

INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL

GRAIL OF SCIENCE

№ **44** (October, 2024)

with the proceedings of the:
VIII Correspondence International
Scientific and Practical Conference

**SCIENTIFIC RESEARCHES AND
METHODS OF THEIR CARRYING
OUT: WORLD EXPERIENCE AND
DOMESTIC REALITIES**

held on October 4th, 2024 by

NGO European Scientific Platform
(Vinnytsia, Ukraine)
LLC International Centre Corporative
Management (Vienna, Austria)

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

ГРААЛЬ НАУКИ

№ **44** (жовтень, 2024)

за матеріалами:
VIII Міжнародної науково-
практичної конференції

**НАУКОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА
МЕТОДИКА ЇХ ПРОВЕДЕННЯ:
СВІТОВИЙ ДОСВІД ТА
ВІТЧИЗНЯНІ РЕАЛІЇ**

що проводилася 04.10.2024

ГО «Європейська наукова
платформа» (Вінниця, Україна)
ТОВ «International Centre Corporative
Management» (Відень, Австрія)



Видання розраховане на науковців, викладачів, аспірантів, студентів, усіх, хто прагне отримати ґрунтовні знання теоретичного і прикладного характеру.

Рекомендовано до видання Вченою Радою Наукової установи «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці». Протокол № 56 від 03.10.2024.

Головний редактор: Танасійчук Альона Миколаївна, д-р. екон. наук, доцент (Україна)
Заступник головного редактора: Ємельянов Олександр Юрійович, д-р. екон. наук, професор (Україна)
Голова оргкомітету конференції: Голденблат Марія (Україна)
Заступник голови оргкомітету конференції: Рейчел Апаро (Австрійська Республіка)
Відповідальний секретар: Рабей Настасія Романівна (Україна)

ЧЛЕНИ РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ:

Квасницька Раїса Степанівна - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Jakhongir Shaturaev** - канд. екон. наук, доцент (Республіка Узбекистан); **Бойко Світлана Василівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Заднепровська Ганна Ігорівна** - канд. екон. наук (Україна); **Занора Володимир Олександрович** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Маркович Ірина Богданівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Яковенко Роман Валерійович** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Поливана Людмила Анатоліївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Гевчук Анна Вікторівна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Маслій Олександра Анатоліївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Євтушенко Наталія Миколаївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Москвічова Олена Сергіївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Ясишена Валентина Валеріївна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Михайлишин Лілія Іванівна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Гавриленко Наталія Вікторівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Гіулі Гігуашвілі** - д-р. екон. наук, професор (Грузія).

НАУКОВІ КОНСУЛЬТАНТИ:

Онкієнко Сергій Володимирович - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Marko Timchev** - д-р. екон. наук, доцент (Республіка Болгарія); **Khatuna Tabagari** - д-р. екон. наук, професор (Сакартвело); **Грень Лариса Миколаївна** - д-р. наук з держ. управління, професор (Україна); **Михаліцька Наталія Ярославівна** - канд. наук з держ. управління, доцент (Україна); **Ткаченко Павло Ігорович** - аспірант (Україна); **Купріянова Дарина Сергіївна** - практикуючий юрист (Польща); **Губаль Галина Миколаївна** - канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна); **Козуб Галина Олександрівна** - канд. техн. наук, доцент (Україна); **Козьма Антон Антонович** - канд. хім. наук (Україна); **Морозова Тетяна Василівна** - канд. біол. наук, доцент (Україна); **Купріянова Лариса Сергіївна** - канд. мед. наук, доцент (Україна); **Лисенко Дмитро Андрійович** - канд. мед. наук, доцент (Україна); **Цубанова Наталя Анатоліївна** - д-р. фарм. наук., професор (Україна); **Олійник Світлана Валентинівна** - канд. фарм. наук, доцент (Україна); **Полєжаєв Юрій Григорович** - канд. наук із соц. ком., доцент (Україна); **Mikhabbat Khakimova** - д-р. пед. наук, професор (Республіка Узбекистан); **Куліченко Алла Костянтинівна** - д-р. пед. наук, доцент (Україна); **Фурман Тарас Юрійович** - канд. пед. наук, доцент (Україна); **Бажан Станіслав Миколайович** - д-р. філософії (Україна); **Ямполь Юрій Віталійович** - аспірант (Україна); **Антипова Жанна Ігорівна** - старший викладач (Україна); **Яцик Мар'яна Романівна** - канд. пед. наук, доцент (Україна); **Корбозерова Ніна Миколаївна** - д-р. філол. наук, професор (Україна); **Ковальська Наталя Аркадіївна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Присяжнюк Оксана Ярославівна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Мелех Галина Богданівна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Корнус Анатолій Олександрович** - канд. геогр. наук, доцент (Україна); **Фомін Андрій Володимирович** - канд. іст. наук, доцент (Україна); **Гірна Наталія Мирославівна** - канд. іст. наук, доцент (Україна); **Устінова Ірина Ігорівна** - д-р. арх., професор (Україна); **Катерина Діденко** - канд. арх. (Україна); **Воскобойнікова Юлія Василівна** - д-р. мист. (Україна); **Крипчук Микола Володимирович** - канд. мист., доцент (Україна); **Лугова Тетяна Анатоліївна** - канд. мист., доцент (Україна)

Верстальник: Білоус Тетяна (Україна). **Дизайнер:** Казьміна Надія (Україна). **Коректор:** Дудник Григорій (Україна).

«Грааль науки» є офіційно зареєстрованим мультидисциплінарним науковим виданням з міжнародною сферою поширення, що підтримує політику відкритого доступу. **Ідентифікатор медіа R30-02704** (рішення № 430 від 22.02.2024 Національної Ради України з питань телебачення і радіомовлення).

Наказом МОН України № 582 від 24.04.2024 виданню «Грааль науки» присвоєно Категорію Б фахових видань України з питань економіки (051 «Економіка»).

«Грааль науки» індексується в міжнародних реферативних та наукометричних базах даних:

Index Copernicus Journals Master List; «Наукова періодика України» (Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського НАН України); Національний репозитарій академічних текстів; Google Scholar; WorldCat; Open Ukrainian Citation Index; CrossRef; Mendeley; Scite; Semantic Scholar; Scilit; OpenAIRE, PubPeer.

Конференція зареєстрована УкрІНТЕІ (Посвідчення № 369 від 12.06.2024) та сертифікована Euro Science Certification Group (Сертифікат № 22681 від 28.08.2024).

За точність викладених фактів та коректність цитування відповідальність несе автор.



GRAIL OF SCIENCE : inter. scientific journal. – Vinnytsia : NGO «European Scientific Platform»; SI «Institute of Scientific and Technical Integration and Cooperation», 2024. – No 44. – 582 p.

The publication is intended for scientists, teachers, graduate students, students, all those who seek to obtain thorough knowledge of a theoretical and applied nature.

Recommended for publication by the Academic Council of the Institute of Scientific and Technical Integration and Cooperation. Protocol № 56 from October 3, 2024.

Editor-in-chief: Alona Tanasiichuk, D.Sc. in Economics, Associate professor (Ukraine)
Deputy editor-in-chief: Olexandr Yemelyanov, D.Sc. in Economics, Professor (Ukraine)
Chairman of the Organizing Committee: Miriam Goldenblat (Ukraine)
Deputy Chairman of the Organizing Committee: Rachael Aparo (Austria)
Responsible secretary: Nastasiia Rabei (Ukraine)

EDITORIAL BOARD:

Raisa Kvasnytska - D.Sc. in Economics, Professor (Ukraine); **Jakhongir Shaturaev** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Republic of Uzbekistan); **Svitlana Boiko** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Hanna Zadnieprovsk** - Ph.D. in Economics (Ukraine); **Volodymyr Zanora** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Iryna Markovych** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Roman Yakovenko** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Liudmyla Polyvana** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Anna Hevchuk** - D.Sc. in Economics, Professor (Ukraine); **Oleksandra Maslii** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Nataliia Yevtushenko** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Olena Moskvichova** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Valentyna Yasyshena** - D.Sc. in Economics, Professor (Ukraine); **Liliia Mykhailyshyn** - D.Sc. in Economics, Professor (Ukraine); **Nataliia Havrylenko** - Ph.D. in Economics, Associate professor (Ukraine); **Giuli Giguashvili** - D.Sc. in Economics, Professor (Georgia).

EDITORIAL CONSULTANTS:

Serhii Onikiienko - D.Sc. in Economics, Professor (Ukraine); **Khatuna Tabagari** - D.Sc. in Economics, Professor (Georgia); **Marko Timchev** - D.Sc. in Economics, Associate professor (Republic of Bulgaria); **Larysa Hren** - D.Sc. in Public administration, Professor (Ukraine); **Nataliia Mykhalitska** - Ph.D. in Public administration, Associate professor (Ukraine); **Pavlo Tkachenko** - Ph.D. student (Ukraine); **Daryna Kupriianova** - lawyer (Republic of Poland); **Halyna Hubal** - Ph.D. in Physics and Maths, Associate professor (Ukraine); **Halyna Kozub** - Ph.D. in Technical sciences, Associate professor (Ukraine); **Anton Kozma** - Ph.D. in Chemistry (Ukraine); **Tetiana Morozova** - Ph.D. in Biology, Associate professor (Ukraine); **Larysa Kupriianova** - Ph.D. in Medicine, Associate professor (Ukraine); **Dmytro Lysenko** - Ph.D. in Medicine, Associate professor (Ukraine); **Natalia Tsubanova** - D.Sc. in Pharmacy, Professor (Ukraine); **Svitlana Oliinyk** - Ph.D. in Pharmacy, Associate professor (Ukraine); **Yurii Polyezhyayev** - Ph.D. in Social Communications, Associate professor (Ukraine); **Mukhabbat Khakimova** - D.Sc. in Pedagogy, Professor (Republic of Uzbekistan); **Alla Kulichenko** - D.Sc. in Pedagogy, Associate professor (Ukraine); **Taras Furman** - Ph.D. in Pedagogy, Associate professor (Ukraine); **Stanislav Bazhan** - Doctor of Philosophy (Ukraine); **Yurii Yampol** - Ph.D. student (Ukraine); **Zhanna Antypova** - Senior Lecturer (Ukraine); **Yatsyk Mariana** - Ph.D. in Pedagogy, Associate professor (Ukraine); **Nina Korbozerova** - D.Sc. in Philology, Professor (Ukraine); **Natalia Kovalska** - Ph.D. in Philology, Associate professor (Ukraine); **Oksana Prysiazhniuk** - Ph.D. in Philology, Associate professor (Ukraine); **Melekh Halyna** - Ph.D. in Philology, Associate professor (Ukraine); **Anatolii Kornus** - Ph.D. in Geography, Associate professor (Ukraine); **Andrii Fomin** - Ph.D. in History, Associate professor (Ukraine); **Nataliia Hirna** - Ph.D. in History, Associate professor (Ukraine); **Iryna Ustinova** - D.Sc. in Architecture, Professor (Ukraine); **Kateryna Didenko** - Ph.D. in Architecture (Ukraine); **Yuliia Voskoboynikova** - D.Sc. in Arts (Ukraine); **Mykola Krypchuk** - Ph.D. in Arts, Associate professor (Ukraine); **Tetiana Luhova** - Ph.D. in Arts, Associate professor (Ukraine)

Responsible for e-layout: Tetiana Bilous (Ukraine). **Designer:** Nadiia Kazmina (Ukraine). **Proofreader:** Hryhorii Dudnyk (Ukraine).

The journal «Grail of Science» is an officially registered in Ukraine multidisciplinary and internationally disseminated scientific edition that supports the policy of open access for scientific publications. **Media identifier R30-02704** (decision № 430 dated 22.02.2024 of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting).

By order of the Ministry of Education and Culture of Ukraine № 582 of April 24, 2024, the journal «Grail of Science» was assigned Category B of specialized publications of Ukraine on economics (051 «Economics»).

The journal «Grail of Science» is indexed in international reference and scientometric databases:

Index Copernicus Journals Master List; «Наукова періодика України» (Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського НАН України); Національний репозитарій академічних текстів; Google Scholar; WorldCat; Open Ukrainian Citation Index; CrossRef; Mendeley; Scite; Semantic Scholar; Scilit; OpenAIRE, PubPeer.

The conference is approved by UKRISTEI (Certificate № 369 dated June 12th, 2024) and certified by Euro Science Certification Group (Certificate № 22681 dated August 28th, 2024).

The author is responsible for the accuracy of the facts presented and the correctness of citations.



DOI 10.36074/grail-of-science.04.10.2024.052

ON THE DISTANCE BETWEEN THE CENTERS OF THE INSCRIBED AND CIRCUMSCRIBED CIRCLES FOR A TRIANGLE AND A QUADRILATERAL

Liudmyla Hetmanenko 

Senior Lecturer,

Department of the Natural Sciences and Mathematics Education and Technologies

Institute of In-Service Teacher's Training

Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine

Summary. This article discusses two well-known and widely popular formulas. The first formula was discovered and proven by the English mathematician William Chapple in 1746 and was named after the great Leonhard Euler, which is why it is rightfully called the Euler-Chapple formula. An analogue of this formula was found and proven by Euler's student, Nikolai Fuss (1755–1825), and the proof of this formula can be found in mathematical literature. At an open mathematical seminar, the Ukrainian scientist, renowned educator, and founder of formulaic geometry I. A. Kushnir, together with his student O. A. Cherkassky, discovered their own method for proving this formula. We are pleased to present it in this article.

Keywords: Euler's formula; Fuss's formula; distance between the centers of the inscribed and circumscribed circles of a triangle; distance between the centers of the inscribed and circumscribed circles of a quadrilateral; product of chord segments.

Euler's formula is as follows: $OI^2 = R^2 - 2Rr$,

where OI is the distance between the centers of the circumscribed circle around the triangle and the inscribed circle within the triangle; R and r are the radii of the circumscribed and inscribed circles around the triangle, respectively (Fig. 1).

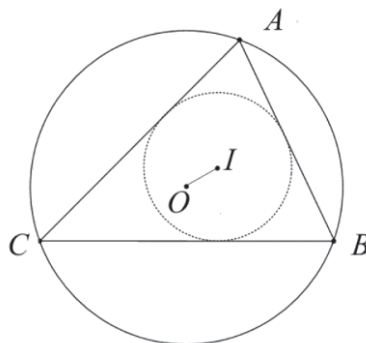


Fig. 1

Proof. Point O is the center of the circumscribed circle around triangle ABC with radius R ; point I is the center of the inscribed circle within triangle ABC with radius r .

Let us perform an additional construction: the diameter E_1E_2 contains the segment OI . Using the chord segment product theorem (Fig. 2):

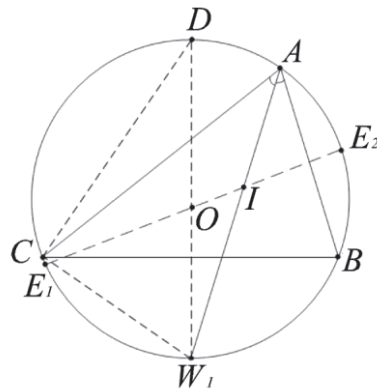


Fig. 2

$$E_1I \cdot IE_2 = AI \cdot IW_1 \quad (*)$$

Let's consider each segment: $E_1I = R + OI$; $IE_2 = R - OI$.

Then expression (*) can be rewritten as:

$$(R + OI)(R - OI) = AI \cdot IW_1,$$

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot IW_1,$$

$$R^2 - AI \cdot IW_1 = OI^2 \quad (**)$$

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{\angle BAC}{2}} = \frac{r}{\sin \frac{\angle A}{2}} \quad (\text{Fig. 3}).$$

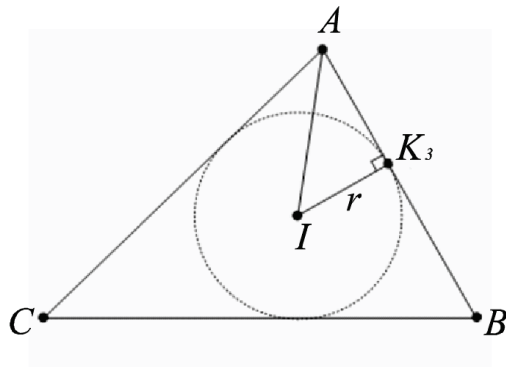


Fig. 3

$IW_1 = CW_1$, because $\triangle W_2IW_1 = W_2CW_1$ (they are equal due to the common side W_1W_2 and two adjacent angles $\angle CW_1W_2 = \angle IW_1W_2$, $\angle CW_2W_1 = \angle IW_2W_1$, as they subtend equal arcs (Fig. 4)).

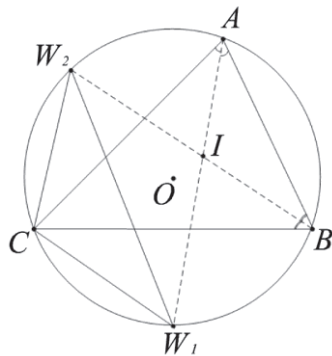


Fig. 4

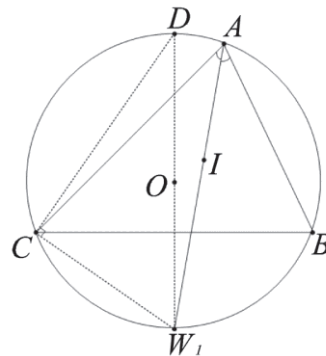


Fig. 5

From triangle CDW_1 (Fig. 5): $CW_1 = 2R \sin \frac{\angle BAC}{2} = 2R \sin \frac{\angle A}{2}$.

Therefore, the product is: $AI \cdot IW_1 = \frac{r}{\sin \frac{\angle A}{2}} \cdot 2R \sin \frac{\angle A}{2} = 2Rr$.

Formula (***) can then be rewritten as: $R^2 - 2Rr = OI^2$.

Proven.

At the 4th International Mathematical Olympiad, the following problem was presented.

Problem. Given an isosceles triangle ABC , where R is the radius of the circumscribed circle, and r is the radius of the inscribed circle, prove that the distance d between the centers of the circles is: $d = \sqrt{R(R - 2r)}$.

In other words, prove Euler's formula: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Now, let us consider the (analogous) distance between the centers of the inscribed and circumscribed circles for a quadrilateral.

If a quadrilateral is inscribed in a circle with radius R and circumscribed around a circle with radius r , and the distance between the centers of these circles is d , then:

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Proof.

- 1) $AW_1 \cap CW_2 = I$ — the center of the inscribed circle in quadrilateral $ABCD$;
- $\angle DAW_1 = \angle BAW_1 = \alpha$;
- $\angle DCW_2 = \angle BCW_2 = 90^\circ - \alpha$;
- (since $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$).

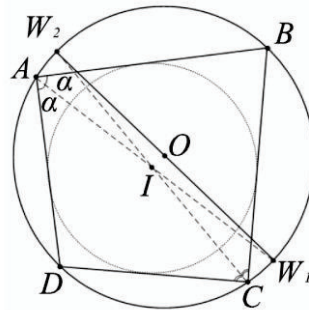


Fig. 6

2) $O \in W_1W_2$ (Fig. 6): point O is the center of the circumscribed circle around quadrilateral $ABCD$.

Since $\angle W_2CW_1 = \angle W_2CB + \angle BCW_1 = \angle BCW_2 + \angle BAW_1 = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$.

Similarly, $\angle W_1AW_2 = 90^\circ$, which means W_1W_2 is the diameter of the circumscribed circle around quadrilateral $ABCD$ or point $O \in W_1W_2$.

3) Consider triangle W_1IW_2 .

IO is the median, $OI = d$, $W_1W_2 = 2R$

We have: $4OI^2 = 2((IW_1)^2 + (IW_2)^2) - (W_1W_2)^2$,

$4d^2 = 2((IW_1)^2 + (IW_2)^2) - 4R^2$ (***)

Note that $AI \cdot IW_1 = (R - d)(R + d)$ as the product of chord segments (Fig. 7).

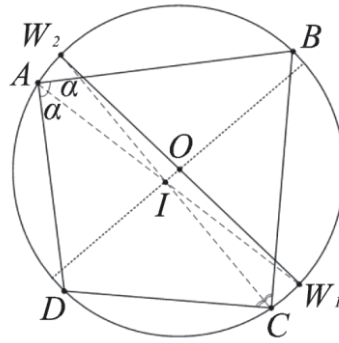


Fig. 7

Similarly, $CI \cdot IW_2 = (R - d)(R + d)$.

Thus, $IW_1 = \frac{(R-d)(R+d)}{AI}$, $IW_2 = \frac{(R-d)(R+d)}{CI}$.

From Fig. 8: $AI = \frac{r}{\sin \alpha}$, $CI = \frac{r}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{r}{\cos \alpha}$.

Rewriting the expressions: $IW_1 = \frac{(R-d)(R+d)}{r} \sin \alpha$, $IW_2 = \frac{(R-d)(R+d)}{r} \cos \alpha$.

Thus, equation (***) becomes:

$$4d^2 = 2 \left(\left(\frac{(R-d)(R+d)}{r} \sin \alpha \right)^2 + \left(\frac{(R-d)(R+d)}{r} \cos \alpha \right)^2 \right) - 4R^2,$$

$$4d^2 = 2 \cdot \frac{1}{r^2} (R-d)^2 (R+d)^2 - 4R^2,$$

$$4(d^2 + R^2) = \frac{2}{r^2} (R-d)^2 (R+d)^2.$$

Now, $2(d^2 + R^2) = (R+d)^2 + (R-d)^2$.

We also have: $(R+d)^2 + (R-d)^2 = \frac{1}{r^2} (R-d)^2 (R+d)^2$

$$\text{or } \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Proven.

References:

- [1] Кушнір І.А. (1991). ТРИКУТНИК І ТЕТРАЕДР У ЗАДАЧАХ. Київ: Радянська школа.
- [2] Кушнір І.А. (2015). ЭМОЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. Киев: Основа.
- [3] Морозова Е.А., Петраков И.С. (1971). МЕЖДУНАРОДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ. ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ, ИТОГИ. Москва: Просвещение.

ПРО ВІДСТАНЬ МІЖ ЦЕНТРАМИ ВПИСАНОГО І ОПИСАНОГО КІЛ ДЛЯ ТРИКУТНИКА ТА ЧОТИРИКУТНИКА

Гетманенко Людмила Миколаївна

старша викладачка кафедри природничо-математичної освіти і технологій

Інститут післядипломної освіти

Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна

Анотація. У статті йде мова про дві відомі й популярні у світі формули. Першу формулу було відкрито й доведено англійським математиком Уільямом Чappelом у 1746 р. та названо на честь великого Леонарда Ейлера, тому її справедливо називати формулою



Ейлера-Чапела. Аналог цієї формули було знайдено і доведено учнем Ейлера Ніколаєм Фуссом (1755-1825 рр.), доведення цієї формули наведено у математичній літературі. На відкритому математичному семінарі український вчений, відомий педагог, засновник формульної геометрії І. А. Кушнір разом зі своїм учнем О.А. Черкаським знайшов власний спосіб доведення цієї формули. Його із задоволенням надаємо у цій статті.

Ключові слова: формула Ейлера; формула Фусса; відстань між центрами вписаного і описаного кіл трикутника; відстань між центрами вписаного і описаного кіл чотирикутника; добуток відрізків хорд.