УКРАЇНА

СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 120386

Стаття «Чудове поповнення родини радіусів»

(вид, назва твору)

Автор(и) **Гетманенко Людмила Миколаївна**

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації 7 липня 2023 р.

В.о. директора
Державної організації
«Український національний
офіс інтелектуальної власності
та інновацій» **Ігор ПАРЕНЧУК**

УКРНОІВІ

М.П.

Стаття Гетманенко Л. М.

«Чудове поповнення родини радіусів»

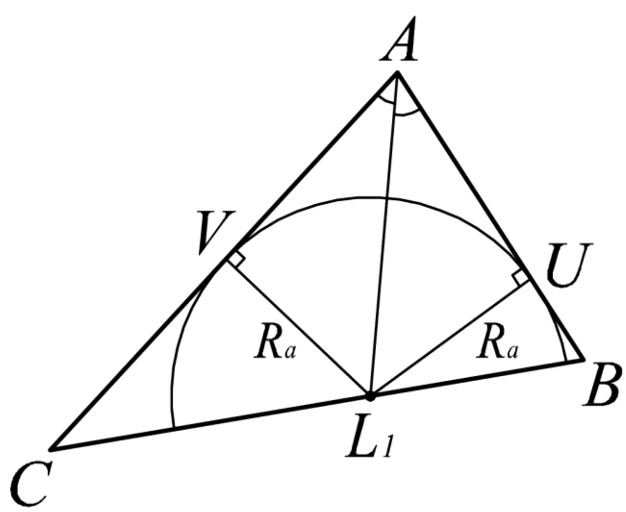
Така «нематематична» назва статті нам потрібна для підкреслення виникнення не просто радіусу R_a вписаного у трикутник півкола, а його місце серед відомих радіусів:

R – описаного навколо трикутника АВС кола;

r – вписаного кола у трикутник АВС;

r_a; $r_{b;}$ r_c – радіусів, зовнівписаних кіл.

Отже, R_a – радіус півкола, яке дотикається двох сторін трикутника, а його діаметр належить третій стороні трикутника (рис. 1)

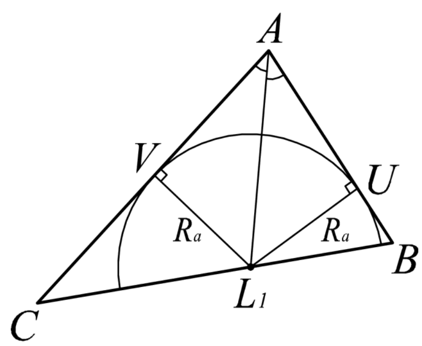


Формули радіуса $\mathrm{R_a}$

Формула: $\boxed{R_a = \frac{2S}{b+c}}$ **(1)**

(S – площа трикутника ABC; a, b, c – сторони трикутника ABC – BC, AC, AB відповідно)

Традиційне доведення



Позначимо площі трикутників AL_1B як S_1, а AL_1C як S_2.

Тоді, $S_{\Delta ABC} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} R_a \cdot b + \frac{1}{2} R_a \cdot c = \frac{1}{2} R_a (b + c)$, або $R_a = \frac{2S}{b+c}$.

Доведено.

Формульне доведення

З трикутника AL_1V :

$R_a = AL_1 \cdot \sin\frac{\angle A}{2} = l_a \sin\frac{\angle A}{2}$.

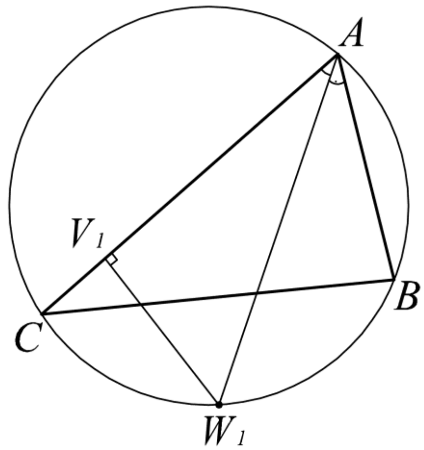
Скористаємося формулою $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{\angle A}{2}$ ($l_a -$ бісектриса AL_1).

Маємо: $R_a = \frac{bc \cdot 2 \sin\frac{\angle A}{2} \cos\frac{\angle A}{2}}{b+c} = \frac{bc \sin\angle A}{b+c} = \frac{2S}{b+c}$.

Доведено.

Формула: $\boxed{R_a = \frac{2S}{b-c}\,\mathrm{tg}\,\frac{\angle A}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{|\angle B-\angle C|}{2}}$ **(2)**

Доведення



Для доведення цієї формули читачеві потрібно знати або познайомитися з фактами формульної геометрії (засновник і апологет – Кушнір І. А.)

Якщо точка V_1 – проекція точки, W_1 (середина дуги BC) то $AV_1 = \frac{b+c}{2}$; $V_1C = \frac{b-c}{2}$; $\angle V_1W_1C = \frac{|\angle B-\angle C|}{2}$; $CW_1 = IW_1$ (точка I – інцентр трикутника АВС).

(Прочитати про ці залежності можна в чудовій книжці І. А. Кушніра «Підручник формульної геометрії», видавництво Дніпро «Середняк Е. К.», 2020 р.)

Отже, $R_a = \frac{2S}{b+c} = \frac{S}{V_1W_1\,\mathrm{ctg}\frac{\angle A}{2}} = \frac{2S}{(b-c)\,\mathrm{ctg}\frac{\angle A}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{|\angle B-\angle C|}{2}}$

Доведено.

Формула: $\boxed{R_a = \frac{1}{2}p_h\cdot\frac{1}{\cos\frac{\angle A}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{|\angle B-\angle C|}{2}}}$ **(3)**

(p_h –півпериметр ортоцентричного трикутника $H_1H_2H_3$).

Доведення

Відомо, що $\frac{b+c}{2} = 2R\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{|\angle B - \angle C|}{2}$,

а $\quad p_h = \frac{S}{R}$.

Отже, $R_a = \frac{2S}{b+c} = \frac{S}{2R\cos\frac{\angle A}{2}\cdot\cos\frac{|\angle B-\angle C|}{2}} = \frac{1}{2}p_h \cdot \frac{1}{\cos\frac{\angle A}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{|\angle B-\angle C|}{2}}$.

Доведено.

Формула: $\boxed{R_a = \frac{2\cdot r\cdot r_a}{r_a + r}}$ **(4)**

(r, r_a – радіуси вписаного кола і зовнівписаного кола, що дотикається сторони ВС і продовження сторін АС і АВ трикутника АВС)

Доведення

Маємо: $R_a = \frac{2S}{b+c} = \frac{2\cdot r\cdot p}{2p-a} = \frac{2\cdot r\cdot p}{p+p-a} = \frac{2\cdot r\cdot\frac{S}{r}}{\frac{S}{r}+\frac{S}{r_a}} = \frac{2\cdot S}{S(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_a})} = \frac{2\cdot r\cdot r_a}{r_a+r}$.

Доведено.

Авторська формула: $\boxed{\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}$ **(5)**

Доведення

Маємо, $\quad \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{b+c}{2S} = \frac{1}{R_a}$.

Доведено.

Формула: $\boxed{\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}=\frac{b+c}{2S}+\frac{a+c}{2S}+\frac{a+b}{2S}=\frac{2(a+b+c)}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}}$

ЗАСТОСУВАННЯ

Задачі (1-5) формул R_a:

доведіть формули

1) $\frac{1}{R_a}+\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r}$;

2) $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{1}{2h_c}$;

3) $\frac{1}{r}+\frac{1}{r_a}=\frac{1}{2R_a}$;

4) $\frac{1}{r}-\frac{1}{R_a}=\frac{1}{h_a}$;

5) $\frac{1}{R_a}-\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_a}$.

Задача (!)

З формули $R_a=\frac{2S}{b+c}$ доведіть формулу Герона.

Доведення

Маємо, $R_a=\frac{2\cdot r\cdot r_a}{r_a+r}$.

Далі буде:

a) $r\cdot r_a=p\cdot \operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}\cdot(p-a)\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}=p(p-a)\operatorname{tg}^2(\frac{\angle A}{2})$;

b) $r_a+r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}+p\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}=\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}(p-a+p)=(2p-a)\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}=$

$\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}(b+c)$;

c) $R_a = \frac{2p(p-a)\mathrm{tg}^2(\frac{\angle A}{2})}{\mathrm{tg}\frac{\angle A}{2}(b+c)} = \frac{2p(p-a)\,\mathrm{tg}\frac{\angle A}{2}}{b+c}$

Застосуємо формулу І. Кушніра «супер тангенс»

$$\boxed{\mathrm{tg}\frac{\angle A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{S}}$$

Отже, $\frac{2S}{b+c} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\angle A}{2}(p-a)p}{b+c}$;

$S = p(p-a)\,\mathrm{tg}\frac{\angle A}{2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{S}$;

$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Доведено.