктор педагогічних наук, професор (Китай)
І.Я. Субботін	доктор фізико-математичних наук, професор (США)
О.С. Чашечникова	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
О.В. Школьній	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
А.М. Добровольська	доктор педагогічних наук, доцент (Україна)
О.О. Пипка	доктор фізико-математичних наук, доцент (Україна)
В.О. Швець	кандидат педагогічних наук, професор (Україна)
В.Г. Шамо́ня	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)

Ф45 Фізико-математична освіта : науковий журнал. Том 38, № 4. Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2023. 85 с.

*Наказом МОН України №1412 від 18.12.2018 р. журнал «Фізико-математична освіта» затверджено як **фахове наукове видання категорії «Б»** у галузі педагогічних наук (13.00.02 – математика, фізика, інформатика; 13.00.10) і за спеціальностями 011, 014, 015.*

Журнал індексується наукометричною базою **Index Copernicus Journals Master List**

*Автори статей несуть відповідальність за достовірність наведеної інформації (точність наведених у статті даних, цитат, статистичних матеріалів тощо) та за порушення прав інтелектуальної власності інших осіб.*

*Висловлені авторами думки можуть не співпадати з точкою зору редакції.*

**УДК 53+51]:37(051)**  
**DOI 10.31110/2413-1571**

© СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE  
Makarenko Sumy State Pedagogical University  
Physics and Mathematics Faculty**

**ISSN 2413-1571 (print)  
ISSN 2413-158X (online)**

# **PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION**

**Scientific Journal**

**Vol. 38, No 4**

**Sumy – 2023**

**Recommended for publication of the Academic Council  
of Makarenko Sumy State Pedagogical University  
(protocol No 12 from 25.09.2023)**

**Editorial Board**

M.P. Vovk	Doctor of Pedagogical Sciences, Senior Research Fellow (Ukraine)
M.Gr. Voskoglou	Doctor of Philosophy, Professor Emeritus of Mathematical Sciences (Greece)
T.H. Dereka	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Slovak Republic)
M.G. Drushlyak	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
R.A. Ziatdinov	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (South Korea)
A.P. Kudin	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (Ukraine)
O.Yu. Kudrina	Doctor of Economic Sciences, Professor (Ukraine)
O.O. Lavrentjeva	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
T.D. Lukashova	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (Ukraine)
T.Yu. Osypova	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
M.V. Pratsiovytyi	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (Ukraine)
J.O. Sarfo	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ghana)
O.V. Semenikhina	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
O.M. Semenog	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
V.I. Stativka	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (China)
I.Ya. Subbotin	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (USA)
O.S. Chashechnykova	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
O.V. Shkolnyi	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
A.M. Dobrovol'ska	Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor (Ukraine)
O.A. Pypka	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor (Ukraine)
V.O. Shvets	PhD (Physics and Mathematics Sciences), Professor (Ukraine)
V.G. Shamonina	PhD (Physics and Mathematics Sciences), Associate Professor (Ukraine)

F 45 Physical and Mathematical Education : Scientific Journal. Vol. 38, No 4. Makarenko Sumy State Pedagogical University, Physics and Mathematics Faculty ; O.V. Semenikhina (chief editor). Sumy : [Makarenko Sumy State Pedagogical University], 2023. 85 p.

*The authors of the articles are responsible for the authenticity of the information (the accuracy of the presented information in the article, quotations, statistical materials, etc.) and for the violation of intellectual property rights of others.*

*Opinions expressed by the authors may not reflect the views of the editors.*

**UDC 53+51]:37(051)  
DOI 10.31110/2413-1571**

## ЗМІСТ

Абдієва Ш., Тургунбаєв Р. ....	7
ТЕОРЕМИ ПРО КІЛЬКІСТЬ КОРЕНІВ КУБІЧНОГО РІВНЯННЯ ТА ЇХ РОЗТАШУВАННЯ ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ НАОЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ.....	7
Бойчук В., Коцюбинський В., Туровська Л., Мойсеєнко М., Бандура Х., Стинська В., Прокопів Л., Мазуренко Ю., Кузишин М. ....	14
ВИКОРИСТАННЯ РЕНТГЕНІВСЬКОЇ ФЛУОРЕСЦЕНТНОЇ СПЕКТРОСКОПІЇ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТНОГО СКЛАДУ РЕЧОВИН ПРИ ВИВЧЕННІ БІОФІЗИКИ .....	14
Воронкін О., Лушин С.....	24
ПРОЄКТНИЙ МЕТОД У STEM-ОСВІТІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПРОГРАМНО-АПАРATНОЇ ПЛАТФОРМИ ARDUINO .....	24
Гетманенко Л. ....	31
ФОРМУЛА-ТРИЙЦЯ ЯК РЕЗУЛЬТАТ ЕМОЦІЙНОГО ПОШУКУ НОВИХ ФОРМУЛ ГЕОМЕТРІЇ .....	31
Здещиц В., Здещиц А. ....	36
ВИМІРЮВАННЯ МАГНІТНОЇ СПРИЙНЯТЛИВОСТІ РЕЧОВИН В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ.....	36
Крамаренко Т.....	42
ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО У НАВЧАННІ СТОХАСТИКИ В КОНТЕКСТІ ПІДГОТОВКИ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ДО ВПРОВАДЖЕННЯ STEM-ОСВІТИ .....	42
Носенко Ю. ....	49
МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ ВІДКРИТОЇ НАУКИ ДЛЯ ПРОФЕСІЙНОГО РОЗВИТКУ ТА ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛІВ .....	49
Прус А. ....	56
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЛІНЗА РЕАЛЬНОГО СВІТУ .....	56
Різак В., Опачко М., Дешко Н.....	62
ІННОВАЦІЙНИЙ ПІДХІД У ФАХОВІЙ ПІДГОТОВЦІ МАГІСТРІВ З КІБЕРБЕЗПЕКИ .....	62
Савчук В., Романець О. ....	68
КОМП'ЮТЕРНА МОДЕЛЬ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ У ВІРТУАЛЬНОМУ ФІЗИЧНОМУ ПРАКТИКУМІ .....	68
Фатмар'янти С.Д. ....	74
ТРАДИЦІЙНА ІНДОНЕЗІЙСЬКА ГРА «BANDHUL SADA» ПРИ ВИВЧЕННІ ПОНЯТЬ ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ НА БАЗІ КОНТЕКСТУАЛЬНОГО ПІДХОДУ .....	74
Шишкіна М. ....	79
ПЕРСПЕКТИВНІ ШЛЯХИ ЗАПРОВАДЖЕННЯ ХМАРО ОРІЄНТОВАНИХ СИСТЕМ ВІДКРИТОЇ НАУКИ У ПРОЦЕС НАВЧАННЯ ВЧИТЕЛІВ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ПРЕДМЕТІВ .....	79

## CONTENTS

Abdiyeva Sh., Turgunbaev R. ....	7
THEOREMS ON THE NUMBER OF ROOTS OF A CUBIC EQUATION AND THEIR LOCATION AS A MEANS OF DEVELOPING STUDENTS' VISUAL THINKING .....	7
Boyчук V., Kotsyubynsky V., Turovska L., Moiseienko M., Bandura Kh., Stynska V., Prokopiv L., Mazurenko Yu., Kuzyshyn M. ....	14
THE USE OF X-RAY FLUORESCENCE SPECTROSCOPY TO DETERMINE THE ELEMENTAL COMPOSITION OF SUBSTANCES IN THE STUDY OF BIOPHYSICS .....	14
Voronkin O., Lushchin S.....	24
PROJECT METHOD IN STEM EDUCATION USING ARDUINO SOFTWARE AND HARDWARE PLATFORM.....	24
Hetmanenko L. ....	31
THE TRINITY FORMULA AS A RESULT OF EMOTIONAL SEARCH FOR NEW GEOMETRY FORMULAS ..	31
Zdeshchyts V., Zdeshchyts A.....	36
MEASUREMENT OF MAGNETIC SUSCEPTIBILITY OF SUBSTANCES IN THE CONDITIONS OF DISTANCE EDUCATION .....	36
Kramarenko T. ....	42
USING THE MONTE CARLO METHOD IN TEACHING STOCHASTICS IN THE CONTEXT OF TRAINING MATHEMATICS TEACHERS TO IMPLEMENT STEM EDUCATION .....	42
Nosenko Yu. ....	49
MODELING THE ECOSYSTEM OF OPEN SCIENCE FOR THE PROFESSIONAL DEVELOPMENT AND ACTIVITY OF TEACHERS .....	49
Prus A.....	56
MATHEMATICAL MODELING AS A LENS OF THE REAL WORLD.....	56
Rizak V., Opachko M., Deshko N. ....	62
INNOVATIVE APPROACH IN THE PROFESSIONAL TRAINING OF MASTERS IN CYBER SECURITY .....	62
Savchuk V., Romanetc O. ....	68
USE OF COMPUTER SIMULATION IN STUDYING CIRCUITS OF DIRECT CURRENT .....	68
Fatmaryanti S.D. ....	74
INDONESIAN TRADITIONAL GAME «BANDHUL SADA» IN LEARNING ROTATION DYNAMIC CONCEPTS WITH CONTEXTUAL APPROACH .....	74
Shyshkina M. ....	79
PROSPECTIVE WAYS OF USING CLOUD-BASED SYSTEMS OF OPEN SCIENCE IN THE PROCESS OF TEACHERS OF NATURAL-MATHEMATICAL SUBJECTS TRAINING.....	79



DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-4-004

УДК 512.7

**ФОРМУЛА-ТРИЙЦЯ  
ЯК РЕЗУЛЬТАТ ЕМОЦІЙНОГО ПОШУКУ  
НОВИХ ФОРМУЛ ГЕОМЕТРІЇ**

Людмила ГЕТМАНЕНКО ✉

Київський університет імені Бориса Грінченка, Україна  
l.hetmanenko@kubg.edu.ua  
<https://orcid.org/0009-0006-9601-3288>**THE TRINITY FORMULA  
AS A RESULT OF EMOTIONAL SEARCH  
FOR NEW GEOMETRY FORMULAS**

Lyudmyla HETMANENKO ✉

Borys Grinchenko Kyiv University, Ukraine  
l.hetmanenko@kubg.edu.ua  
<https://orcid.org/0009-0006-9601-3288>**АНОТАЦІЯ**

У статті автор розглядає важливість вивчення елементів формульної геометрії в процесі математичної освіти та пропонує оригінальні методи розв'язування класичних та авторських задач, що побудовані на нових, не відомих до цього часу залежностях; знайомить з авторською формулою-трицею.

**Формулювання проблеми.** У сучасному шкільному курсі геометрії для середньої та старшої школи фактично відсутні відомості про елементи формульної геометрії. Хибним уявленням деяких математиків, які не мали досвіду викладання, була теза, що в класичній геометрії кількість формул має бути мінімальною, а елементарні тригонометричні функції повністю відкидалися. Аналіз сучасних досліджень та особистий досвід роботи переконливо доводять недостовірність такої позиції.

**Матеріали і методи.** Проведено системний аналіз наукових джерел щодо наявної інформації стосовно теоретичних понять та практичних можливостей застосування формульної геометрії. У ході підготовки статті були використані такі методи та засоби дослідження: порівняльний аналіз теоретичних положень, розкритих у науковій та навчально-методичній літературі; математичний аналіз та математична логіка; спостереження за навчально-виховним процесом учнів закладів загальної середньої освіти.

**Результати.** У результаті дослідження було систематизовано підхід до способів розв'язування геометричних задач за допомогою формул. Розкрито особливості застосування формульного методу до розв'язування великої кількості класичних та авторських геометричних задач різного ступеню складності. Основні результати дослідження отримані з використанням методів формульної геометрії. Результати роботи були апробовані у Науковій школі Кушніра І.А. «Краща авторська задача з геометрії», у Київському університеті імені Бориса Грінченка, а також пропонуються учням при підготовці до олімпіад з математики.

**Висновки.** Розв'язування геометричних задач формульним способом суттєво зменшує розмір доведення. Використання формул, властивостей геометричних фігур та алгоритмів допомагає сконцентруватись на основних ідеях задачі та виконати розрахунки швидше та ефективніше. Розв'язування геометричних задач формульним способом має також важливу емоційну складову для школярів, що вивчають математику. Цей підхід сприяє створенню почуття впевненості у власних знаннях. Рациональне використання формул та алгоритмів у розв'язанні геометричних задач спонукає учнів до логічного мислення та розуміння зв'язків між різними геометричними об'єктами. Крім того, успішне розв'язування задач стимулює позитивні емоції, такі як радість від досягнення результату і задоволення від власної компетентності.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** формульна геометрія; формула-триця; рівновеликість; геометричні олімпіадні задачі; алгебра в геометрії.

**ABSTRACT**

This article explores the importance of studying elements of formulaic geometry in the process of mathematical education and proposes original methods for solving classical and authorial problems based on new, previously unknown dependencies. The author introduces the author's triple formula.

**Formulation of the problem.** The modern school curriculum for middle and high school geometry lacks information about elements of formulaic geometry. Some mathematicians, who lacked teaching experience, mistakenly believed that the number of formulas in classical geometry should be minimal, and elementary trigonometric functions were completely discarded. Analysis of current research and personal experience convincingly prove the unreliability of such a position.

**Materials and methods.** A systematic analysis of scientific sources regarding the available information on theoretical concepts and practical applications of formulaic geometry was conducted. The following research methods and tools were used in preparing the article: comparative analysis of theoretical positions disclosed in scientific and educational literature, mathematical analysis and mathematical logic, observations of the educational process of general secondary education students.

**Results.** The research resulted in the systematization of approaches to solving geometric problems using formulas. The peculiarities of applying the formulaic method to solve a large number of classical and authorial geometric problems of varying complexity were revealed. The main research results were obtained using the methods of formulaic geometry. The findings were tested in the scientific school of I.A. Kushnir's "Best Authorial Problem in Geometry" at Borys Grinchenko Kyiv University and are also recommended to students preparing for mathematics Olympiads.

**Conclusions.** Solving geometric problems using the formulaic approach significantly reduces the size of the proof. The use of formulas, properties of geometric figures, and algorithms helps focus on the main ideas of the problem and perform calculations faster and more efficiently. Solving geometric problems using the formulaic approach also has an important emotional component for students studying mathematics. This approach contributes to building confidence in their knowledge. Rational use of formulas and algorithms in solving geometric problems encourages students' logical thinking and understanding of the connections between different geometric objects. Additionally, successful problem solving stimulates positive emotions such as joy in achieving results and satisfaction from one's own competence.

**KEYWORDS:** formulaic geometry; trinity formula; equisize; geometric Olympiad problems; algebra in geometry.

**ВСТУП**

**Постановка проблеми.** Увага до рівня математичної освіти серед школярів стає все актуальнішою в наші дні. Не лише педагогічна спільнота регулярно піднімає питання про зниження якості навчання математики в школах. Як вчитель з багаторічним стажем, я пропоную деякі кроки для розв'язання цієї проблеми та покращення рівня математичної підготовки учнів.

**Для цитування:**

Гетманенко Л. Формула-триця як результат емоційного пошуку нових формул геометрії. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 4. С. 31-35. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-4-004

Гетманенко, Л. (2023). Формула-триця як результат емоційного пошуку нових формул геометрії. *Фізико-математична освіта*, 38(4), 31-35. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-004>

**For citation:**

Hetmanenko, L. (2023). The trinity formula as a result of emotional search for new geometry formulas. *Physical and Mathematical Education*, 38(4), 31-35. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-004>

Hetmanenko, L. (2023). Formula-tritsia yak rezultat emotsiinoho poshuku novykh formul heometrii [The trinity formula as a result of emotional search for new geometry formulas]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(4), 31-35. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-004>

Одним із найважливіших аспектів, який слід враховувати, є увага до учнів, які мають бажання навчатися математики. Важливо не обмежуватися тільки олімпіадними "бійцями", оскільки їх кількість невелика, але також виявляти інтерес до тих учнів, які отримують наукове задоволення від вивчення математики. З цієї точки зору, особливо варто звернути увагу на геометрію, оскільки вона володіє унікальним поєднанням доступності та емоційності. Проте, навіть вчителі, які плідно та із задоволенням навчають геометрії, припускаються багаторічної помилки – нехтуванням методом застосування алгебри у геометрії, а саме – формульною геометрією. Більшість вчителів оминають цей спосіб розв'язувань навіть при роботі із сильними учнями та з матеріалом, де застосування формульного способу розв'язування геометричних задач є природним.

У даній роботі пропонується концепція формування понять формульної геометрії серед учнів загальної середньої освіти шляхом застосування авторської формули-триїці. Цей підхід рекомендується використовувати на уроках геометрії, під час підготовки до олімпіад і в позакласній роботі з математики.

**Аналіз актуальних досліджень.** Хибним уявленням деяких математиків, які не мали досвіду викладання, була теза, що в класичній геометрії кількість формул має бути мінімальною, а елементарні тригонометричні функції повністю відкидалися. Аналіз сучасних досліджень та особистий досвід роботи переконливо доводять недостовірність такої позиції.

Одним з перших математиків, хто виділив поняття, які дали поштовх для розвитку формульної геометрії, був Фурсенко В. Б. У 1937 році в журналі "Математика в школі" №5 та №6 була опублікована його знакова стаття про побудову трикутника за трьома елементами. У цій статті автор розташував усі задачі на побудову трикутника в лексикографічному порядку, вирішив усі задачі, які мають розв'язок та перерахував усі задачі, які не мають розв'язку, наводячи в усіх випадках умови, при яких розв'язок поставленої задачі можливий, при цьому понад 70% задач вперше були представлені на розгляд читача.

Математиками Готман Е.Г та Скопец З.А. (1979) був виданий збірник з докладними вказівками та коментарями, де були представлені геометричні задачі, розв'язання яких базується на застосуванні аналітичних методів. Запропоновані авторами задачі демонстрували єдність геометрії, алгебри і математичного аналізу.

У педагогічній практиці відомі ще задачі на відновлення трикутника за трьома заданими точками. У 1982 році Вільям Верник у своїй статті "Triangle Constructions with Three Located Points (Побудова трикутників за трьома заданими точками)" так само, як і В. Б. Фурсенко в 1937 році, склав лексикографічний список задач на відновлення трикутника. Ось вибрані ним найпопулярніші точки геометрії трикутника:

- A, B, C, O — вершини трикутника та центр описаного кола;
- $M_a, M_b, M_c, G$  — середини сторін трикутника та центр мас;
- $H_a, H_b, H_c, H$  — основи висот трикутника та ортоцентр;
- $T_a, T_b, T_c, I$  — основи бісектрис трикутника та центр вписаного кола.

Після цього він склав список, який називається список Верника, в якому з 139 принципово відмінних задач лексикографічного списку мають розв'язок трохи більше половини — 72 задачі. Задачі зі списку Верника до сих пір знаходять свої розв'язки.

Український математик-методист Бевз Г. П. (2009) звів у систему найвідоміші й найважливіші факти із сучасної геометрії трикутника і виклав їх доступно навіть для учнів закладів загальної середньої освіти.

Винахідником формульної геометрії в тому вигляді, як вона існує зараз, є видатний український педагог-новатор Кушнір І.А. Новому розділу геометрії науковець присвятив декілька збірників (1991, 1994, 2003) та запропонував до розгляду геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників (2002). Автору також вдалося знайти інші рішення деяких завдань зі списку Верника і продовжити цей список списком Кушніра (2019).

**Метою** статті є знайомство читачів з авторською формулою-триїцею та демонстрація особливостей застосування формульного методу до розв'язування великої кількості класичних та авторських геометричних задач.

## МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У ході підготовки статті були використані такі методи та засоби дослідження: порівняльний аналіз теоретичних положень, розкритих у науковій та навчально-методичній літературі; математичний аналіз та математична логіка; спостереження за навчально-виховним процесом здобувачів загальної середньої освіти. Проведено системний аналіз наукових джерел щодо наявної інформації стосовно теоретичних понять та практичних можливостей застосування формульної геометрії.

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі наведено конкретні приклади використання формульної геометрії на уроках у середній та старшій школі. Проілюстровано конкретні задачі з геометрії, в процесі розв'язку яких ці методи та формули можна успішно використовувати. На відміну від методів, які рекомендують підручники, пропонується нові оригінальні розв'язки, які до цього часу не публікувалися. Рекомендованими методами можна розв'язувати задачі різного рівня.

Ті, хто цікавляться геометрією, знайомі з точкою  $W_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – серединою дуги кола, описаного навколо трикутника ABC (рис. 1).

Домовимося про позначення:

- O – центр описаного кола,
- R – радіус описаного кола,
- I – центр вписаного кола,
- r – радіус вписаного кола,
- $I_a$  – бісектриса кута BAC ( $I_a = AL_1$ )

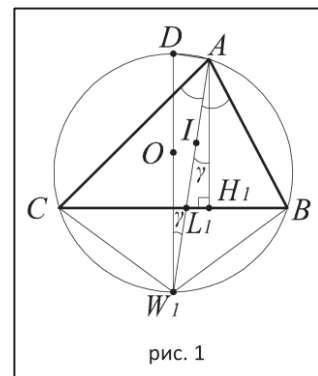


рис. 1



$AH_1$  – висота  $h_a$  трикутника ABC  
 $a, b, c$  – сторони BC, AC, AB

Звертаємо увагу на «формульне коло», за допомогою якого буде одержано декілька теорем і нових формул.  
 Сформулюємо і доведемо першу частину формули-триїці:

$$bc = AW_1 l_a \tag{1}$$

Застосуємо формулу Брамагупти  $bc = 2R \cdot h_a$  (у школі вона доводилася ще у збірнику задач Рибкіна (1956))

Позначимо  $\angle L_1 A H_1$  як  $\gamma$ .

Маємо:  $bc = 2R \cdot h_a \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma}$  або  $bc = 2R \cdot \cos \gamma \cdot \frac{h_a}{\cos \gamma} = AW_1 \cdot l_a$  (трикутника  $ADW_1$  і  $AL_1 H_1$ ).

З самої формули можна вивести, так звану, формулу Лагранжа:  $l_a^2 = bc - b_1 c_1$  ( $c_1 = BL_1, b_1 = CL_1$ ).

*Доведення.* Маємо:  $bc = AW_1 l_a = (l_a + L_1 W_1) l_a = l_a^2 + l_a L_1 W_1$  або  $l_a^2 = bc - b_1 c_1$ , бо  $b_1 c_1 = L_1 W_1 \cdot l_a$  (як добуток відрізків хорд).

Доведемо другу частину формули-триїці:

$$bc = AI \cdot AI_a$$

де  $I_a$  – центр зовнішнього кола (рис. 2)

Оскільки  $l_a = AW_1 - L_1 W_1$ ,

то  $bc = AW_1 \cdot l_a = AW_1 \cdot (AW_1 - L_1 W_1) = (AW_1)^2 - AW_1 \cdot L_1 W_1$ .

З подібності трикутників  $AW_1 C$  і  $CW_1 L_1$  випливає, що

$AW_1 \cdot L_1 W_1 = (CW_1)^2 = (IW_1)^2$  (теорема-тризуб).

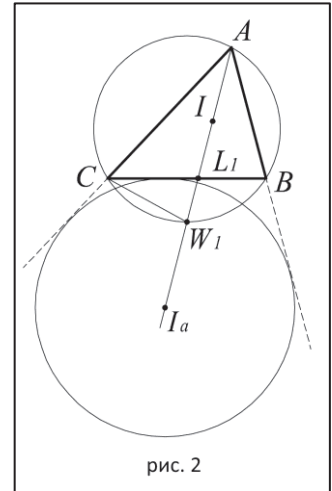
Отже,  $bc = AW_1^2 - IW_1^2 = (AW_1 - IW_1) \cdot (AW_1 + IW_1) = AI \cdot AI_a$ .

Отже, формула-триїця має вигляд

$$bc = AW_1 \cdot l_a = AI \cdot AI_a$$

або

$$S = \frac{1}{2} AW_1 l_a \sin A = \frac{1}{2} AI \cdot AI_a \sin A$$



**Задача 1.** Довести, що  $S = r \cdot p$  ( $S$  – площа трикутника ABC,  $p$  – півпериметр трикутника ABC).

*Доведення.* Маємо:  $bc = AI \cdot AI_a, \frac{1}{2} bc \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} AI \cdot AI_a \cdot \sin \angle A$ ;

$$\frac{1}{2} bc \cdot \sin \angle A = AI \cdot AI_a \cdot \sin \frac{\angle A}{2} \cdot \cos \frac{\angle A}{2}.$$

Оскільки  $AI_a \cdot \cos \frac{\angle A}{2} = p, AI \cdot \sin \frac{\angle A}{2} = r$ , то  $S = r \cdot p$ .

**Задача 2.** Довести, що  $S = r_a(p - a)$ .

*Доведення.* Доведення аналогічне задачі 1, враховуючи, що  $AI_a \cdot \sin \frac{\angle A}{2} = r_a; AI \cdot \cos \frac{\angle A}{2} = p - a$ .

**Задача 3.** Довести, що  $S = \frac{abc}{4R}$ .

*Доведення.* Маємо:  $abc = a \cdot AI \cdot AI_a = 2R(\sin A \cdot bc) = 2R \cdot 2S = 4SR$ , звідки  $S = \frac{abc}{4R}$ .

**Задача 4.** Довести, що  $S = \frac{1}{2} U_1 U_2 l_a$  ( $U_1$  і  $U_2$  – проєкції точки  $W_1$  на сторони AC і AB).

*Доведення.* Будемо змінювати положення множників у формулі (\*)

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot \sin A \cdot l_a$$

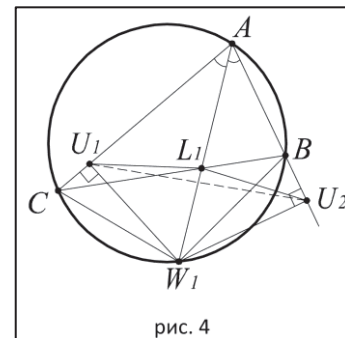
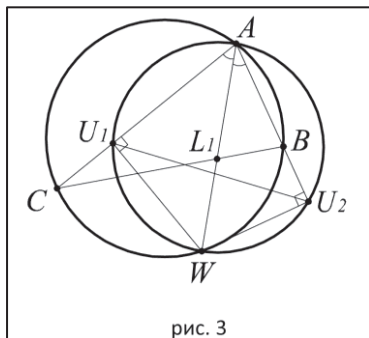
Розглянемо множник  $AW_1 \cdot \sin A$ .

Навколо чотирикутника  $AU_1 W_1 U_2$  опишемо коло (рис. 3).

Тоді,  $AW_1 \cdot \sin A = U_1 U_2$ , отже отримаємо нову, двокомпонентну формулу площі  $S$ .

$$S = \frac{1}{2} U_1 U_2 \cdot l_a$$

Формула викликає бажання довести рівновеликість чотирикутника  $AU_1 W_1 U_2$  і трикутника ABC. Дійсно, у чотирикутника  $AU_1 W_1 U_2$  і трикутника ABC спільна частина – чотирикутник  $ABL_1 U_1$  (рис. 4).



Висоти, що проведені з точки  $W_1$  на прями AB і AC, рівні.

Залишається довести, що  $U_2 B = U_1 C$ .

Але, трикутники  $W_1 B U_2$  і  $W_1 C U_1$  рівні, оскільки,  $W_1 B = W_1 C$  і  $W_1 U_1 = W_1 U_2$ .

Отже,  $U_2 B = U_1 C$  і трикутники  $L_1 B U_2$  і  $L_1 U_1 C$  – рівновеликі, що доводить твердження задачі.

Покажемо, як застосування формули-трійці породжує нову авторську задачу.

**Задача 5.1.** Довести формулу  $S = \frac{1}{2} K_2 K_3 AI_a$  ( $K_2$  і  $K_3$  – точки дотику вписаного у трикутник кола до сторін  $AC$  і  $AB$ ).

*Доведення.* Навколо чотирикутника  $AK_2IK_3$  опишемо коло (рис. 5).

Маємо:  $K_2K_3 = AI \cdot \sin A$ .

Користуємося формулою-трійцею  $bc = AI \cdot AI_a$ .

Тому,  $\frac{1}{2} bc \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} AI \cdot AI_a \sin \angle A$ ;

$S = \frac{1}{2} AI \sin \angle A \cdot AI_a$  або  $S = \frac{1}{2} K_2 K_3 AI_a$ .

**Задача 5.2.** Довести рівновеликість трикутника  $ABC$  і чотирикутника  $AK_2I_aK_3$ .

*Доведення.* Оскільки у трикутника  $ABC$  і чотирикутника  $AK_2I_aK_3$  п'ятикутник  $AK_2F_1F_2K_3$  – спільний (рис. 6), то доведемо, що  $S_{CK_2F_1} + S_{BK_3F_2} = S_{F_1F_2I_a}$ .

Обґрунтування:  $\triangle CK_2K_1$  – рівнобедрений, кути при основі  $\angle CK_2K_1 = \angle CK_1K_2 = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ .

Точка  $K_1$  – точка дотику вписаного кола зі стороною  $BC$ .

$CI_a$  – зовнішня бісектриса кута  $C$ , тому  $\angle F_1CI_a = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ .

Оскільки  $\angle CK_2K_3 = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} = \angle I_aCK_1$ , то  $K_2K_1 \parallel I_aC$  і чотирикутник  $K_2K_1I_aC$  – трапеція, отже  $S_{CK_2F_1} = S_{F_1K_1I_a}$ .

Аналогічно доводиться рівновеликість трикутників  $BK_3F_2$  та  $K_1F_2I_a$  з трапеції  $K_1K_3BI_a$ .

Отже,  $S_{CK_2F_1} + S_{BK_3F_2} = S_{F_1F_2I_a}$ .

Доведено.

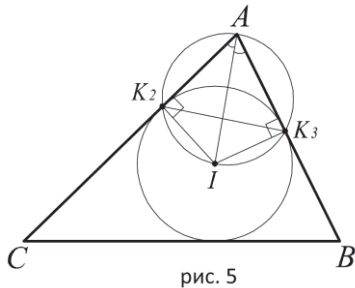


рис. 5

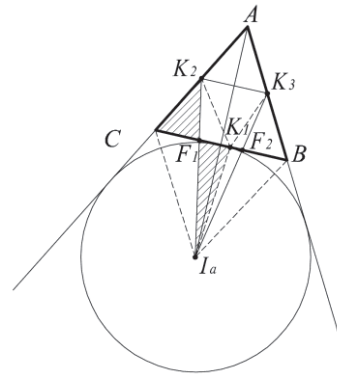


рис. 6

**Задача 6.** Довести формулу  $S = \frac{1}{2} T_2 T_3 \cdot AI_a$  ( $T_2$ ,  $T_3$  – точки дотику зовнівписаного кола з продовженням сторін  $AC$  і  $AB$  трикутника  $ABC$ ).

*Доведення* ідентичне задачі 5.

Наскільки сильно використання формульного методу спрощує і скорочує розв'язування задач, можна зрозуміти на прикладі запропонованої нижче олімпіадної задачі. Дану задачу можна дуже швидко розв'язати за допомогою формули-трійці, спробуйте.

**Задача І. А. Кушніра** (XVIII Міжнародна Олімпіада, Куба, 1987 рік). Продовження бісектриси  $AL_1$  трикутника  $ABC$  перетинає описане коло у точці  $W_1$ . З точки  $L_1$  на сторони  $AB$  і  $AC$  відповідно опущено перпендикуляри  $L_1N$  і  $L_1M$ . Довести, що площа чотирикутника  $ANW_1M$  дорівнює площі трикутника  $ABC$ .

## ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Розв'язування геометричних задач формульним способом має важливу емоційну складову для школярів, що вивчають математику. Цей підхід сприяє створенню почуття впевненості у власних знаннях та навичках учнів. Раціональне використання формул та алгоритмів у розв'язуванні геометричних задач спонукає учнів до логічного мислення та розуміння зв'язків між різними геометричними об'єктами. Крім того, успішне розв'язування задач стимулює позитивні емоції, такі як радість від досягнення результату і задоволення від власної компетентності. Такий підхід до вивчення геометрії не лише сприяє розвитку математичних навичок, але й виховує самодисципліну, систематичність та впевненість у власних здібностях учнів.

Розв'язування геометричних задач формульним способом також суттєво зменшує розмір доведення. Використання формул, властивостей геометричних фігур та алгоритмів допомагає учням сконцентруватись на основних ідеях задачі та виконати розрахунки швидше та ефективніше. Зосереджений та точний підхід до вирішення задач з використанням формул, дозволяє учням уникнути непотрібного повторення розрахунків та деталей, що займають багато часу і тим самим значно зменшити обсяг розв'язку. Таким чином, формульний підхід збільшує ефективність та точність розв'язання геометричних задач, одночасно зменшуючи розмір доведення.

Подальші дослідження та розробка нових прийомів та формул мають на меті підвищити якість математичної освіти та забезпечити учням навички, необхідні для успішної подальшої навчання та професійного розвитку. Відповідний матеріал може бути предметом учнівських досліджень та творчих робіт з геометрії.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. (2009) *Геометрія трикутника і тетраедра*. Вежа.
2. Готман Э.Г. & Скопец З.А. (1979) *Решение геометрических задач аналитическим методом: Пособие для учащихся 9 и 10 классов*. Просвещение.
3. Кушнір І. А. (1991) *Трикутник і тетраедр у задачах*. Радянська школа.
4. Кушнір І. А. (1994) *Методи розв'язання задач з геометрії*. Абрис.
5. Кушнір І. А. (2002) *Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників*. Факт.
6. Кушнір І. А. (2003) *Задачі з однією підказкою*. Факт.
7. Кушнір І. А. (2020) *Позиційні задачі. Список Верника. Список Кушніра*. Основа.
8. Рыбкин Н. А. (1956) *Сборник задач по геометрии, часть I. Планиметрия. Для 6-9 классов семилетней и средней школы*. Учпедгиз.
9. Фурсенко В. Б. (1937). Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника. *Математика в школе*. (5-6), 4-45.
10. Wernick W. (1982). Triangle Constructions with Three Located Points. *Mathematics Magazine*. 55(4), 227-230. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1985.11976988>

## REFERENCES

1. Bevez, H. P. (2009) *Heometriia trykutnyka i tetraedra [Geometry of the Triangle and Tetrahedron]*. Vezha [in Ukrainian].
2. Gotman, Je.G. & Skopec, Z.A. (1979) *Reshenie geometricheskikh zadach analiticheskim metodom: Posobie dlja uchashhihsja 9 i 10 klassov [Solving Geometric Problems Using the Analytical Method: Guidebook for 9th and 10th Grade Students]*. Prosveshhenie [in Russian].
3. Kushnir, I. A. (1991) *Trykutnyk i tetraedr u zadachakh [Triangle and Tetrahedron in Problem Solving]*. Radianska shkola [in Ukrainian].
4. Kushnir, I. A. (1994) *Metody rozv'iazannia zadach z heometrii [Methods for Solving Geometry Problems]*. Abrys [in Ukrainian].
5. Kushnir, I. A. (2002) *Heometrychni formuly, shcho ne vviishly do shkilnykh pidruchnykiv [Geometric Formulas Not Included in School Textbooks]*. Fakt [in Ukrainian].
6. Kushnir, I. A. (2003) *Zadachi z odniieiu pidkazkoiu [Problems with a Single Hint]*. Fakt [in Ukrainian].
7. Kushnir, I. A. (2020) *Pozytiini zadachi. Spysok Vernyka. Spysok Kushnira [Positional Problems. Vernik's List. Kushnir's List]*. Osнова [in Ukrainian].
8. Rybkin N. A. (1956) *Sbornik zadach po geometrii, chast' I. Planimetrija. Dlja 6-9 klassov semiletnej i srednej shkoly*. Uchpedgiz.
9. Fursenko V. B. (1937). *Leksikograficheskoe izlozhenie konstruktivnyh zadach geometrii treugol'nika [Lexicographic Representation of Constructive Problems in Triangle Geometry]*. *Matematika v shkole*. (5-6), 4-45 [in Russian].
10. Wernick W. (1982). Triangle Constructions with Three Located Points. *Mathematics Magazine*. 55(4), 227-230. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1985.11976988>

