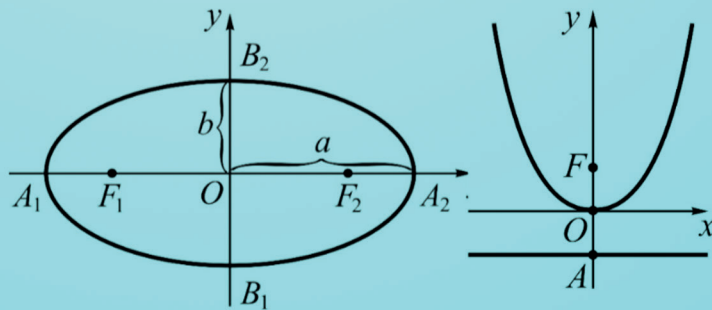
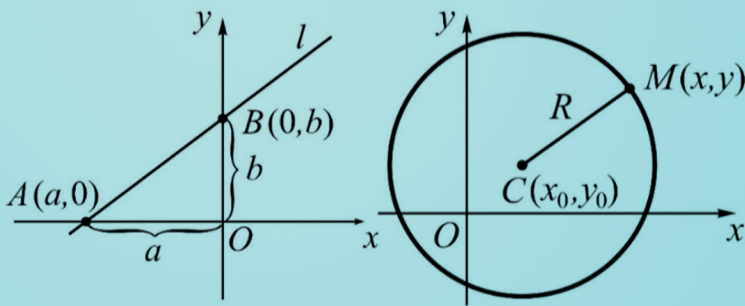


Ніна РУДЕНКО

МАТЕМАТИКА З МЕТОДИКОЮ НАВЧАННЯ





КИЇВСЬКИЙ СТОЛИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОРИСА ГРІНЧЕНКА

Ніна РУДЕНКО

**МАТЕМАТИКА
З МЕТОДИКОЮ НАВЧАННЯ**

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

КИЇВ-2024

УДК 378.016:51(072)

Рекомендовано до друку Вченою радою
Факультету педагогічної освіти
Київського столичного університету імені Бориса Грінченка
(протокол № 6 від 19 вересня 2024 року)

Рецензенти:

Станжицький О. М. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Працьовитий М. В. – доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізико-математичного факультету Українського державного університету імені Михайла Драгоманова.

Руденко Н.М.

Математика з методикою навчання. Навчально-методичний посібник. Київ, 2024. 132 с.

Посібник містить теоретичні відомості та практичні завдання, які спрямовані на опрацювання деяких розділів курсу вищої математики, методики навчання початкового курсу математики необхідних для підготовки студентів освітньо-професійної програми 013.00.01 Початкова освіта за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти зі спеціальності 013 Початкова освіта.

Метою посібника є надання практичної допомоги майбутнім вчителям початкових класів у формуванні їхньої математичної компетентності, здатності орієнтуватися в інформаційному просторі, використовувати відкриті ресурси, інформаційно-комунікаційні та цифрові технології, оперувати ними в майбутній професійній діяльності, здатності до організації освітнього процесу в початковій школі з урахуванням вікових та індивідуальних особливостей молодших школярів, розвитку в них критичного мислення та формування ціннісних орієнтацій; здатності до моделювання змісту математики відповідно до очікуваних результатів навчання, добору відповідних форм, методів та технологій формування ключових та предметних компетентностей молодших школярів у процесі вивчення математичної освітньої галузі Державного стандарту початкової освіти.

До посібника включено теоретичний матеріал, практичні завдання на основі сучасних підручників для учнів початкової школи та педагогічні ситуації. До кожної теми посібника підібрано сучасні електронні помічники (ресурси для створення ментальних карт *Free Mind*, *Bubbl.us*, *Mind Meister*, *Coogole*, *Canva* та інші; табличний редактор *Exel*; калькулятори матриць та визначників; для створення геометричних рисунків та графіків алгебраїчних функцій *Geogebra*; онлайн дошки, зокрема *Twiddla*, *Miro*, *IDroo*, *Classroomscreen*, *Padlet*; е-ресурси для створення навчальних коміксів *Comic Master*, *Pixton*, *Storyboardthat*, *MakeBeliefsComix*, *Write Comics*).

Зміст посібника викладено в нетрадиційному дидактичному оформленні (виконання завдань з перманентною метою, ситуаціями професійного й особистісного розвитку тощо).

Для студентів освітньо-професійної програми 013.00.01 Початкова освіта за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти зі спеціальності 013 Початкова освіта.

УДК 378.016:51(072)

© Н.М. Руденко, 2024

© Київський столичний університет
імені Бориса Грінченка, 2024

ISBN 978-617-8247-42-3

ЗМІСТ

ВСТУП	5
І БЛОК: ЕЛЕМЕНТИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ МАТЕМАТИКИ	
Тема 1. Елементи математичної логіки	
Загальні відомості: мета, основні етапи вивчення теми, ключові поняття теми	7
1.1. Математичні поняття. Зміст і обсяг поняття	7
1.2. Означення понять	8
1.3. Математичні речення. Висловлення та операції з ними	10
1.4. Предикати (висловлювальні форми)	14
1.5. Квантори	15
1.6. Міркування та умовиводи. Теореми та способи їх доведення	16
Питання для самоперевірки до теми 1	19
Електронні помічники до теми 1	20
Тема 2. Елементи лінійної алгебри	
Загальні відомості: мета, основні етапи вивчення теми, ключові поняття теми	23
2.1. Означення матриць та дії з ними	23
2.2. Визначники та дії над ними	26
2.3. Системи лінійних рівнянь	27
Питання для самоперевірки до теми 2	29
Електронні помічники до теми 2	30
Тема 3. Елементи аналітичної геометрії	
Загальні відомості: мета, основні етапи вивчення теми, ключові поняття теми	33
3.1. Системи координат на прямій, на площині, в просторі.	33
3.2. Лінійні операції над векторами	35
3.3. Пряма лінія на площині.	42
3.4. Криві другого порядку	47
Питання для самоперевірки до теми 3	54
Електронні помічники до теми 3	55
Тестові завдання до першого блоку	58
Список використаних джерел до першого блоку	61

II БЛОК: МАТЕМАТИКА З МЕТОДИКОЮ НАВЧАННЯ: ТЕХНОЛОГІЧНИЙ АСПЕКТ

Тема 4. Теоретичне і методичне підґрунтя запровадження сучасних технологій навчання математики в початковій школі НУШ	
Загальні відомості: мета, основні етапи вивчення теми, ключові поняття теми	62
4.1. Реформування та модернізація початкової математичної освіти	62
4.2. Технології навчання учнів початкової школи: означення, структура, застосування на уроках математики	64
Питання для самоперевірки до теми 4	72
Електронні помічники до теми 4	74
Тема 5. Технології навчання математики здобувачів початкової освіти	
Загальні відомості: мета, основні етапи вивчення теми, ключові поняття теми	75
5.1. Технологія ігрового навчання	85
5.2. Інтерактивні технології	95
5.3. Інформаційно-комунікаційні технології	101
5.4. Технологія організації диференційованого навчання	104
5.5. Технологія проєктування	105
Питання для самоперевірки до теми 5	106
Електронні помічники до теми 5	109
Тестові завдання до другого блоку	
Список використаних джерел до другого блоку	114
ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ	117
ДОДАТКИ	118

ВСТУП

Даний посібник призначений для використання в процесі підготовки студентів освітньо-професійної програми 013.00.01 Початкова освіта за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти зі спеціальності 013 Початкова освіта і має на меті допомогти майбутнім учителям краще засвоїти програмний теоретичний матеріал, оволодіти різними математичними методами та педагогічними технологіями, навчитися вільно застосовувати їх на практиці.

Посібник складається з двох блоків: 1) «Елементи загальної теорії математики» та 2) «Математика з методикою навчання: технологічний аспект». Блоки розділено на теми та підпункти до кожної теми. Спочатку в кожній темі сформульована мета та необхідні умови для досягнення її; коротко висвітлено питання, які розглядаються в темі. В кожному підпункті до кожної дефініції наводиться в стислій формі теоретичний матеріал, наводяться завдання для виконання.

Перший блок складається з трьох тем: «Елементи математичної логіки», «Елементи лінійної алгебри» та «Елементи аналітичної геометрії».

У темі «Елементи математичної логіки» студенти ознайомлюються з основними дефініціями цього розділу математики, а саме: математичними поняттями та математичним реченнями; висловленнями та предикатами; кванторами; структурою та видами теорем. До кожного теоретичного поняття підібрані завдання, які навчають проводити операції з конкретними логічними поняттями. Деякі завдання включають педагогічні ситуації, які можна розв'язати за допомогою математичної логіки.

Теоретичний зміст теми «Елементи лінійної алгебри» розширює знання майбутніх вчителів про системи лінійних рівнянь шляхом введення основних дефініцій лінійної алгебри – числова матриця та визначник. Практичні завдання навчають виконувати арифметичні дії з матрицями та визначниками. Наведено методи розв'язування систем лінійних рівнянь з багатьма змінними за допомогою матриць та визначників. Практичне застосування матриць у педагогіці показано на прикладі формування та аналізу журналу оцінок успішності здобувачів освіти.

У темі «Елементи аналітичної геометрії» подані розширені відомості про системи координат на прямій, на площині, в просторі; про вектори, операції над векторами; обчислення площ трикутника та об'єму паралелепіпеда за допомогою векторів; про пряму лінію на площині та різні способи задання рівняння прямої на площині; про криві другого порядку: коло, еліпс, парабола. Для деяких завдань з практичним змістом прописано алгоритми виконання.

Після кожної теми першого блоку подано *Електронні помічники до теми*, в яких пропонується студентам опрацювати теоретичний матеріал та практичні завдання засобами е-ресурсів (карти знань – Free Mind, Bubbl.us, Mind Meister, Coogle, Canva та інші; табличний редактор Excel; калькулятори матриць та визначників; Geogebra).

Другий блок присвячений методиці навчання математики в початковій школі. Продовжуючи наскрізну нумерацію в посібнику це тема 4 «Теоретичне і методичне підґрунтя запровадження сучасних технологій навчання математики в початковій

школі НУШ» і тема 5 – «Технології навчання математики здобувачів початкової освіти».

Відповідно до реформ, які здійснюють в Україні в останнє десятиріччя, було прийнято нові закони та Державні стандарти, а саме: Концепцію Нової української школи (2016), закон України «Про освіту» (2017, зі змінами 2021, 20024), Державний стандарт початкової освіти (2018, зі змінами 2019) та інші. Відповідно до Державного стандарту в 2018 році Міністерство освіти і науки України затвердило дві освітні програми за якими можуть навчатися здобувачі початкової освіти: НУШ-1 (під керівництвом О. Савченко) та НУШ-2 (під керівництвом Р. Шияна). Відповідно до цих освітніх програм були створені нові підручники з предмету «Математика» 1-4 класів для здобувачів початкової освіти, зокрема С. Скворцової та О. Онопрієнко (програма О. Савченко) [24-29], С. Логачевської (програма Р. Шияна) [7-12] (нумерація вказана зі списку літератури до другого блоку). З дозволу авторів С. Скорцової та О. Онопрієнко у нашому посібнику використанні завдання з підручників Математика 1-4 класи для учнів загальноосвітніх шкіл [24-29] (нумерація вказана зі списку літератури до другого блоку), але оскільки ми висвітлюємо технологічний аспект методики навчання математики, а технології – універсальні, то даний посібник можна використовувати із іншими підручниками предмету «Математика» 1-4 класів для учнів загальноосвітніх шкіл.

У темі «Теоретичне і методичне підґрунтя запровадження сучасних технологій навчання математики в початковій школі НУШ» запропоновані завдання для:

1) глибшого розуміння процесів модернізації та реформування початкової математичної освіти;

2) ознайомлення з новітніми підходами до означення інноваційних технологій у навчанні математики здобувачів початкової освіти відповідно до Концепції НУШ.

Тема «Технології навчання математики здобувачів початкової освіти» присвячена технологіям навчання, які доцільно застосовувати на уроках математики в початковій школі відповідно до Концепції НУШ, а саме: технологія ігрового навчання, інтерактивні технології; інформаційно-комунікаційні технології; технологія організації диференційованого навчання; технологія проектування. До деяких завдань створені технологічні картки, прописні алгоритми застосування технологій.

Після кожної теми другого блоку подано *Електронні помічники до теми* в яких пропонується студентам ознайомитися з сучасними е-ресурсами для роботи майбутнього вчителя початкової школи на уроках математики (онлайн дошки: *Twiddla, Miro, IDroo, Classroomscreen, Padlet*; е-ресурси для створення навчальних коміксів: *Comic Master, Pixton, Storyboardthat, MakeBeliefsComix, Write Comics* та інші).

Даний посібник не вичерпує всіх технологій навчання, але він сконцентрований на тих, які найчастіше використовуються на сучасних уроках математики в початковій школі НУШ.

І БЛОК: ЕЛЕМЕНТИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ МАТЕМАТИКИ

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ: МЕТА, ОСНОВНІ ЕТАПИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ, КЛЮЧОВІ ПОНЯТТЯ ТЕМИ

Мета. Ознайомити з основними дефініціями математичної логіки: математичні поняттями і математичними реченнями; поняттям висловлення і висловлюваної форми (предиката); навчити проводити операції над висловленнями та засвоїти правила побудови заперечення висловлень; ввести поняття квантора; усвідомити логічне слідування і рівносильність математичних речень; необхідна і достатня умова, структура та види теорем.

Необхідні умови досягнення мети: особиста потреба студента в необхідності пізнання інформації, спрямованої на розвиток професійних компетентностей майбутнього вчителя початкових класів, прояв активності в пізнанні та самостійності в розвитку логічного мислення, розв'язування логічних завдань та педагогічних ситуацій навчального характеру.

Основні етапи вивчення теми:

- 1.1. Математичні поняття. Зміст і обсяг поняття.
- 1.2. Означення понять.
- 1.3. Математичні речення. Висловлення та операції з ними.
- 1.4. Предикати (висловлювальні форми).
- 1.5. Квантори.
- 1.6. Міркування та умовиводи. Теореми та способи їх доведення.

Ключові поняття теми: математичні об'єкти і поняття, математичні речення, висловлення, логічні операції, змінна, висловлювана форма, квантор, міркування та умовиводи, теореми.

1.1. Математичні поняття. Зміст і обсяг поняття.

Короткі теоретичні відомості.

В таблиці 1.1.1 подані відомості про властивості математичного об'єкта, поняття як дефініція та обсяг поняття [3].

Таблиця 1.1.1

Властивості математичного об'єкта	
Істотна – властивість, яка притаманна цьому математичному об'єкту та існування його без неї неможливе	неістотна – властивість, відсутність якої не впливає на існування математичного об'єкта
Приклад: квадрат має чотири сторони, рівні діагоналі, чотири прямі кути тощо	Приклад: сторона AD квадрата ABCD горизонтальна
Поняття – це форма думки, в якій відображаються загальні істотні властивості предметів і явищ об'єктивної дійсності, загальні взаємозв'язки між ними у вигляді цілісної системи істотних ознак. Будь-яке поняття характеризується <i>терміном, обсягом та змістом</i>	
Сукупність усіх взаємопов'язаних істотних властивостей об'єкта називають <i>змістом поняття</i> про цей об'єкт	
<i>Обсяг поняття</i> – це сукупність усіх об'єктів, позначених одним і тим же терміном. Зміст та обсяг поняття пов'язані такою залежністю: із розширенням змісту поняття звужується його обсяг, навпаки, зі звуженням змісту поняття його обсяг розширюється	

Завдання 1.1.1. Накресліть три об'єкти, що належать до обсягу поняття:
1) геометрична фігура; 2) прямокутник; 3) квадрат; 4) ромб.

Завдання 1.1.2. Назвіть істотні властивості поняття:
1) трикутник; 2) прямокутник; 3) трапеція.

Завдання 1.1.3. Які з наведених нижче властивостей трапеції є суттєвими, а які несуттєвими:

1) дві сторони трапеції паралельні; 2) основи трапеції горизонтальні; 3) обидва кути при більшій основі гострі; 4) обидва кути при меншій основі тупі; 5) сума внутрішніх кутів трапеції дорівнює 360^0 ?

Завдання 1.1.4. Чи правильно, що обсяг поняття «прямокутник» більше, ніж обсяг поняття *квадрат*? Який взаємозв'язок існує між змістом цих понять?

Завдання 1.1.5. Який обсяг поняття: 1) цифра; 2) однозначне число?

Завдання 1.1.6. Серед наступних властивостей виділіть ті, якими володіє квадрат: 1) діагоналі діляться в точці перетину навпіл; 2) діагоналі ділять кути навпіл.

1.2. Означення понять.

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 1.2.1 подані означення понять та їх види – явні та неявні [3].

Таблиця 1.2.1

Означення поняття (дефініція) – це речення, в якому у вербальній або/та символічній формі перелічуються загальні істотні властивості, тобто розкривається зміст поняття	
Явні	Неявні
<p><i>Класичне означення (через рід та видову відмінність)</i></p> <div style="text-align: center;">  </div>	<p><i>Контекстуальне</i> – спосіб визначення понять, який полягає в тому, що зміст дефініції явно не вказується, а розкривається через контекст, у якому вона вживається</p>
<p><i>Остенсивне</i> – це означення, яке вводять шляхом демонстрації математичного об'єкту (демонстрація лінійки, циркуля тощо)</p>	
<p><i>Генетичне (від «генезис» – походження)</i> – це означення, в якому зміст поняття розкривається за допомогою вказівки на спосіб виникнення математичного об'єкту (означення трикутника, чотирикутника тощо)</p>	<p><i>Аксиоматичне</i> – це означення, яке спирається на сукупність положень якої-небудь теорії, що не потребують обґрунтування, оскільки їх достовірність є зрозумілою та прийнятною. Приклад: введення понять <i>точка</i>, <i>пряма</i>, <i>площина</i></p>
<p><i>Індуктивне (від «індукція» – це міркування від часткового до загального) або рекурентне (від «рекурсія» - повернення) – означення арифметичної та геометричної прогресій</i></p>	

Короткі теоретичні відомості.

В таблиці 1.2.2 наведені правила означень понять [3].

Таблиця 1.2.2

Правила означень понять	- означення повинно бути співрозмірним
	- не повинно містити «замкнене коло»
	- мають бути вказані всі властивості, що дозволяють однозначно виокремити математичний об'єкт або групу таких об'єктів, що належать обсягу означуваної дефініції
	- не повинно містити зайвої інформації
	- необхідно, щоб означуваний об'єкт існував

Завдання 1.1.7. Вкажіть найближче родове поняття для поняття:

1) прямокутник; 2) відрізок; 3) непарне число; 4) коло.

Завдання 1.1.8. Наведемо кілька означень.

1) Прямі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

2) Трикутник називається рівнобедреним, якщо хоча б дві його сторони рівні.

3) Значення змінної, яке перетворює рівняння в істинну рівність, називається коренем рівняння.

4) Відрізок, що з'єднує середини двох сторін трикутника, називається його середньою лінією.

Виділіть у наведених означення визначальне поняття, родове поняття та видову відмінність.

Завдання 1.1.9. Розглянемо педагогічну ситуацію.

На уроці геометрії у 8 класі учні давали означення прямокутника. Перший учень визначив поняття прямокутника так: «Прямокутником називається чотирикутник, у якого всі кути прямі і сторони попарно рівні».

Другий учень сказав: «Прямокутником називається чотирикутник, у якого всі кути прямі».

Третій дав таке означення: «Прямокутником називається чотирикутник, у якого протилежні сторони рівні».

Визначте, який з учнів дав правильне означення поняття прямокутника?

Чи можна визначити це поняття ще якимось чином?

Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 1.1.10. Наведіть приклади задач на розпізнавання фігур та інших об'єктів з підручників математики для початкових класів.

1.3. Математичні речення. Висловлення та операції з ними.

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 1.3.1 наведені відомості про математичні речення, висловлення та заперечення висловлення [3].

Таблиця 1.3.1

Математичні речення встановлюють зв'язки між математичними об'єктами та їхніми властивостями, характеризуються змістом і логічними зв'язками	
Елементарні (прості) речення не містять логічних сталих	Складені речення утворюються з простих за допомогою логічних сталих (слів <i>і</i> , <i>або</i> , частки <i>не</i> і деяких інших)
Число 15 ділиться на 5	Число 15 ділить на 5 і на 3
Висловленням називається речення, відносно якого має зміст питання, істинне воно, чи хибне	
Істинне (I, позначається 1)	Хибне (X, позначається 0)
Приклади істинних речень: число 2 просте; $5 > 3$	Приклади хибних тверджень: число 6 непарне; Місяць обертається навколо Сонця
Запереченням висловлення <i>A</i> називається висловлення, що істинно тільки тоді, коли висловлення <i>A</i> помилкове. Заперечення висловлення <i>A</i> позначається \bar{A} (читаємо як «не <i>A</i> »).	
Висловлення утворюються з інших висловлень за допомогою виразів, серед яких виділяють такі: <i>неправильно, що; не; і; або; якщо..., то; тоді і тільки тоді, коли...; для всіх...; існують ...</i> та їхніх синонімів, які називаються логічними сталими	

Завдання 1.1.11. Розділіть наступні речення на прості (елементарні) та складені:

- 1) У рівнобедреному трикутнику висота проведена до його основи є медіаною і бісектрисою.
- 2) У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.
- 3) Площа трикутника дорівнює половині добутку сторони на висоту, проведenu до цієї сторони.
- 4) Якщо трикутник рівнобедрений, то кути в ньому при основі рівні.
- 5) У прямокутному трикутнику один катет довший за інший катет або дорівнює йому.

Завдання 1.1.12. Розкрийте логічну структуру кожного висловлення: число 12 парне і ділиться на 6; якщо кути вертикальні, то вони рівні; число π є раціональним або ірраціональним; трикутник *ABC* не є рівностороннім; якщо число ціле й додатне, то воно натуральне.

Завдання 1.1.13. Наведіть приклади математичних речень, що мають структуру : 1) *A* і *B*; 2) *A* або *B*; 3) якщо *A*, то *B*.

Завдання 1.1.14. Які з наведених нижче тверджень є висловленнями (простими або складеними), які з них істинні, а які хибні: а) Всі непарні числа діляться на 3; б) Прийшло літо; в) Після весни настає літо; г) Будь-який квадрат – прямокутник.

Завдання 1.1.15. Доведіть або спростуйте наступні висловлювання: у довільному чотирикутнику діагоналі рівні; деякі непарні числа діляться на 6; існують парні числа, кратні 7; усі прямокутники є чотирикутниками.

Завдання 1.1.16. Які з наступних висловлювань істинні: будь-який квадрат є паралелограмом; будь-який ромб є квадратом; у будь-якому ромбі діагоналі в точці перетину діляться навпіл?

Завдання 1.1.17. Наведемо кілька речень: 1) число 7 ціле; 2) при діленні 32 на 5 в остачі залишається 4; 3) $x < 5$; 4) у будь-якому прямокутнику діагоналі рівні; 5) $34 \times 2 - 17 = 51$.

Вкажіть які серед них є висловлюваннями і встановіть значення їхньої істинності.

Завдання 1.1.18. Побудуйте заперечення наступних висловлювань:

- 1) число 132 ділиться на 9;
- 2) $5 < 4$;
- 3) 3,2 – число натуральне;
- 4) трикутник ABC (рис. 1) рівносторонній.

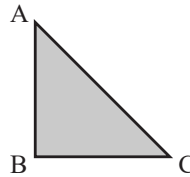


Рис. 1

Завдання 1.1.19. Визначте, чи є наступні пари речень запереченнями один одного:

- 1) Число 289 кратне 9. Число 289 не кратне 9.
- 2) Будь-яке натуральне число ділиться на 3. Будь-яке натуральне число не ділиться на 3.
- 3) Довільний багатокутник є чотирикутником. Існують багатокутники, які не є чотирикутниками.
- 4) Будь-який багатокутник є чотирикутником. Існують багатокутники, що не є чотирикутниками.
- 5) Існують натуральні числа менші за 1. Кожне натуральне число не менше одиниці.

Завдання 1.1.20. Наведемо декілька висловлювань:

- а) будь-яка властивість прямокутника притаманна квадрату;
- б) довільне натуральне число є розв'язком рівняння $2x - 4 = 2$;
- в) існує ціле число, яке є розв'язком рівняння $x^2 = -4$.

Встановіть істинність чи хибність цих висловлювань. Якщо висловлювання хибні, то побудуйте їхні заперечення двома способами.

Завдання 1.1.21. Наведемо декілька речень.

- а) Існує натуральне число, що є розв'язком нерівності $2x + 8 < 4$.
- б) Усі натуральні числа не є розв'язками нерівності $2x + 8 < 4$.
- в) Не правильно, що існує натуральне число, що є розв'язком нерівності $2x + 8 < 4$.
- г) Не існує натурального числа, що є розв'язком заданої нерівності $2x + 8 < 4$.

Знайдіть серед наведених речень заперечення висловлювання.

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 1.3.2 наведені відомості про диз'юнкцію, кон'юнкцію, імплікацію та еквівалентність висловлень [3].

Таблиця 1.3.2

Диз'юнкція та кон'юнкція висловлень																															
<p><i>Диз'юнкція</i> – бінарна логічна операція, яка кожній парі висловлювань A і B ставить у відповідність висловлення $A \vee B$ істинність значень якого задається таблицею (І – істина, Х – хиба)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>$A \vee B$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>І</td><td>І</td><td>І</td></tr> <tr><td>І</td><td>Х</td><td>І</td></tr> <tr><td>Х</td><td>І</td><td>І</td></tr> <tr><td>Х</td><td>Х</td><td>Х</td></tr> </tbody> </table>	A	B	$A \vee B$	І	І	І	І	Х	І	Х	І	І	Х	Х	Х	<p><i>Кон'юнкція</i> – бінарна логічна операція, яка кожній парі висловлювань A і B ставить у відповідність висловлення $A \wedge B$, істинність значень якого задається таблицею (І – істина, Х – хиба)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>$A \wedge B$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>І</td><td>І</td><td>І</td></tr> <tr><td>І</td><td>Х</td><td>Х</td></tr> <tr><td>І</td><td>Х</td><td>Х</td></tr> <tr><td>Х</td><td>Х</td><td>Х</td></tr> </tbody> </table>	A	B	$A \wedge B$	І	І	І	І	Х	Х	І	Х	Х	Х	Х	Х
A	B	$A \vee B$																													
І	І	І																													
І	Х	І																													
Х	І	І																													
Х	Х	Х																													
A	B	$A \wedge B$																													
І	І	І																													
І	Х	Х																													
І	Х	Х																													
Х	Х	Х																													
<p>Диз'юнкцію називають логічним додаванням і вербально передають за допомогою сполучника «або»</p>	<p>Кон'юнкцію називають логічним множенням. Найчастіше кон'юнкцію передають словами: «і», «та», «й» або взагалі без часток, за допомогою коми, що об'єднує дві частини висловлення</p>																														
<p>Приклад. Сьогодні я піду на заняття з математики або з інформатики. Висновок: відвідаю одне заняття або математику або інформатику</p>	<p>Приклад. Сьогодні я піду на заняття з математики та інформатики. Висновок: відвідаю два заняття: інформатику та математику</p>																														
Імплікація та еквівалентність висловлень																															
<p><i>Імплікація</i> – бінарна логічна операція, яка кожній парі висловлювань A і B ставить у відповідність висловлення $A \Rightarrow B$ істинність значень якого задається таблицею (І – істина, Х – хиба)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>$A \Rightarrow B$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>І</td><td>І</td><td>І</td></tr> <tr><td>І</td><td>Х</td><td>Х</td></tr> <tr><td>Х</td><td>І</td><td>І</td></tr> <tr><td>Х</td><td>Х</td><td>І</td></tr> </tbody> </table>	A	B	$A \Rightarrow B$	І	І	І	І	Х	Х	Х	І	І	Х	Х	І	<p><i>Еквівалентність</i> – бінарна логічна операція, яка кожній парі висловлювань A і B ставить у відповідність висловлення $A \Leftrightarrow B$, істинність значень якого задається таблицею (І – істина, Х – хиба)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>$A \Leftrightarrow B$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>І</td><td>І</td><td>І</td></tr> <tr><td>І</td><td>Х</td><td>Х</td></tr> <tr><td>І</td><td>Х</td><td>Х</td></tr> <tr><td>Х</td><td>Х</td><td>І</td></tr> </tbody> </table>	A	B	$A \Leftrightarrow B$	І	І	І	І	Х	Х	І	Х	Х	Х	Х	І
A	B	$A \Rightarrow B$																													
І	І	І																													
І	Х	Х																													
Х	І	І																													
Х	Х	І																													
A	B	$A \Leftrightarrow B$																													
І	І	І																													
І	Х	Х																													
І	Х	Х																													
Х	Х	І																													

Завдання 1.1.22. Наведемо декілька висловлень:

- а) число 72 ділиться на 9 або на 3;
- б) число 24 ділиться на 9 або на 2;
- в) $6 \leq 4$.

Які з цих висловлень істинні, а які хибні. Відповідь обґрунтуйте за допомогою поняття диз'юнкції.

Завдання 1.1.23. У математичному конкурсі серед учнів початкової школи міста Києва брали участь 3 хлопчики – Андрій, Борис, Іван – та 3 дівчинки – Галина, Марія та Ніна – з 4 класу однієї школи. Результати розв'язаних хлопчиками задач із запропонованих 6 представлені в таблиці 1.3.3:

Таблиця 1.3.3

Учні	Кількість розв'язаних задач					
	1	2	3	4	5	6
Андрій				+		
Борис		+				
Іван	+					
Галина						
Марія						
Ніна						

Кожна дівчинка сиділа за одним столом з одним із трьох своїх однокласників. Галина розв'язала стільки ж задач, що й хлопчик, який сидів поруч з нею, Ніна – у три рази більше свого сусіда, а Марія – у 2 рази більше за свого сусіда. Разом учні цієї школи розв'язали 18 задач. Встановіть, хто з ким сидів за одним столом.

Завдання 1.1.24. Розгляньте приклади імплікацій.

1) Імплікація $-3 < -2 \Rightarrow 9 < 4$ є хибною, оскільки умова істинна, а висновок хибний. За теоремою про піднесення обох частин істинної нерівності до квадрату має місце лише для нерівностей з додатніми членами.

2) Імплікація $-3 < -2 \Rightarrow 3 > 2$ є істинною, оскільки умова і висновок є істинними, перехід від умови до висновку здійснено за властивістю множення обох частин істинної нерівності на -1 .

3) Імплікація $-3 < -5 \Rightarrow 3 < 5$ є істинною, оскільки умова хибна, а висновок істинний, з хибної посилки отримали правильний наслідок.

4) Імплікація $-3 < -5 \Rightarrow 3 > 5$ істинна, оскільки з неправильної посилки отримали неправильний висновок на основі правильного переходу (за властивістю множення обох частин нерівності на -1).

Дайте відповідь на запитання, чому імплікація вважається істинною, якщо умова та висновок хибні?

1.4. Предикати (висловлювальні форми).

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 1.4.1 наведені відомості про предикати (висловлювальні форми) [3].

Таблиця 1.4.1

Висловлювальні форми (предикати) – це математичні речення, які містять одну або декілька змінних, яке перетворюється у висловлення при підстановці конкретних значень змінних	
Предикат – це функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значенням якої є висловлення про n об'єктів, у якій x_1, x_2, \dots, x_n є значенням аргументів	
Одномісні (при $n = 1$)	Дво (трьо і т.д) – місні ($n = 2, n = 3, \dots$)
$x - 1 = 0$	$x + y = 4 ; x + y + z = 6$
Область істинності предиката $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається множина значень n аргументів x_1, x_2, \dots, x_n , при яких заданий предикат перетворюється в істинне висловлення	

Завдання 1.1.25. Наведемо декілька речень. Оберіть серед них ті, які є предикатами.

- 1) $x^2 + 5x - 6 = 0$;
- 2) $x - 1 < 2$;
- 3) $2 \cdot 3 - 1 > 0$;
- 4) Довільне число є розв'язком нерівності $x - 1 < 2$;
- 5) Деякі числа є розв'язком нерівності $x^2 + 5x - 6 < 0$.

Завдання 1.1.26. Серед наступних речень вкажіть тотожно істинні і тотожно хибні предикати:

- | | |
|-------------------|------------------------|
| а) $x - 1 < x$; | в) $ \sin x \leq 1$; |
| б) $\cos x > 1$; | г) $x^2 + y^2 < 0$. |

Завдання 1.1.27. Подайте предикати $P(x)$ у вигляді кон'юнкції та/або диз'юнкції простих предикатів і знайти їх множини істинності. Зробіть геометричну інтерпретацію на координатній прямій:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| а) $x^2 + 5x - 14 = 0$; | в) $3x^2 - 13x + 4 = 0$; |
| б) $x^2 - 14x + 40 = 0$; | г) $12x^2 + x - 6 = 0$. |

Завдання 1.1.28. Доведіть, що предикат $x^2 + 2x + 3 = 0$, заданий на множині дійсних чисел, має порожню множину істинності.

Завдання 1.1.29. Доведіть, що предикат $x^2 - 6x + \frac{7}{x-5} = \frac{7}{x-5} - 5$ має один простий предикат у множині істинності.

1.5. Квантори

Короткі теоретичні відомості.

В таблиці 1.5.1 наведені відомості про квантори [3].

Таблиця 1.5.1

<p><i>Квантор</i> – (від латинського слова <i>quantum</i> – скільки) показує про яку кількість об'єктів говориться в математичному реченні.</p> <p>Кванторів уживається два – квантор загальності \forall та квантор існування \exists</p>	
<p><i>Квантор загальності</i> – це така логічна операція \forall, яка для кожного одномісного предиката $f(x)$, що визначений на множині D, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлювання</p> $\forall x [f(x)]$ <p>(читається <i>для кожного x має місце $f(x)$</i>), яке істинне тоді і тільки тоді, коли для кожного $a \in D$ предикат $f(x)$ перетворюється в істинне висловлення</p> $f(a) = i$	<p><i>Квантор існування</i> – це така логічна операція \exists, яка для кожного одномісного предиката $f(x)$, що визначений на множині D, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлювання</p> $\exists x [f(x)]$ <p>(читається <i>існує таке x, що має місце $f(x)$</i>), яке істинне тоді і тільки тоді, коли існує хоча одне $a \in D$, для якого предикат $f(x)$ перетворюється в істинне висловлення</p> $f(a) = i$
<p>Встановлення значення істинності висловлення з квантором</p>	
<p>Істинність висловлень з квантором загальності встановлюється шляхом доведення</p>	<p>Істинність висловлення з квантором існування встановлюється за допомогою конкретного прикладу</p>

Завдання 1.1.30. Запишіть за допомогою квантора загальності наступні речення:

кожне натуральне число є дільником нуля; усі натуральні числа парні.

Завдання 1.1.31. Запишіть за допомогою квантора існування наступні речення:

існує парне число;
деякі непарні числа ділять на 2.

Завдання 1.1.32. Знайдіть в підручниках «Математика» для початкової школи речення, які можна записати за допомогою квантора загальності.

Завдання 1.1.33. Знайдіть в підручниках «Математика» для початкової школи речення, які можна записати за допомогою квантора існування.

1.6. Міркування та умовиводи. Теореми та способи їх доведення.

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 1.6.1 наведені відомості про відношення слідування та рівносильності між реченнями [3].

Таблиця 1.6.1

Відношення слідування та рівносильності між реченнями	
$A \Rightarrow B$	Із речення A слідує речення B (імплікація)
$A \Leftrightarrow B$	Якщо із речення A слідує речення B , а із речення B слідує речення A , то ці речення рівносильні (еквіваленція)
Необхідна та достатня умови	
Достатня умова, якщо при її виконанні висновок завжди правильний В істинній імплікації $A \Rightarrow B$ умова A достатня для B	Якщо число закінчується цифрою 5, то воно ділиться на 5
Необхідна умова, якщо без її виконання висновок не може бути правильним В істинній імплікації $A \Rightarrow B$ умова B є необхідною для A	Якщо натуральне число закінчується нулем, то воно ділиться на 10

Завдання 1.1.34. В таблиці 1.6.2 подано речення A та B :

Таблиця 1.6.2

A	B
Число x кратне 3	Число x кратне 9
У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі рівні	Чотирикутник $ABCD$ – прямокутник
Число x парне	Число x кратне 5
Трикутник ABC прямокутний	Трикутник ABC рівнобедрений

Подумайте та встановіть, чи знаходяться у відношенні логічного наслідку речення A та B .

Завдання 1.1.35. Чи рівносильні речення A та B , якщо:

- 1) A – «Число x ділиться на 3», B – «Сума цифр числа x ділиться на 3»;
- 2) A – «Кожен доданок суми ділиться на 4», B – «Сума ділиться на 4»?

Завдання 1.1.36. Відомо, що речення «Якщо число ділиться на 4, то воно ділиться на 2» істинно. Сформулюйте його, використовуючи слова *необхідно* і *достатньо*.

Завдання 1.1.37. Які з наведених нижче висловлювань істинні:

- 1) для того, щоб число ділилося на 2, необхідно, щоб воно закінчувалось нулем;
- 2) для того, щоб число ділилося на 3, достатньо, щоб воно ділилося на 6;
- 3) для того, щоб число ділилось на 10, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 2 і на 5;
- 4) для того, щоб число ділилося на 15, необхідно, щоб воно ділилось на 5;
- 5) для того, щоб число ділилося на 100, достатньо, щоб воно ділилося на 10?

Завдання 1.1.38. Які з наступних речень можна сформулювати, вживши слова *необхідно і достатньо*: будь-яке число, яке ділиться на 3 і на 5, ділиться на 15; в прямокутнику діагоналі рівні; сума двох парних чисел є парне число?

Короткі теоретичні відомості. У таблиці 1.6.3 наведені відомості про теореми.

Таблиця 1.6.3

Теорема – це твердження, яке потрібно доводити в межах певної теорії, ґрунтуючись на аксіомах цієї теорії та раніше доведених твердженнях	
$A \Rightarrow B$	Якщо має місце A , то має місце B , де A – умова теореми, а B – її висновок
Види теорем	
Пряма теорема (дана теорема)	$A \Rightarrow B$
Обернена теорема даній	$B \Rightarrow A$
Протилежна теорема даній	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$
Обернена теорема протилежній	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
Довести теорему $A \Rightarrow B$ – це означає встановити логічним шляхом, що завжди, коли виконується властивість A , то буде виконуватись і властивість B .	

Завдання 1.1.39. Виділіть умову і висновок в кожній з теорем:

- якщо в трикутнику всі сторони рівні, то всі кути рівні;
- сума двох парних чисел – парне число;
- якщо числа кратне 3 і 4, то воно кратне 12;
- для того, щоб різниця ділилася на дане число, достатньо, щоб зменшене і від’ємник ділилися на це число;
- для того, щоб різниця натуральних чисел a та b була натуральним числом, необхідно та достатньо, щоб $a > b$.

Завдання 1.1.40. Які з теорем рівносильні теоремі «У будь-якому прямокутнику діагоналі рівні»:

- якщо чотирикутник – прямокутник, то діагоналі в ньому рівні;
- якщо діагоналі в чотирикутнику не рівні, то цей чотирикутник не є прямокутником;
- якщо діагоналі в чотирикутнику рівні, то цей чотирикутник – прямокутник;
- для того, щоб діагоналі в чотирикутнику були рівні, достатньо, щоб цей чотирикутник був прямокутником?

Завдання 1.1.41. Чи є такі пари теорем оберненими одна одній:

- Якщо чотирикутник – квадрат, то в ньому є прямиий кут. Для того, щоб чотирикутник був квадратом, достатньо, щоб в ньому був прямиий кут.
- Для того щоб число було натуральним, необхідно, щоб воно було додатним. Якщо число натуральне, то воно додатне?

Завдання 1.1.42. Прочитайте дані теореми:

- 1) Якщо кути суміжні, то їхня сума 180° .
- 2) Якщо два кути трикутника рівні, то і сторони які лежать напроти них, теж рівні.

Запишіть теорему, обернену до даної. Проаналізуйте чи можна дану теорему та обернену до неї об'єднати в одну.

Короткі теоретичні відомості. У таблиці 1.6.4 наведені відомості про логічні операції міркування – дедуктивні та індуктивні [3].

Таблиця 1.6.4

<p><i>Міркування</i> – це логічна операція, за допомогою якої з одного або декількох взаємопов'язаних речень можна отримати нове речення, яке містить у собі нові знання. В основі доведення теорем лежить міркування. У будь-якому міркування є посилки і висновок, між якими існує певний зв'язок, завдяки якому і відбувається міркування.</p>	
<p><i>Дедуктивні</i> (лат. deduction – виведення) міркування – міркування, між посилками і висновками якого має місце відношення слідування (від загального до часткового)</p>	<p>Твердження-посилки: Чотирикутник – геометрична фігура. Ромб – це чотирикутник. Висновок. Ромб – це геометрична фігура</p>
<p><i>Індуктивні</i> (лат. in-ductio – привести до) міркування – міркування на основі спостереження деякої властивості у кожного об'єкта досліджуваної множини робиться висновок про наявність цієї властивості у всіх представників цієї множини (від часткового до загального)</p>	<p>Твердження-посилка: моя тітка любить квіти, моя мама любить квіти, моя сусідка любить квіти Висновок: усі жінки люблять квіти</p>

Завдання 1.1.43. Наведемо міркування:

Якщо трикутник рівнобедрений, то кути в ньому при основі рівні.
Трикутник ABC рівнобедрений, отже кути в ньому при основі рівні.
Виділіть загальну посилку, часткову посилку та висновок.

Завдання 1.1.44. Наведемо міркування.

У довільному рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні;
Кути при основі трикутник ABC нерівні, то трикутник ABC не є рівнобедреним.

Проаналізуйте схему міркування.

Завдання 1.1.45. Створіть схеми кожного з наведених міркувань:

1) Протилежні кути паралелограма рівні. Чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.
Отже, $\angle B = \angle D$.

2) Протилежні кути паралелограма рівні. Протилежні кути чотирикутника $ABCD$ рівні. Отже, $ABCD$ – паралелограм.

3) Протилежні кути паралелограма рівні. Чотирикутник $ABCD$ не є паралелограмом. Отже, його протилежні кути не рівні.

4) Протилежні кути паралелограма рівні. Протилежні кути чотирикутника $ABCD$ не рівні. Отже, $ABCD$ не є паралелограмом.

Які з них є дедуктивними?

Питання для самоперевірки до теми 1

1. Які властивості *математичного об'єкта*?
2. Що таке *поняття*?
3. Чим характеризується *поняття*?
4. Які існують означення *дефініцій*?
5. Сформулюйте правила *означень понять*.
6. Які *математичні речення* існують?
7. Що таке *висловлення*?
8. Сформулюйте означення *диз'юнкції* висловлення.
9. Яку логічну операцію називають *кон'юнкцією* висловлення?
10. Сформулюйте означення *імплікації*.
11. Яку логічну операцію називають *еквівалентністю*?
12. Які математичні речення називають *предикатами*?
13. Які математичні речення називають *висловлювальними формами*?
14. Що називають *областю істинності предиката*?
15. Сформулюйте означення *квантора*.
16. Які існують *квантори*?
17. Як позначають *квантори*?
18. Що називають *аксіомою*?
19. Яке твердження називається *теоремою*?
20. Що означає *довести теорему*?
21. Яку логічну операцію називають *міркуванням*?
22. Які існують *міркування*?
23. Що називається *дедукцією*?
24. Сформулюйте поняття *індукції*?
25. Наведіть приклад *індукції*.

Електронні помічники до теми I

Карти знань

У професійній діяльності вчителю потрібно опрацьовувати і структурувати великі обсяги інформації, готуючись до цікавих та творчих уроків. Звичайно, з розвитком штучного інтелекту (AI) ця проблема полегшується, можна задати одній з програм (*ChatGPT*, *GoogleBard* та інші) тему та питання які потрібно зібрати та опрацьовувати – і штучний інтелект збере інформацію. Але чи достовірна буде вся зібрана інформація? Як її перевірити та запам'ятати? Тому для опрацьовування, структурування та запам'ятовування достовірної інформації рекомендуємо використовувати *ментальні карти*.

Аналізуючи вітчизняну та зарубіжну наукову літературу зустрічаємось з науковою полісемією, яка містить сутність поняття спільну, але має різні терміни, у нашому випадку це *ментальна карта*, *карта знань*, *інтелект-карта*. Всі ці дефініції є синонімами і означають спосіб опрацьовування інформації графічним та візуальним способами; вид запису ідей, думок.

Ментальна карта (англ. *Mind map*) містить основну інформацію з досліджуваної тематики, яка розміщується так, щоб мозку було легко з нею працювати: в центрі знаходиться ключове поняття, від якого відходять радіально гілки, на кінцях яких містяться поняття нижчі за рангом від основного або другорядні завдання. Від них можуть відгалужуватись інші гілки, на яких будуть записані ідеї, слова тощо. Таким чином, карта складена та структурована за певними законами, може візуалізувати досить великий теоретичний матеріал, якусь наукову концепцію та ін. Ментальні карти використовуються як засіб під час навчання, написання плану-конспекту уроку та презентації результатів [6].

Переваги інтелект карт подані у вигляді карти знань на Рис.1.1.1.

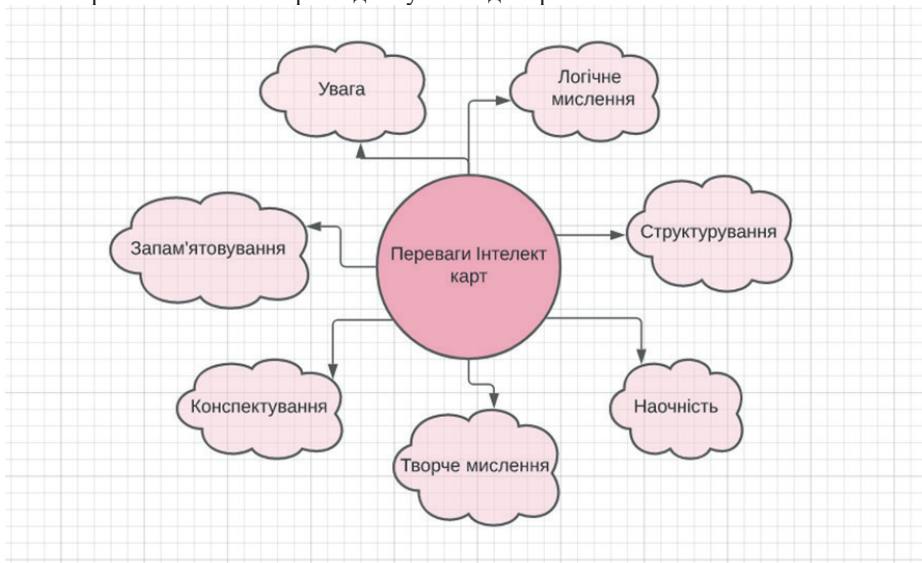


Рис 1.1.1. Переваги карт знань

На рис. 1.1.2 подано класифікацію типів ментальних карт [6].

Стандартні карти (standard maps)	служують для засвоєння, запису ідей і розкриття власної індивідуальності
Швидкісні карти/карти-блискавки (speed maps)	стимулюють індивідуальні розумові процеси (що я знаю з цієї теми)
Майстер-карти (master maps)	об'ємні карти до цілої галузі знань. Наприклад, карти за матеріалами одного семестру
Мега-карти (mega maps)	карти, пов'язані одна з одною

Рис.1.1.2. Класифікація типів ментальних карт

У таблиці 1.6.5 подано алгоритм створення ментальної карти [6].

Таблиця 1.6.5

Алгоритм створення карти знань

№	Елементи теми	Фігура на карті
1.	Формулювання теми (проблеми)	Центральна фігура на карті (овал, квадрат, прямокутник) з написом
2.	Ключові розділи теми (ключові слова) n штук	Гілки (головні) (форма гілок за вибором автора) n штук, завершуються фігурою в 2-3 рази меншою і іншої форми за центральну фігуру, в якій вказані ключові розділи теми; розташування гілок мають радіальну структуру; кількість гілок дорівнює кількості ключових розділів; кольори гілок різні, але однакові з тією фігурою, до якої вони прямують
3.	Ключові слова	Додаткові гілки, що відходять від основних (менші і тонші від основних), завершуються фігурою в 2 рази меншою за фігуру ключових розділів теми; форма фігури за вибором автора; важливі поняття розташовують ближче до центру, а менш важливі далі від центру

Сучасні інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) відкривають нові можливості для всіх учасників освітнього процесу: для тих хто навчається (учнів, студентів) та тих, хто навчає (вчителів, викладачів). ІКТ дозволяють урізноманітнити традиційне навчання, розробити нові ідеї, пришвидшити розв'язання проблеми. Останніми роками популярними стали безліч електронних освітніх ресурсів серед яких є онлайн ресурси (відкриті онлайн ресурси, англ. *Open Educational Resources*) – освітні засоби, доступ до яких відкритий завдяки безкоштовній ліцензії. На просторах інтернет мережі існує багато безкоштовних (або умовно безкоштовних, які дають можливість спробувати можливості ресурсу, а потім пропонують оформити платну

підписку на нього) для створення інтелект-карт, зокрема: *Free Mind*, *Bubbl.us*, *Mind Meister*, *Coogle*, *Canva* та інші.

У таблиці 1.6.6 пропонуємо розглянути переваги та недоліки деяких з них.

Таблиця 1.6.6.

Е-ресурси для створення інтелект карт

№	Назва ресурсу	Опис переваг	Опис недоліків
1.	<i>Free Mind</i> одна з найпоширеніших, безкоштовних програм з побудови ментальних карт	<ul style="list-style-type: none"> - зрозуміле управління; - наявні основні функціональні можливості для побудови Mind Maps; - підтримує імпорт і експорт у формати: JPEG, HTML, OpenDocument TextXHTML, PNG і XML; - багатомовний інтерфейс; - наявна функція шифрування як цілого документу так і його частини 	<ul style="list-style-type: none"> - необхідно перед інсталяцією програми встановити Java; - неможливо прикріплювати документи і файли до гілок; - графічні елементи досить низької якості, проте можна прикріплювати власні
2.	<i>Bubbl.us</i> безкоштовна on-line програма із зручною навігацією, ідеально підходить для проведення мозкового штурму	<ul style="list-style-type: none"> - є можливість створення карти роздруковувати, помістити у блог або на сайт; - є можливість одночасної роботи з картою кількох людей в реальному часі; - редагування карти за посиланням; - карту можна зберегти як малюнок, а також надіслати електронною поштою 	<ul style="list-style-type: none"> - неможливо долучити зображення; - не можна прикріплювати зображення, а лише змінювати колір підрозділу або розташування у просторі
3.	<i>Mind Meister</i>	<ul style="list-style-type: none"> - можливо імпортувати та експортувати карти з FreeMind; - можливо зберігати карти на сервері і мати до них доступ з будь-якого комп'ютера; - можливо прикріплювати файли до гілочок; - є безкоштовна версія Basic Free version (з функціональними обмеженнями); - інтегрується з Google-інструментами, Dropbox, і т.д. 	<ul style="list-style-type: none"> - графічні символи маленькі за розміром; - за повну версію потрібно платити

Концепція створення та застосування інтелект карт належить британському психологу та консультанту з питань освіти Тоні Бюзену (Tony Buzan), який займався дослідженнями особливостей мислення найбільших геніїв сучасності. Вчений дійшов висновку, що процес мислення геніїв спирається на асоціації та фантазію.

Створення ментальних карт вчить умінню організуватися, вибрати основні поняття теми уроку, структурувати і естетично оформити матеріал. Таким чином сприяє виробленню сили волі, наполегливості в досягненні позитивного результату в навчанні.

Пропонуємо і вам структурувати теоретичний матеріал з теми «Елементи математичної логіки» за допомогою карт знань.

ТЕМА 2. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ: МЕТА, ОСНОВНІ ЕТАПИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ, КЛЮЧОВІ ПОНЯТТЯ ТЕМИ

Мета. Ознайомити з основними дефініціями лінійної алгебри та навчити виконувати дії її з ними: числова матриця та визначник; навчити використовувати матриці при формуванні та аналізі таблиць у педагогіці; розв’язувати системи лінійних рівнянь.

Необхідні умови досягнення мети: особиста потреба студента в необхідності пізнання інформації, спрямованої на розвиток професійних компетентностей майбутнього вчителя початкових класів, прояв активності у пізнанні та самостійності в розвитку логічного мислення, розв’язування логічних завдань та педагогічних ситуацій навчального характеру.

Основні етапи вивчення теми:

- 2.1. Означення матриць та дії з ними.
- 2.2. Визначники та дії над ними.
- 2.3. Системи лінійних рівнянь.

2.1. Означення матриць та дії з ними.

Короткі теоретичні відомості.

В таблиці 2.1.1. подані відомості про матрицю, види матриць, додавання та віднімання матриць [1, 2].

Таблиця 2.1.1

<p>Матрицею $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається множина чисел, що надана у вигляді прямокутної таблиці, яка має m рядків і n стовпців, а самі числа – елементи матриці.</p>	
Види матриць	
<p>Прямокутна – це матриця, яка має довільну кількість рядків і стовпців, у загальному випадку $m \neq n$. У випадку $m = n$ перетворюється на квадратну</p>	<p>$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ – квадратна матриця</p>
<p>Одинична матриця – це діагональна матриця з елементами, які дорівнюють одиниці</p>	<p>$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця</p>
Дії з матрицями	
<p>Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на число λ називається нова матриця $B = \lambda A$, кожний елемент якої є добутком відповідного елемента матриці A на множник λ</p>	<p>$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$, тоді $B = \lambda A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$</p>
<p>Сумою матриць $A = (a_{ij})_{m \times n}$ і $B = (b_{ij})_{m \times n}$ однакового розміру є матриця $C = A + B$ того ж самого розміру, кожний елемент якої c_{ij} є сумою відповідних елементів вихідних матриць</p>	<p>$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, тоді $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$</p>
<p>Різницею матриць A і B однакового розміру можна розглядати як суму матриць A і $(-1)B$</p>	<p>$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, тоді $A - B = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$</p>

Продовження таблиці 2.1.1

Лінійні операції над матрицями:

- а) комунікативність (переставний закон);
- б) асоціативність (сполучний закон);
- в) дистрибутивність (розподільний закон)

- а) $A+B=B+A, A\lambda=\lambda A$;
- б) $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C, \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu(\lambda A)$;
- в) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,$
 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

Завдання 1.2.1. Виконати множення матриці на задане число:

- 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \lambda = 5;$
- 2) $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \lambda = 3;$
- 3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = -1;$
- 4) $D = \begin{pmatrix} -5 & 1/3 & -1 \\ -1/3 & -3 & 4 \\ -1 & 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}, \lambda = -3.$

Завдання 1.2.2. Виконати додавання та віднімання матриць A і B

- 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$
- 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$
- 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix};$
- 4) $A = \begin{pmatrix} 1,2 & -0,3 & 0,7 \\ -1 & 4 & 0,8 \\ 0,2 & -0,4 & -0,5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0,3 \\ 1 & 4 & 0,8 \\ 0,8 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.2.3. Задано матриці A і B. Виконати вказані дії:

а) $A - 2B$; б) $2A + B$.

- 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
- 2) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix};$
- 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 14 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
- 4) $A = \begin{pmatrix} -5 & 13 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 2.1.2 подані відомості множення матриць [1, 2].

Таблиця 2.1.2

Добутком матриці A розміром $m \times k$ на матрицю B розміром $k \times n$ називається матриця C розміром $m \times n$, елементи якої обчислюються за формулою:

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$ (тобто за правилом «рядок на стовпець»).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ тоді}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 16 \\ 14 & 12 & 30 \\ 15 & 15 & 32 \end{pmatrix}$$

Завдання 1.2.4. Задано матриці A і B . Виконати вказані дії:

а) AB ; б) A^2 ; в) B^2 .

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.2.5. Обчисліть значення виразу $A^3 - B^3$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$

2.2. Визначники та дії над ними.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 2.2.1 подані відомості визначник, його порядок та правила обчислення (розкриття) визначників другого та третього порядку [1, 2].

Таблиця 2.2.1

Визначником квадратної матриці A називається число ΔA , яке за певним правилом ставиться їй відповідність
Порядок визначника – це порядок квадратної матриці, для якої обчислюється цей визначник
Обчислити визначник – це синонім словосполучення <i>розкрити визначник</i>
Визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ обчислюється $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
Визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ обчислюється за формулою $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$
Правило «трикутників» для обчислення визначників третього порядку $+ \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}$

Завдання 1.2.6. Обчислити визначники другого порядку

- а) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$;
- в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1.5 & -2.5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.2.7. Обчислити визначники третього порядку

- а) $\begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;
- в) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.2.8. Розв'яжіть рівняння:

- а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$.

Завдання 1.2.9. Розв'яжіть нерівність :

- а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} > 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} \leq 0$.

2.3. Системи лінійних рівнянь.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 2.3.1 подані відомості про системи лінійних рівнянь та розв'язування системи лінійних рівнянь за правилом Крамера [1, 2].

Таблиця 2.3.1

<p>Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називається сукупність рівнянь першого степеня, тобто лінійних рівнянь відносно невідомих x_1, x_2, \dots, x_n, які в кожному рівнянні є числовими характеристиками одного і того ж процесу.</p> <p>У нашому випадку система</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ <p>має таку ж кількість рівнянь як і число невідомих.</p> <p>Розв'язати систему рівнянь – це знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.</p> <p>Матричний запис СЛАР</p> $A \cdot X = B,$ <p>матриця A складена з коефіцієнтів при невідомих називається основною матрицею системи. Приєднуючи справа через вертикальну риску до матриці A стовпець вільних членів $b_i, i=1, n$, отримуємо прямокутну матрицю $A B$, яку називають розширеною матрицею системи</p>	
<p><i>Розв'язування системи лінійних рівнянь за правилом Крамера</i></p>	
<p>1) Знайти визначник основної матриці Δ, з'ясувати що він не дорівнює нулю $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок</p>	$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
<p>2) Обчислити визначники, що відповідають невідомим $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$.</p>	$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 33 & 3 & 2 \\ 23 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 3 & 23 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -3,$ $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 33 \\ 3 & 2 & 23 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -2$
<p>3) Обчислити значення невідомих за формулами $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, i=1, n$.</p>	<p>Розв'язок системи</p> $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3,$ $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2.$
<p>Якщо $\Delta = 0$, тоді: 1) якщо $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ відмінні від нуля, то система розв'язку немає; 2) якщо $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система має безліч розв'язків</p>	

Завдання 1.2.10. Розв'язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$

Завдання 1.2.11. Розв'язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -9 \\ 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -13; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -5 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases} \\ \\ \text{в)} \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \end{array}$$

Завдання 1.2.12. Доведіть, що система невизначена і має частинний розв'язок $x_2 = 7 - 3x_1, x_3 = 18 - 7x_1$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Питання для самоперевірки до теми 2

1. Що називають прямокутною числовою *матрицею*?
2. Що таке *елементи матриці* і чим визначається розмір матриці?
3. Як визначається місце розташування певного елемента матриці?
4. Які матриці називають рівними?
5. Яка матриця називається квадратною?
6. Яку матрицю називають сумою (різницею) двох матриць?
7. Яку матрицю називають добутком матриці на скаляр?
8. Яким законам підпорядковуються дії додавання матриць і множення матриці на число?
9. За яким правилом визначають елементи матриці, яка є добутком двох матриць? Наведіть схему виконання цієї операції.
10. Для якого виду матриць вводиться поняття *визначник*?
11. Що розуміють під *визначником другого порядку*?
12. Як обчислити визначник третього порядку за *правилом трикутників*?
13. Що таке *СЛАР* ?
14. Наведіть символічні записи СЛАР і опишіть їх складові.
15. Яка матриця, що складається з параметрів системи рівнянь, називається розширеною?
16. Що таке розв'язок системи рівнянь?
17. Наведіть алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь за правилом Крамера.
18. За якої умови за правилом Крамера система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?
19. За якої умови за правилом Крамера система лінійних рівнянь не має розв'язку?
20. За якої умови за правилом Крамера система лінійних рівнянь має безліч розв'язків?

Електронні помічники до теми 2

У педагогічній діяльності вчителя початкових класів (і не тільки) часто доводиться мати справу з таблицями, які схожі на алгебраїчні матриці, мають стовпці та рядки, але назви їх можуть варіюватися в залежності від необхідності вчителя. Наприклад журнал оцінювання учнів класу: стовпці це – дати проведення занять; рядки – це прізвище, ім'я та по батькові кожного учня цього класу. На перетині дати проведення та прізвища учня – оцінка за урок, або відмітка про відсутність учня.

Такий журнал легко вести за допомогою MS Excel.

За допомогою програмного забезпечення MS Excel можна створювати динамічні таблиці, які легко змінювати, переформатовувати, аналізувати. В таких таблицях можна зберігати дані різного формату: числові дані, тестові дані, формули тощо, які створюються по типу матриці (мають стовпці та рядки); мають робочі аркуші.

Excel має функції:

Обчислення та формули – дозволяє швидко виконувати арифметичні обчислення та операції з даними.

Графіки та візуалізація – має великий спектр можливостей для створення графіків та діаграм, що дає можливість візуалізувати дані, зробити їх більш зрозумілими для аналізу.

Фільтрація (сортування) – дозволяє вибрати з великого обсягу даних ті, які цікавлять дослідника на даний момент або які відповідають певному критерію для подальшого їх аналізу.

На рис.1 наведено приклад такого журналу

1	Група 1										08.03.	08.Вер.	15.Вер.	15.Вер.	22.Вер.	22.Вер.	29.Вер.	29.Вер.	31.Вер.	05.Кві.	05.Кві.	CO1	12.Кві.	12.Кві.	19.Кві.	19.Кві.	26.Кві.	26.Кві.	03.Тра.	03.Тра.	10.Тра.			
2											січ.	фев.	бер.	квіт.	трав.	чер.	лип.	серп.	вер.	жовт.	лист.	груд.	січ.	фев.	бер.	квіт.	трав.	чер.	лип.	серп.	вер.			
3	1.	Забович(ка) вищої освіти																																
4	2.	Забович(ка) вищої освіти																																
5	3.	Забович(ка) вищої освіти																																
6	4.	Забович(ка) вищої освіти																																
7	5.	Забович(ка) вищої освіти																																
8	6.	Забович(ка) вищої освіти																																
9	7.	Забович(ка) вищої освіти																																
10	8.	Забович(ка) вищої освіти																																
11	9.	Забович(ка) вищої освіти																																
12	10.	Забович(ка) вищої освіти																																
13	11.	Забович(ка) вищої освіти																																
14	12.	Забович(ка) вищої освіти																																
15	13.	Забович(ка) вищої освіти																																
16	14.	Забович(ка) вищої освіти																																
17	15.	Забович(ка) вищої освіти																																
18	16.	Забович(ка) вищої освіти																																
19	17.	Забович(ка) вищої освіти																																
20	18.	Забович(ка) вищої освіти																																
21																																		
22																																		
23																																		
24																																		
25																																		
26																																		
27																																		
28																																		
29																																		
30																																		

Рис. 2.1.1 Журнал

Ми перерахували тільки частину можливостей Excel, які зручно використовувати в педагогічній діяльності вчителя початкової школи. Є багато й інших функцій, які можна застосовувати в подальшій роботі, оскільки Excel є потужним помічником для роботи з базами даних у сучасному динамічному світі.

Онлайн калькулятори для роботи з матрицями подані в таблиці 2.3.2.

Таблиця 2.3.2.

1. <https://ua.onlinemschool.com/math/assistance/matrix/determinant/>

Онлайн калькулятор. Додавання та різниця двох матриць

Скориставшись цим **онлайн калькулятором для додавання та віднімання матриць**, ви зможете дуже просто і швидко знайти суму двох матриць або різницю двох матриць.

Скориставшись **онлайн калькулятором для додавання та віднімання матриць**, ви отримаєте детальний розв'язок вашого прикладу, який дозволить зрозуміти алгоритм розв'язання таких задач і закріпити вивчений матеріал.

Калькулятор Інструкція Теорія

Калькулятор додавання та віднімання матриць

Вводити можна лише числа або дробки (-2,4, 5/7, ...). Більш детально читайте в [правилках вводу чисел](#).

Активувати
Перейдіть до

Онлайн калькулятор. Множення матриці на число.

Скориставшись цим **онлайн калькулятором для множення матриці на число**, ви зможете дуже просто і швидко знайти добуток матриці і числа.

Скориставшись **онлайн калькулятором для обчислення добутку матриці на число**, ви отримаєте детальний розв'язок вашого прикладу, який дозволить зрозуміти алгоритм розв'язання таких задач і закріпити вивчений матеріал.

Калькулятор Інструкція Теорія

Знайти добуток матриці на число

Вводити можна лише числа або дробки (-2,4, 5/7, ...). Більш детально читайте в [правилках вводу чисел](#).

Активувати
Перейдіть до

2. <https://matrixcalc.org/uk/>

Цей калькулятор дозволяє обчислювати матриці та визначники різними методами з повними поясненнями.

Matrix calculator

Операції з матрицями ✓

Розв'язання систем лінійних рівнянь
Знаходження визначника
Знаходження власних векторів
Необхідна теорія

Матриця A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Матриця B: $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Копіювати, Знайти визначник, Знайти обернену, Транспонувати, Знайти ранг, Помножити на 2, Трикутний вигляд, Діагональний вигляд, Півністи до степеня 2, LU-розкладання, Розклад Холецкого

A + B, A - B

Виводити десятковий дріб

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

► Деталі (Правило трикутника)
► Деталі (Правило Сарреса)
► Деталі (Метод Гауса-Монтанте (алгоритм Барейса))
► Деталі (Метод Гауса)

Виводити десятковий дріб

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

▼ Деталі (Правило трикутника)

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	$= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	$a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$
$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$		$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	
$- a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$		$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	
$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$		$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	
$- a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$		$- a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) \cdot 2 = -8$$

Активация Windows

Користування калькулятором для виконання дій з матрицями та визначниками дозволяє швидко перевірити обчислення.

Учитель повинен надавати достовірну інформацію, тому застосування Excel та різного роду математичних калькуляторів допомагає перевірити обчислення, виховує точність та скрупульозність у роботі.

ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ: МЕТА, ОСНОВНІ ЕТАПИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ,
КЛЮЧОВІ ПОНЯТТЯ ТЕМИ

Мета. Ознайомити з основними дефініціями аналітичної геометрії – розділом математики, об’єктом вивчення якого є геометричні фігури, а предметом – встановлення їхніх властивостей засобами алгебри: системою координат на прямій, на площині та в просторі; відстанню між точками, координатами середини відрізка; поділом відрізка у заданому відношенні; векторами, видами векторів та діями з векторами; кривими другого порядку.

Необхідні умови досягнення мети: особиста потреба студента в необхідності пізнання інформації з елементів аналітичної геометрії, що розширюють знання майбутнього вчителя початкових класів про системи координат на прямій, на площині та в просторі, про вектори, геометричні фігури; прояв активності у пізнанні та самостійності в розвитку логічного мислення, розв’язування логічних завдань та педагогічних ситуацій навчального характеру.

Основні етапи вивчення теми:

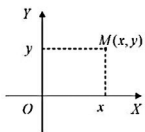
- 3.1. Системи координат на прямій, на площині, в просторі.
- 3.2. Лінійні операції над векторами.
- 3.3. Пряма лінія на площині.
- 3.4. Криві другого порядку.

3.1. Системи координат на прямій, на площині, в просторі.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.1.1 подані відомості про системи координат на прямій, площині та в просторі; формули знаходження відстані між точками та поділу відрізка в заданому відношенні [1, 2].

Таблиця 3.1.1

<i>Система координат – це сукупність умов, за допомогою яких визначається положення точки на прямій, на площині, в просторі</i>	
<i>Координатою точки A на прямій називається відстань OA, що вимірюється масштабною одиницею, взятою зі знаком «+», якщо напрям від точки початку відріку O до точки A збігається з додатним напрямом на прямій, і з знаком «-», якщо ці напрями протилежні.</i>	
<i>Відстань між точками A(x₁) та B(x₂) знаходиться за формулою $d = x_2 - x_1$</i>	
<i>Система координат на площині називається прямокутною декартовою, якщо осі Ox та Oy взаємно перпендикулярні і мають однакові масштабні одиниці (рис. 3.1.1)</i>	
	<i>Якщо спроектуємо точку M на осі Ox та Oy, то M має на осі Ox координату x, як називається абсцисою точки, а на Oy координату y – ординату точки</i>
Рис. 3.1.1	
<i>Відстань між точками A(x₁; y₁) та B(x₂; y₂) знаходиться за формулою</i>	
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
<i>Система координат у просторі називається прямокутною декартовою, якщо осі Ox, Oy та Oz взаємно перпендикулярні і мають однакові масштабні одиниці (рис.3.1.2)</i>	

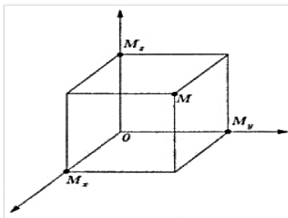


Рис. 3.1.2

Маємо відповідно три координати точки у просторі
 $M(x; y; z)$: x - абсцису, y - ординату та z - аплікату

Відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$ знаходиться за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Координати середини відрізка $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z = \frac{z_1+z_2}{2}$

Поділ відрізка в заданому відношенні
 Якщо відрізок M_1M_2 точкою $M(x; y; z)$ ділиться у відношенні $\lambda : 1$, то його координати визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Завдання 3.1.1. Знайти координати точки A , симетричної точці $K(2)$ відносно точки $B(-6)$.

Завдання 3.1.2. На осі Ox знайти точку A , відстань від якої до точки $B(0; \sqrt{15})$ дорівнює $4\sqrt{2}$.

Завдання 3.1.3. Кінці однорідного стержня знаходяться в точках, заданих своїми координатами $A(4; -6)$ і $B(-1; 8)$. Визначити координати центра ваги цього стержня.

Завдання 3.1.4. Середини сторін трикутника ABC знаходяться в точках $M(0; 0)$, $N(3; 0)$, $P(0; 4)$. Знайти координати його вершин.

Завдання 3.1.5. Знайти координати центра ваги трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(7; 9)$, $B(3; -2)$, $C(-5; 6)$.

Завдання 3.1.6. Дано точку $A(3; 1)$, через яку проведено коло, що дотикається до обох координатних осей. Визначіть центр і радіус цього кола.

Завдання 3.1.7. Трикутник ABC задано вершинами $A(3; 12)$, $B(6; 8)$, $C(-3; 4)$. Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A .

Завдання 3.1.8. Задано вершини трикутника $A(-2; 5)$, $B(4; -4)$, $C(6; 8)$. Визначіть довжину його медіани, проведеної з вершини A .

Завдання 3.1.9. Побудувати в прямокутній декартовій системі координат точки, задані своїми координатами $M(3; -1; 4)$, $N(-4; 5; 0)$.

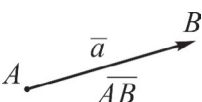
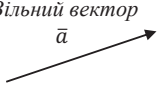
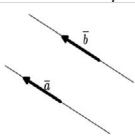
Завдання 3.1.10. Задано вершини трикутника $A(-5; -1; 0)$ і $B(8; 1; -9)$. Знайти вершину C , якщо середина AC лежить на осі Oy , а середина BC – на площині xOz .

3.2 Лінійні операції над векторами

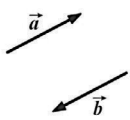
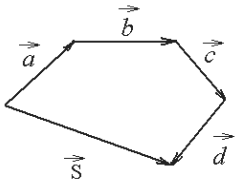
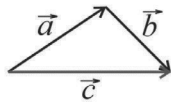
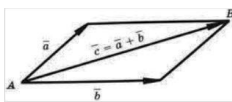
Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.2.1 подані відомості про вектори, суму векторів (правило трикутника, правило паралелограма), властивості суми векторів [1, 2].

Таблиця 3.2.1

<p>Вектором називається відрізок, що має певну довжину і напрям, або коротко – <i>напрявлений відрізок</i>.</p>	
<p>Зв'язний вектор</p>  <p>Рис. 3.2.1.</p>	<p>Вектор на рис. 3.2.1 називається зв'язним, оскільки має фіксовану точку прикладення – початок вектора. <i>Напрямок вектора</i> вказує стрілка, яка розташована поблизу його кінця. Це точки A (початок) та B (кінець). Відповідно зв'язаний вектор позначається двома літерами \overline{AB}, перша – точка A – відповідає початку вектора, а друга – точка B – його кінцю.</p> <p>Якщо точки задані своїми координатами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то координати вектора на площині $\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.</p> <p>В просторі $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$:</p> $\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$
<p>Вільний вектор</p>  <p>Рис. 3.2.2</p>	<p>Це вектор, що зображений на рис. 3.2.2, не має точки прикладення, то він позначається прописною літерою, наприклад, \vec{a}.</p>
<p>Довжина вектора (модуль)</p>	<p>Довжина відповідного відрізка і позначається одним із символів: \vec{a}, \overline{AB}.</p> <p>Довжина вектора на площині, якщо точки задані своїми координатами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$,</p> $ \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ <p>У просторі $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$:</p> $ \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
<p>Нульовий вектор</p>	<p>$\vec{0}$, або <i>нуль-вектором</i> називається вектор, довжина якого дорівнює нулю, а напрямок його вважається довільним</p>
<p>Одиничний вектор \vec{e}</p>	<p>Називається вектор, довжина якого дорівнює 1</p>
<p>Рівні вектори</p>  <p>Рис.3.2.3</p>	<p>Це вектори, які можна сумістити в наслідок паралельного перенесення (рис.3.2.3).</p> <p>Такі вектори лежать на паралельних прямих або є відрізками однієї прямої, мають рівні довжини та однаковий напрям</p>

Продовження таблиці 3.2.1

<p>Взаємно протилежні вектори</p>  <p>Рис. 3.2.4</p>	<p>Вектори, які лежать на паралельних прямих або є відрізками однієї прямої, мають рівні довжини, але різний напрям (рис. 3.2.4)</p>
<p>Сума векторів</p>  <p>Рис. 3.2.5.</p>	<p>Нехай задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Сумою цих векторів називається вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, який за величиною та напрямком дорівнює вектору, початком якого є початок вектора \vec{a} (першого доданка), а кінець – кінець вектора \vec{d} (останнього доданка) (рис.3.2.5).</p>
<p>Правило трикутника</p>	 <p>Рис. 3.2.6</p> $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
<p>Правило паралелограма</p>	 <p>Рис. 3.2.7</p>
<p>Властивості суми векторів</p>	<ol style="list-style-type: none"> переставна (комунікативна) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ сполучна (асоціативна) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
<p>Різниця векторів</p>	<p>$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ розглядається як сума вектора \vec{a} з вектором який протилежний вектору \vec{b}</p> $\vec{c} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$

Завдання 3.2.1. На рис.3.2.8 дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

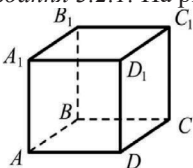


Рис. 3.2.8

- Зобразіть вектор з початком в точці A_1 , який дорівнює вектору \overline{AB} .
- Знайдіть суму векторів $\overline{A_1 C_1}$ та $\overline{C_1 C}$.
- Знайдіть різницю векторів $\overline{B D_1}$ та $\overline{B_1 D_1}$.
- Знайдіть суму векторів \overline{AD} і $\overline{C_1 B_1}$.

Завдання 3.2.2. На рис.3.2.8 дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- 1) Зобразіть вектор з початком в точці C_1 , який дорівнює вектору $\overline{B_1 A_1}$.
- 2) Знайдіть суму векторів \overline{AB} , \overline{AD} та $\overline{AA_1}$.
- 3) Знайдіть різницю векторів $\overline{B_1 C_1}$ та \overline{AD} .

Завдання 3.2.3. Задано точки $A(3; -1; 2)$, $B(5; 1; 1)$. Обчисліть координати та довжину векторів \overline{AB} та \overline{BA} .

Завдання 3.2.4. Задано точку $A(3; -1; 2)$ і вектор $\overline{AC}(-4; 0; 2)$. Знайдіть координати точки C .

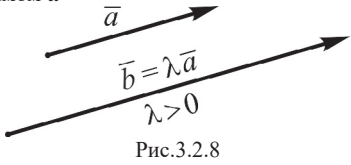
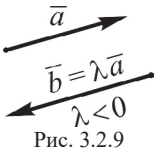
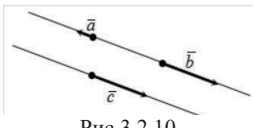
Завдання 3.2.5. Задано точку $B(5; 1; 1)$ і вектор $\overline{BC}(3; -2; 1)$. Знайдіть координати точки C .

Завдання 3.2.6. Задано точки $A(3; -1; 2)$, $B(5; 1; 1)$. Точка D лежить на осі x . Знайдіть її координати, якщо $|\overline{AD}| = \sqrt{5}$.

Короткі теоретичні відомості

В таблиці 3.2.2 подані відомості про множення вектора на скаляр та його властивості [1, 2].

Таблиця 3.2.2

Множення вектора \vec{a} на скаляр λ $\vec{b} = \lambda \vec{a} = \alpha \lambda$	
<p>На рис 3.2.8 $\lambda > 0$, то напрям \vec{b} співпадає з напрямом \vec{a}</p>  <p>Рис.3.2.8</p>	<p>На рис 3.2.9 $\lambda < 0$, то напрям \vec{b} протилежно напрямлений \vec{a}</p>  <p>Рис. 3.2.9</p>
<p>Колінеарні вектори \vec{a} і \vec{b}, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій (рис.3.2.10) Необхідна і достатня умова колінеарності двох векторів є їх пропорційність, тобто $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $\lambda = const$</p>	 <p>Рис.3.2.10</p>
Властивості множення вектора на скаляр	
1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$	
2) $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$	
3) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$	
4) $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{ \vec{a} }$, де $ \vec{a} \neq 0$	
5) Переставний (комутативний) закон	$\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$, де $\lambda = const$
6) Сполучний (асоціативний) закон,	$\lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a})$, де $\lambda = const, \mu = const$
7) Розподільний (дистрибутивний) закон	$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$, $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

Завдання 3.2.7. Дано вектор $\vec{a}(-2; 3; 1)$ та $\vec{b}(4; -1; 2)$. Обчислити координати
1) $2\vec{a} - \vec{b}$; 2) $\vec{a} + 3\vec{b}$.

Завдання 3.2.8. Дано вектор $\vec{a}(-2; 3; 1)$ та $\vec{c}(8; y; z)$. При якому значення y і z ці вектори колінеарні.

Завдання 3.2.9. Не обчислюючи довжин відрізків, з'ясуйте, чи лежать на одній прямій точки:

- 1) $A(6; -1; 0)$, $B(3; 1; -1)$, $C(0; 3; -2)$;
- 2) $S(1; 7; 5)$, $M(-5; 4; -7)$, $P(2; 8; 6)$.

Завдання 3.2.10. Задано вектори $\vec{a}(4; -8; 2)$, $\vec{b}(-6; 9; 3)$, $\vec{c}(x; 2; 1)$, $\vec{d}(-1; y; 5)$.

а) Обчисліть вектори $2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ та $2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

б) З'ясуйте, при яких значеннях x і y вектори \vec{b} та $\vec{c} + \vec{d}$ будуть колінеарними.

в) Порівняйте напрямки та довжини векторів \vec{b} та $\vec{c} + \vec{d}$.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.2.3. подані відомості про скалярний добуток двох векторів [1, 2].

Таблиця 3.2.3

Скалярним добутком двох векторів \vec{a} та \vec{b} називають число (\vec{a}, \vec{b}) , що дорівнює добутку довжин (модулів) цих векторів на косинус кута між ними: $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.
Якщо вектори задано своїми координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
Скалярним квадратом вектора \vec{a} називають скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = \vec{a} ^2$

Завдання 3.2.11. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}(2; -1; 4)$ і $\vec{b}(3; 2; -1)$.

Завдання 3.2.12. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1}{6}$.

Завдання 3.2.13. Обчисліть значення λ , при якому вектори \vec{a} та \vec{b} перпендикулярні, якщо $\vec{a}(2; -4; \lambda)$, $\vec{b}(3; -1; 5)$.

Завдання 3.2.14. Задано три точки: $A(3; -2; 1)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(1; 3; -2)$. Знайдіть кут між векторами: 1) \vec{BA} і \vec{BC} ; 2) \vec{AB} і \vec{AC} .

Завдання 3.2.15. Дано два одиничні взаємно перпендикулярні вектори \vec{a} і \vec{b} . Обчисліть значення виразів:

- 1) $(\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{a} - \vec{b})$;
- 2) $(\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$.

Завдання 3.2.16. Дано $\triangle ABC$ з вершинами в точках $A(2; 2; 2), B(2; 2; 0), C(2; 0; 2)$. Доведіть, що цей трикутник є прямокутним і вкажіть його прямиий кут.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.2.4. подані відомості про векторний добуток двох векторів [1, 2].

Таблиця 3.2.4

<p>Векторним добутком $[\vec{a}, \vec{b}]$ двох ненульових векторів \vec{a} та \vec{b} є такий вектор \vec{c}, який перпендикулярний до кожного з векторів \vec{a} та \vec{b}, утворює з ними праву трійку векторів і модуль якого визначається за формулою:</p> $ \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$
<p>Якщо вектори задано своїми координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то</p> $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$
<p>Властивості векторного добутку:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Антиккомутативна властивість $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ 2) Асоціативна властивість відносно скалярного множника $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ 3) Дистрибутивна властивість відносно додавання $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
<p>Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} та \vec{b}, віднесених до спільного початку</p>
<p>Площа $\triangle ABC$, у якого $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$ обчислюється за формулою</p> $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\vec{a}, \vec{b}] $
<p>Якщо \vec{F} є вектор сили, прикладеної до деякої точки B, а вектор \vec{AB} напрямний з точки A в точку B, то векторний добуток $[\vec{AB}, \vec{F}]$ називається <i>моментом \vec{M} сили \vec{F} відносно точки A</i></p>

Завдання 3.2.17. Кут між векторами \vec{a} та \vec{b} дорівнює $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5$.

Обчисліть значення виразів: а) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$; б) $|[(\vec{a} + 2\vec{b}), (2\vec{a} + \vec{b})]|$.

Завдання 3.2.18. Обчисліть площу паралелограма, три вершини якого задані точками $A(2; 1; 3), B(0; 1; -1), C(-2; -1; -1)$.

Завдання 3.2.19. Дано вершини трикутника $A(5; -3), B(7; 4), C(2; 1)$. Знайдіть за поданим алгоритмом довжину висоти трикутника, яка проведена з вершини B на сторону AC .

Алгоритм виконання:

1) Обчисліть координати \overline{AB} і координати \overline{AC} . Перевірте правильність обчислення векторного добутку

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 7 \cdot (-3) = 29, \text{ де } \overline{a} = \overline{AB}, \overline{b} = \overline{AC}.$$

2) Знайдіть площу трикутника ΔABC за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{a}, \overline{b}]|, \text{ де } \overline{a} = \overline{AB}, \overline{b} = \overline{AC}.$$

3) Обчисліть $|\overline{AC}|$.

4) Зі шкільного курсу геометрії площа трикутника обчислюється за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ah,$$

де a – сторона, h – висота, опущена на цю сторону.

$$h = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a}.$$

У нашому випадку $a = |\overline{AC}|$. Підставте знайдені в пункті 2) та 3) числові значення і обчисліть h .

5) Дайте відповідь на запитання задачі.

Завдання 3.2.20. Дано вершини трикутника $A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1)$. Знайдіть довжину висоти трикутника, яка проведена з вершини B на сторону AC .

Завдання 3.2.21. Сила $\overline{F}(4; 2; 1)$ прикладена до точки $B(3; 2; 4)$. Користуючись алгоритмом наведеним нижче, знайдіть момент цієї сили відносно точки $A(5; -1; 6)$.

Алгоритм виконання.

1) Знайдіть координати вектора \overline{AB} .

2) Момент це є векторний добуток \overline{AB} і сили \overline{F} . Обчисліть його за формулою $\overline{M} = [\overline{AB}, \overline{F}]$

3) Запишіть отриманий вектор.

Завдання 3.2.22. До точки $A(4; 2; -3)$ прикладено дві сили $\overline{F}_1(-1; 3; -1)$ і $\overline{F}_2(3; -1; 10)$. Обчисліть вектор моменту рівнодійної цих сил та його величину.

Алгоритм виконання.

1) Знайдіть вектор \overline{F} рівнодійної заданих сил за формулою $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

2) Знайдіть координати вектора \overline{AB} .

3) Складіть визначник для обчислення моменту та обчисліть його

$$\overline{M} = [\overline{AB}, \overline{F}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{vmatrix}.$$

4) Запишіть координати вектора \overline{M} .

5) Обчисліть довжину вектора \overline{M} .

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.2.5 подані відомості про мішаний або скалярно-векторний добуток трьох векторів [1, 2].

Таблиця 3.2.5

<p>Мішаним або скалярно-векторним добутком трьох векторів \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} називається векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} скалярно помножений на вектор \vec{c}. Позначається $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.</p>
<p>Вектори \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} називаються <i>компланарними</i>, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині. Мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю.</p>
<p>Мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}</p>
<p>Якщо вектори \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} задані своїми координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$, то мішаний векторний добуток обчислюється за формулою</p> $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
<p>Якщо вершини тетраедра задані своїми координатами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$, то його об'єм визначається за формулою</p> $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$

Завдання 3.2.23. Знайдіть об'єм трикутної піраміди з вершинами в точках $A(0; 0; 0)$, $B(-1; 0; -2)$, $C(2; -1; 0)$, $D(1; 4; 1)$.

Завдання 3.2.24. Три вершини тетраедра знаходяться в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Об'єм тетраедра дорівнює 3 куб. од., а четверта вершина D знаходиться на осі ординат. Користуючись алгоритмом, знайдіть координати точки D .

Алгоритм виконання.

1) Вершини D цієї піраміди знаходиться на осі апікат, то її координати будуть $D(0; y; 0)$.

2) Використовуючи значення координат чотирьох точок $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$, $D(0; y; 0)$ та числове значення об'єму запишіть за формулою

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

рівняння відносно невідомої y .

3) Розв'яжіть отримане рівняння.

4) Скільки відповідей ви отримали?

5) Проаналізуйте ці відповіді і запишіть координати точки (або кількох точок) D .

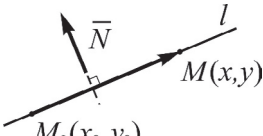
Завдання 3.2.25. Відомо, що об'єм трикутної піраміди дорівнює 9 куб. од., а три її вершини знаходяться в точках $A(4; -1; 2)$, $B(5; 1; 4)$, $C(3; 2; -1)$. Знайдіть координати четвертої вершини D цієї піраміди, якщо відомо, що вона знаходиться на осі аплікату.

3.3. Пряма лінія на площині.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.3.1 подані відомості про рівняння лінії, пряму лінію та рівняння прямої з заданим нормальним вектором, загальне рівняння прямої [1,2].

Таблиця 3.3.1

Будь-яку лінію l на площині розглядають як сукупність точок цієї площини, що мають спільні властивості, тобто є геометричним місцем точок. Грунтуючись на цих геометричних властивостях встановлюють співвідношення між координатами x і y точок лінії. $F(x, y) = 0$ – рівняння лінії L , якщо координати довільної точки $A(x; y)$ цієї лінії задовольняють умову рівняння.	
Одним з неозначуваних понять в геометрії є <i>пряма лінія</i> , або просто <i>пряма</i> .	
Аксиоми елементарної геометрії	1) через дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну; 2) через точку, яка не належить прямій, на площині можна провести пряму, яка паралельна вихідній, і до того ж тільки одну
Кожна пряма лінія l на площині xOy має певні геометричні властивості, відповідно з якими одержимо рівняння прямої в різних виглядах	
Рівняння прямої з заданим нормальним вектором  Рис. 3.3.1 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	Будь-який не нульовий вектор, який перпендикулярний до прямої l називається <i>нормальним вектором</i> (рис. 3.3.1). Точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на прямій l , $\vec{N}(A, B)$ – нормальний вектор. Виберемо на прямій l довільну точку $M(x, y)$, координати якої відмінні від точки $M_0(x_0, y_0)$. Вектор $\vec{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$ перпендикулярний до вектора $\vec{N}(A, B)$ і скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю
Загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$	

Завдання 3.3.1. Точки $A(3; 5)$, $B(-1; 3)$, $C(1; -3)$ є вершинами $\triangle ABC$. Складіть рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини B , за поданим нижче алгоритмом.

Алгоритм виконання:

- 1) Виберіть довільну точку $M(x; y)$, що належить висоті.
- 2) Запишіть координати вектора \vec{BM} .
- 3) Запишіть координати вектора \vec{CA} .
- 4) Оскільки ці вектори ортогональні (перпендикулярні), то скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю. Знайдіть його.
- 5) Запишіть отримане рівняння в координатній формі.

Завдання 3.3.2. Складіть рівняння прямої, $Ax + By + C = 0$, у якій коефіцієнти $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$. Чи можна зробити висновок, що точка $O(0; 0)$ належить цій прямій?

Завдання 3.3.3. Придумайте рівняння прямої, $Ax + By + C = 0$, у якій коефіцієнти $A = C = 0, B \neq 0$. Чи можна зробити висновок, що придумане рівняння є рівнянням осі абсцис?

Завдання 3.3.4. Складіть рівняння прямої, $Ax + By + C = 0$, у якій коефіцієнти $B = C = 0, A \neq 0$. Який висновок можна зробити з отриманого рівняння?

Завдання 3.3.5. У рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$ який коефіцієнт потрібно прирівняти до нуля, щоб пряма була паралельна осі абсцис? Складіть таке рівняння.

Завдання 3.3.6. Складіть рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, у якій коефіцієнти $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$. Чи можна зробити висновок, що отримане рівняння паралельне осі ординат?

Завдання 3.3.7. Задано точки $M_1(1; 1), M_2(-2; 3), M_3(4; 2)$. Визначте, які з цих точок належать прямій $2x + 3y - 5 = 0$, а які не належать їй.

Завдання 3.3.8. Побудуйте прямі за наступними рівняннями:

а) $2x - 3y + 6 = 0;$

б) $x + 2y - 2 = 0;$

в) $3x - 2y - 6 = 0;$

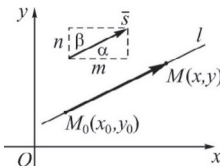
г) $x - 3y = 0.$

Завдання 3.3.9. Складіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат та перпендикулярна до вектора $\vec{n}(1; 2)$.

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 3.3.2 подані відомості про канонічне рівняння прямої [1, 2].

Таблиця 3.3.2

 <p style="text-align: center;">Рис. 3.3.2</p>	<p>Якщо пряма l проходить через фіксовану точку $M_0(x_0; y_0)$ та паралельна деякому заданому вектору $\vec{s}(m; n)$ (рис.3.3.2), то її рівняння має вигляд</p> $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ <p>і називається <i>канонічним рівнянням прямої</i></p>
---	--

Завдання 3.3.10. Задано точку $A(-2; -3)$, яка належить прямій l та вектор $\vec{a} = (4; 5)$.

Складіть рівняння прямої, яка проходить через цю точку та вектор, якщо відомо, що $\vec{a} \parallel l$.

Завдання 3.3.11. Вектор $\vec{s} \parallel l$, $\vec{s}(1; -1)$. Точка $B(-3; -5)$ належить прямій l .

Складіть канонічне рівняння прямої l .

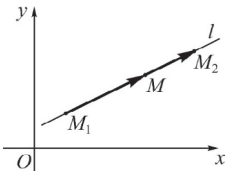
Завдання 3.3.12. Дано l , $A \in l$, $A(-5; 7)$, $\vec{s} \parallel l$, $\vec{s}(3; -4)$.

Складіть за цими даними рівняння прямої.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.3.3 подані відомості про рівняння прямої заданої двома точками [1, 2].

Таблиця 3.3.3

 <p style="text-align: center;">Рис. 3.3.3</p>	<p>Нехай пряма l проходить через два задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 3.3.3), то її рівняння має вигляд:</p> $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
---	--

Завдання 3.3.13. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки $A(2; 1)$ та $B(-2; 12)$.

Відповідь подайте у вигляді загального рівняння прямої.

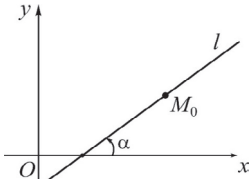
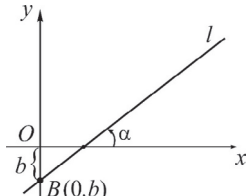
Завдання 3.3.14. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(3; 1)$ та $M_2(-5; -4)$.

Завдання 3.3.15. Складіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат та точку $A(2; 1)$.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.4.4 подані відомості про рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі та рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом [1, 2].

Таблиця 3.3.4

 <p>Рис. 3.3.4</p>	<p>Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ та нахилена до осі Ox (рис. 3.3.4), то її рівняння має вигляд:</p> $y - y_0 = tg\alpha(x - x_0)$ <p>або</p> $y - y_0 = k(x - x_0),$ <p>де $k = tg\alpha$, називається рівнянням пучка прямих з центом в точці $M_0(x_0; y_0)$</p>
 <p>Рис.3.3.5</p>	<p>Нехай пряма l та нахилена до осі Ox (рис. 3.3.5), проходить через точку $B(0; b)$ то її рівняння має вигляд:</p> $y - b = tg\alpha(x - 0)$ <p>або</p> $y = kx + b,$ <p>де $k = tg\alpha$, називається рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом</p>

Завдання 3.3.16. Задайте рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; -3)$, паралельно до осі абсцис.

Завдання 3.3.17. Задайте рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; -3)$, паралельно до осі ординат.

Розв'язання.

Шукана пряма паралельна осі ординат, отже перетинає вісь абсцис під кутом 90° , а оскільки $tg90^\circ$ не існує, то рівняння шуканої прямої $x = 1$.

Завдання 3.3.18. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(4; 2)$ під кутом $\alpha = 45^\circ$.

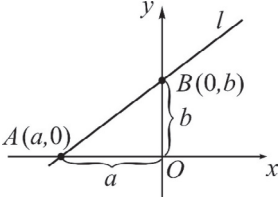
Завдання 3.3.19. Подайте загальне рівняння прямої $7x - 2y + 1 = 0$ у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Завдання 3.3.20. Подайте загальне рівняння прямої $5x - 3y + 15 = 0$ у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом і зобразіть її.

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 3.3.5 подані відомості про рівняння прямої у відрізках на осях координат [1, 2].

Таблиця 3.3.5

 <p>Рис. 3.3.6</p>	<p>Нехай пряма l проходить через точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$ (рис. 3.3.6), то підставляючи відповідні координати цих точок у рівняння</p> $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ <p>отримуємо $\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$.</p> <p>Рівняння у відрізках на осях має вигляд:</p> $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
---	---

Завдання 3.3.21. Знайти площу трикутника, утвореного прямою $4x - 3y - 12 = 0$ та осями координат.

Розв’язання. Задане рівняння прямої потрібно представити як рівняння прямої у відрізках:

$$4x - 3y - 12 = 0 \quad | \div 12$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} - 1 = 0,$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Отже, відрізки, які відтинає ця пряма на осях координат $|a| = 3, |b| = 4$.

Площа трикутника, утвореного заданою прямою з осями координат

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (од. кв.)}.$$

Завдання 3.3.22. Складіть рівняння прямої, яка відтинає на осях координат відрізки $a = -0,5, b = 8$.

Завдання 3.3.23. Для прямої $3x - 4y - 24 = 0$ запишіть її рівняння у відрізках та виконайте побудову цієї прямої.

Короткі теоретичні відомості

У таблиці 3.3.6 подані відомості про відстань від точки на площині до прямої рівняння прямої [1, 2].

Таблиця 3.3.6

<p>Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої, яка задана загальним рівнянням</p> <p>визначається за формулою</p>	$Ax + By + C = 0$ $d = \left \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right $
--	---

Завдання 3.3.24. Знайдіть відстань від точки $A(2; 7)$ до прямої $3x + 7y - 9 = 0$. Відповідь округліть до цілого числа.

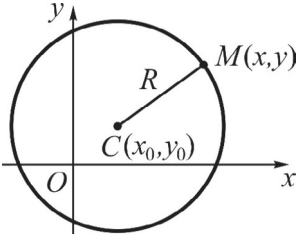
Завдання 3.3.25. Задано дві паралельні прямі $3y = -4x + 8$ та $3y = -4x + 33$. Обчисліть відстань між цими прямими.

3.4 Криві другого порядку

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 3.4.1 подані відомості про рівняння ліній другого порядку та рівняння кола [1, 2].

Таблиця 3.4.1

Лінія, яка задана рівнянням виду $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ називається <i>кривою другого порядку</i> , де x, y – змінні, A, B, C, D, E – коефіцієнти при змінних, F – вільний член, такі що $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.	
За певних значень коефіцієнтів рівняння кривої другого порядку перетворюється в рівняння кола, еліпса, параболи або гіперболи	
 <p>Рис. 3.4.1</p> <p>Коло – геометричне місце точок, рівновіддалених від однієї точки, яка називається центром кола. Відстань від будь-якої точки кола до його центра називається радіусом</p>	<p>Канонічне рівняння кола (рис. 3.4.1)</p> $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$ <p>Якщо відкрити дужки, то отримаємо рівняння лінії другого порядку при $A = C = 1, B = 0$</p> $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ <p>Якщо центр кола знаходиться в початку координат, то рівняння має вигляд</p> $x^2 + y^2 = R^2$ <p>Параметрична форма рівняння кола</p> $\begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Завдання 3.4.1. Складіть рівняння кола, якщо відомо радіус кола R та координати його центра точка A :

- а) $R = 5, A(-1; 4);$
- б) $R = \sqrt{2}, A(7; -6);$
- в) $R = \sqrt{7}, A(-5; 6);$
- г) $R = 1, A(-2; 0).$

Завдання 3.4.2. Складіть рівняння кола з центром в точці $B(-5; 6)$, яке дотикається до осі ординат.

Завдання 3.4.3. Складіть рівняння кола з центром в точці $B(-3; 4)$, яке дотикається до осі абсцис.

Завдання 3.4.4. Побудуйте на координатній площині коло, задане своїм рівнянням:

- а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$;
 в) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$; г) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Завдання 3.4.5. Задано рівняння лінії другого порядку. Встановіть, чи є воно рівнянням кола, вкажіть його радіус та координати центра кола.

- а) $x^2 + 2x - 10y - 23 + y^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;
 в) $x^2 + y^2 + 4y - 12x + 40 = 0$; г) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

Короткі теоретичні відомості.

В таблиці 3.4.2 подані відомості про рівняння еліпса та канонічне рівняння еліпса [1, 2].

Таблиця 3.4.2

<p>Рис. 3.4.2</p>	<p><i>Еліпсом</i> називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок F_1 та F_2 є сталою величиною. Точки $F_1(-c; 0)$ та $F_2(c; 0)$ називаються <i>фокусами</i> еліпса. Канонічне рівняння еліпса має вигляд</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де}$ $b^2 = a^2 - c^2, a > c$
<p>Початок координат $O(0; 0)$ є <i>центром симетрії еліпса</i>, а осі координат – <i>осями симетрії еліпса</i>. Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ називаються <i>вершинами</i> еліпса, а довжини відрізків $a = OA_2$ та $b = OB_2$ – відповідно <i>великою</i> та <i>малою піввіссю</i>.</p>	
<p>Ексцентриситет еліпса – величина $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$. Ця величина характеризує витягнутість еліпса, оскільки виражається через відношення його півосей</p> $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$	
<p>Якщо $a = b$, то $\varepsilon = 0$, тоді рівняння еліпса перетворюється в рівняння кола</p>	
<p>Рівняння еліпса з осями симетрії, які паралельні координатним осям, має вигляд</p> $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$ <p>де $A(x_0; y_0)$ – точка центру симетрії еліпса</p>	
<p>Кожна планета Сонячної системи і комети рухаються по орбіті, що мають форму еліпса, одним із фокусів якого є Сонце. Орбіти планет близькі до кіл (частинний випадок еліпса), а орбіти комет – до прямих. Зокрема, ексцентриситет орбіти планети Земля дорівнює 0,02, а ексцентриситет відомої комети Галлея 0,97)</p>	

Завдання 3.4.6. Дано рівняння еліпса $16x^2 + 25y^2 = 400$. Знайдіть:

- 1) півосі еліпса;
- 2) координати фокусів еліпса;
- 3) ексцентриситет.

Завдання 3.4.7. Еліпс дотикається до осі координат в точці початку координат, а центр його симетрії знаходиться в точці $(5;0)$. Складіть рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет дорівнює $0,6$.

Завдання 3.4.8. Визначте півосі, координати фокусів та ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням $3x^2 + 5y^2 - 15 = 0$.

Завдання 3.4.9. Складіть канонічне рівняння еліпса, у якого велика піввісь дорівнює 5 , а його ексцентриситет дорівнює $0,6$.

Завдання 3.4.10. Складіть канонічне рівняння еліпса, в якого мала піввісь дорівнює 6 , а відстань між фокусами дорівнює 16 .

Завдання 3.4.11. Еліпс дотикається до осі абсцис в вершині $A(4; 0)$, а осі ординат у вершині $B(0; -3)$. Складіть канонічне рівняння цього еліпса та зобразіть його в декартовій системі координат.

Завдання 3.4.12. Осі еліпса співпадають з осями координат та еліпс проходить через точки $A(2; 2)$ та $B(4; 1)$. Складіть рівняння цього еліпса та зобразіть його в декартовій системі координат.

Завдання 3.4.13. Визначте траєкторію точки B , яка при своєму русі знаходиться втричі ближче до точки $A(1; 0)$, ніж до прямої $x=9$.

Алгоритм розв'язання.

- 1) Задайте траєкторію точки B як множину точок площини, що мають властивість $3AB = BK$, точка K довільна точка прямої $x = 9$, $B(x; y)$.

Для відшукування відстані між двома точками скористайтесь формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- 2) Отримане рівняння

$$3\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} = |9 - x|$$

перетворіть так, щоб позбавитись ірраціональності в лівій частині рівняння.

- 3) Зробіть висновок, що отримане рівняння є рівнянням еліпса.

- 4) Укажіть, на яких координатних осях знаходяться його велика та малі півосі.

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 3.4.3 подані відомості про гіперболу та канонічне рівняння гіперболи [1, 2].

Таблиця 3.4.3

 <p style="text-align: center;">Рис. 3.4.3</p>	<p>Гіперболою називається геометричне місце точок (ГМТ) площини, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок F_1 та F_2 є сталою величиною. Ця величина не дорівнює нулю і менше, ніж відстань між F_1 та F_2.</p> <p>Точки $F_1(-c; 0)$ та $F_2(c; 0)$ називаються <i>фокусами</i> гіперболи.</p> <p>Якщо позначити постійну величину через $2a$, а відстань між фокусами $2c$ та вибрати систему координат як для еліпса (рис. 3.4.3.), то канонічне рівняння гіперболи має вигляд</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де}$ $b^2 = c^2 - a^2, c > a$
<p>Осями симетрії гіперболи є осі координат. Початок координат $O(0; 0)$ є <i>центром симетрії</i> гіперболи.</p>	
<p>Дійсними вершинами гіперболи називаються точки, в яких вона перетинає вісь абсцис – $A_1(-a; 0)$ та $A_2(a; 0)$, а величина $a = OA_2$ називається <i>дійсною піввіссю</i> гіперболи.</p> <p>Точки $B_1(0; -b)$ та $B_2(0; b)$ називаються <i>уявними вершинами</i> гіперболи, величина $b = OB_2$ називається <i>уявною піввіссю</i> гіперболи.</p>	
<p>Прямокутник з центром в початку координат і сторонами, які паралельні осям координат та проходять через вершини гіперболи називається <i>основним прямокутником</i> гіперболи (рис. 3.4.3)</p>	
<p>Гіпербола має дві <i>асимптоти</i> (прямі, які необмежено наближаються до гілок гіперболи), які мають свої рівняння</p>	
$y = \pm \frac{b}{a}x$	
<p>Асимптоти є діагоналями основного прямокутника гіперболи (рис. 3.4.3)</p>	
<p>Для побудови гіперболи зручно спочатку побувати асимптоти, а потім саму криву</p>	
<p>Ексцентриситет гіперболи – величина $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$. Ця величина характеризує витягнутість основного прямокутника гіперболи, оскільки виражається через відношення його півосей</p>	
$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	
<p>Рівняння гіперболи з осями симетрії, які паралельні координатним осям, має вигляд</p>	
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$	
<p>де $A(x_0; y_0)$ – точка центру симетрії гіперболи</p>	
<p>Якщо $a = b$, то $\varepsilon = \sqrt{2}$, осі гіперболи рівні і така гіпербола називається <i>рівносторонньою</i> та задається рівнянням</p>	
$x^2 - y^2 = a^2$	

Завдання 3.4.14. Дійсна піввісь гіперболи $a = 4$, ексцентриситет $\varepsilon = 1,25$. Складіть канонічне рівняння гіперболи і виконайте її побудову в декартовій системі координат.

Алгоритм виконання:

1) Ексцентриситет гіперболи визначається за формулою $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

За відомими значеннями $a = 4$ та $\varepsilon = 1,25$ знайдіть значення c .

2) З рівності $b^2 = c^2 - a^2$ визначте b .

3) Запишіть рівняння гіперболи у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

використовуючи дані та знайдені значення.

4) Запишіть координати фокусів гіперболи і позначте їх на рисунку.

5) Зобразіть на рисунку основний прямокутник гіперболи і проведіть прямі, які є його діагоналями.

6) Побудуйте шукану гіперболу.

Завдання 3.4.15. Задана рівностороння гіпербола $x^2 - y^2 = 2$. Знайдіть рівняння еліпса. Якщо відомо, що фокуси еліпса співпадають з фокусами гіперболи і точка $M(2; 3)$ належить цьому еліпсу.

Алгоритм виконання:

1) Оскільки парабола рівностороння, то $a = b = \sqrt{2}$.

Знайдіть c використовуючи рівність

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

2) Запишіть координати фокусів гіперболи, які за умовою є фокусами еліпса.

3) Позначте велику та малу півосі еліпса відповідно як a_1 та b_1 .

Використовуючи знайдена значення c та рівність

$$b^2 = a^2 - c^2$$

складіть перше рівняння з невідомими a_1 та b_1 .

4) За умовою $M(2; 3)$ належить еліпсу, канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Використовуючи введені позначення a_1 та b_1 складіть рівняння еліпса.

5) Запишіть та розв'яжіть систему рівнянь через змінні a_1^2 та b_1^2 .

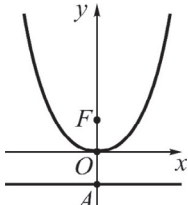
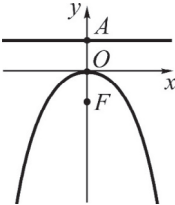
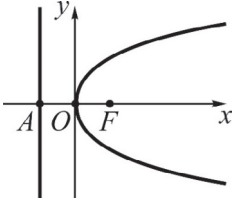
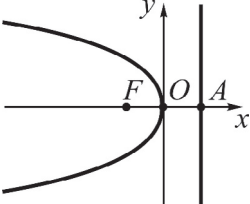
6) Отримані значення підставте в рівняння еліпса.

7) Запишіть рівняння шуканого еліпса.

Короткі теоретичні відомості.

У таблиці 3.4.4 подані відомості про параболу та канонічне рівняння параболи [1, 2].

Таблиця 3.4.4

 <p>Рис.3.4.4 Графік параболи $x^2 = 2py$</p>	<p>Параболою називається геометричне місце точок, що віддалені від заданої точки, яка називається <i>фокусом</i> параболи та заданої прямої – <i>директриси</i> параболи. Канонічне рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2py$, де число p – відстань від фокуса до директриси – називається параметром параболи. Рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$, фокус $F(0; \frac{p}{2})$ (рис 3.4.4). Початок координат – вершина параболи Вісь симетрії параболи – вісь ординат Екцентриситет параболи $\epsilon = 1$</p>
 <p>Рис.3.4.5 Графік параболи $x^2 = -2py$</p>	<p>На рис. 3.4.5 віссю симетрії параболи є вісь ординат. Початок координат – вершина параболи. Екцентриситет параболи $\epsilon = 1$ Канонічне рівняння параболи має вигляд $x^2 = -2py$ Рівняння директриси $y = \frac{p}{2}$, фокус $F(0; -\frac{p}{2})$</p>
 <p>Рис.3.4.6. Графік параболи $y^2 = 2px$</p>	<p>На рис. 3.4.6 віссю симетрії параболи є вісь абсцис. Початок координат – вершина параболи. Екцентриситет параболи $\epsilon = 1$ Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$ Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$, фокус $F(\frac{p}{2}; 0)$</p>
 <p>Рис.3.4.7 Графік параболи $y^2 = -2px$</p>	<p>На рис. 3.4.7 віссю симетрії параболи є вісь абсцис. Початок координат – вершина параболи. Екцентриситет параболи $\epsilon = 1$ Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = -2px$ Рівняння директриси $x = \frac{p}{2}$, фокус $F(-\frac{p}{2}; 0)$</p>
<p>Рівняння параболи з віссю симетрії, яка паралельна одній з координатних осей має вигляд $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ або $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, де x_0, y_0 – координати вершини параболи</p>	
<p>Коло, еліпс та гіпербола – <i>центральні</i> криві другого порядку. Парабола є <i>нецентральною</i> кривою</p>	

Завдання 3.4.16. Скласти рівняння параболи та її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ та кола $x^2 + y^2 - 4x = 0$ та симетрична відносно осі ординат.

Алгоритм розв'язання:

- 1) Знайдіть точки перетину заданих ліній, розв'язавши систему рівнянь
- $$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \quad (O(0; 0), A(2; -2)).$$

2) Встановіть знаходження вершини параболи і оскільки за умовою вона симетрична осі ординат, то встановіть вид канонічного рівняння ($O(0; 0)$, $x^2 = 2py$).

3) Підставте координати другої точки у рівняння параболи і знайдіть число p .

4) Запишіть рівняння параболи.

5) Запишіть рівняння директриси.

Завдання 3.4.17. Парабола симетрична відносно осі абсцис, проходить через точку $A(6; -2)$, а вершина її лежить в початку координат.

Складіть рівняння цієї параболи.

Завдання 3.4.18. Знайдіть рівняння директриси і фокус параболи $y^2 = 24x$.

Завдання 3.4.19. Парабола з вершиною в початку координат проходить через точку $A(-2; -3)$ та симетрична відносно осі Ox .

Складіть рівняння цієї кривої, її фокус та директрису.

Завдання 3.4.20. Проліт мостової арки має форму параболи. Визначте параметр p цієї параболи, якщо проліт арки дорівнює 24 м, а висота 6 м.

Алгоритм розв'язання:

- 1) Виберіть прямокутну систему координат так, щоб вершина параболи (мостової арки) знаходилась в початку координат, а вісь симетрії співпадала з від'ємним напрямом осі ординат.

2) Встановіть вид канонічного рівняння параболи ($x^2 = -2py$)

3) Запишіть координати точок кінців хорди арки ($A(-12; -6)$, $B(12; 6)$).

4) Підставте координати однієї з точок в рівняння параболи.

5) Обчисліть параметр p .

Питання для самоперевірки до теми 3

1. Що називається *системою координат*?
2. Що називається *координатою точки на прямій*?
3. Як знайти *відстань між двома точками на прямій*?
4. Що називається *системою координат на площині*?
5. Як знайти *відстань між двома точками на площині*?
6. Що називається *системою координат у просторі*?
7. Як знайти *відстань між двома точками у просторі*?
8. Як знайти *координати точки середини відрізка*?
9. Як знайти *координати точки відрізка* поділеного у заданому відношенні?
10. Який відрізок називається *вектором*?
11. Як знайти *координати вектора* заданого двома точками?
12. Чому дорівнює *довжина вектора*?
13. Сформулюйте правила для знаходження *суми векторів*?
14. Назвіть *властивості* векторів.
15. Як помножити вектор на *скаляр*?
16. Які вектори називаються *колінеарними*?
17. Що називається *скалярним добутком векторів*?
18. Як знайти скалярний добуток векторів заданих своїми координатами?
19. Що називається *векторним добутком векторів*?
20. Як знайти векторний добуток двох векторів заданих своїми координатами?
21. Чому дорівнює *площа паралелограма* побудованого на двох векторах?
22. Що називається *моментом \vec{M} сили \vec{F} відносно точки A* ?
23. Що називається *мішаним добутком трьох векторів*?
24. Як обчислити *об'єм тетраедра*, якщо його вершини задані своїми координатами?
25. Як записати *рівняння прямої з заданим нормальним вектором*?
26. Запишіть *загальне рівняння прямої*.
27. Запишіть *канонічне рівняння прямої*.
28. Як записати *рівняння прямої, заданої двома координатами*?
29. Запишіть *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*.
30. Як виглядає *рівняння прямої у відрізках*?
31. Як обчислити *відстань від точки до прямої*?
32. Запишіть *рівняння кола*.
33. Сформулюйте *рівняння еліпса*.
34. Який вигляд має *рівняння гіперболи*?
35. Запишіть *рівняння параболи*.

Електронні помічники до теми 3.

Для створення геометричних рисунків та графіків алгебраїчних функцій зручно скористатися безкоштовним додатком <https://www.geogebra.org/?lang=uk>.

Цей додаток створений Маркусом Хохенвартером в Java дає можливість досить легко створювати геометричні креслення, які використовуються в різних розділах математики: алгебрі – для роботи з функціями (побудова графіків функцій та виконання необхідних обчислень для їх побудови); геометрії, як в планіметрії для побудов з циркулем та лінійкою, так і в стереометрії; статистиці – електронні таблиці, діаграми. Цей додаток можна використовувати і в інших науках – фізиці, хімії та економіці тощо – які використовують математичний інструментарій.

Також додаток Geogebra підтримує інновації та наукову, технологічну, інженерну та математичну освіту по всьому світу, забезпечує діяльність багатьох навчальних веб-сайтів, надає можливість вчителям створити свій клас, у якому легко працювати зі своїми учнями: демонструвати завдання, відстежувати онлайн виконання завдань учнями та проводити онлайн оцінювання.

Переваги Geogebra подані на рис. 3.4.8



Рис. 3.4.8. Переваги додатку Geogebra

Додаток Geogebra – це програма динамічної геометрії, за допомогою якої є можливість створювати з точок, відрізків, ліній та інших елементів геометричні фігури, створювати анімацію з цих фігур, що дає можливість краще вивчити властивості цієї фігури. Цей програмний продукт дає можливість створювати і графіки функцій, обробляє обчислення в одному динамічному середовищі.

Вводити об'єкти дуже легко, поставивши мишку в потрібному місці на полотні в Декартовій системі координат або вводити координати на консолі, що розташована ліворуч (рис.3.4.9).

Кількість інструментів для керування об'єктів дуже велика, фактично все, що можна створити на площині, можна створити за допомогою Geogebra [5].

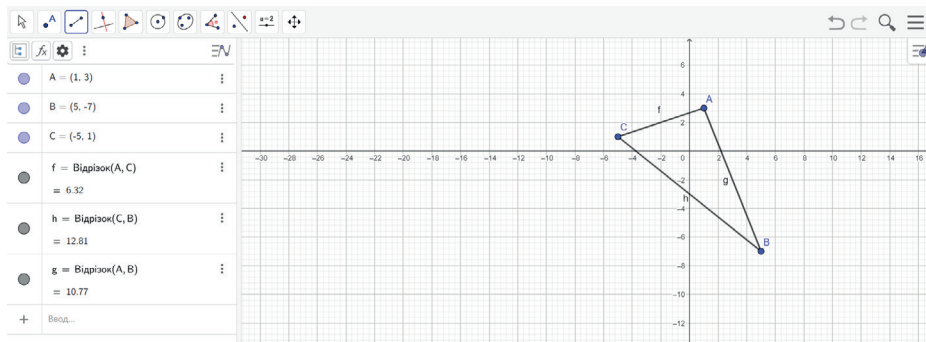


Рис.3.4.9 Введення даних в Geogebra

Також можна користуватися калькулятором Сюїта для створення на площині геометричних фігур рис. 3.4.10.

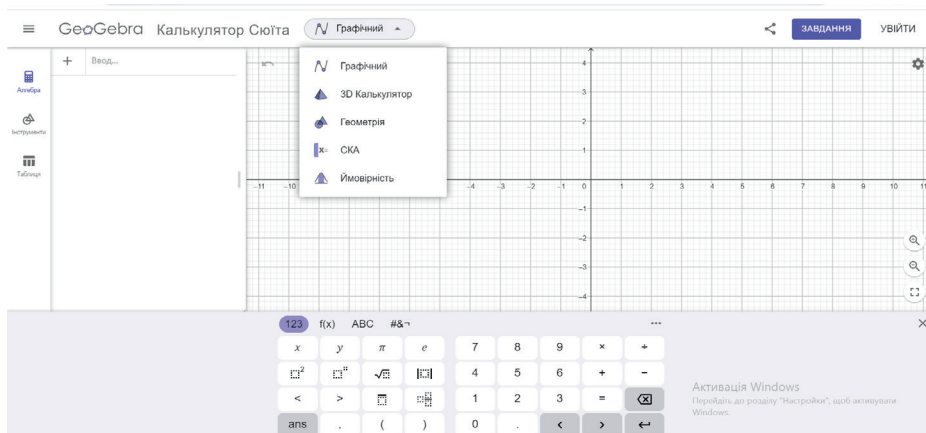


Рис. 3.4.10. Інтерфейс калькулятора Сюїта

Створенням геометричних фігур або алгебраїчних функцій даний додаток не обмежується. За допомогою нього можна створювати автоматизовані анімації та презентації, котрі можна експортувати в різні формати: GIF, EPS, PDF, PsTricks, PNG. Також є можливість імпортувати зовнішні об'єкти (зображення).

Як ми вже сказали, інтерфейс додатка дуже простий і ньому можна працювати з багатьма поняттями, типовими для евклідової геометрії – бісектриси сторін, центр кола та його радіус (рис. 3.4.10).

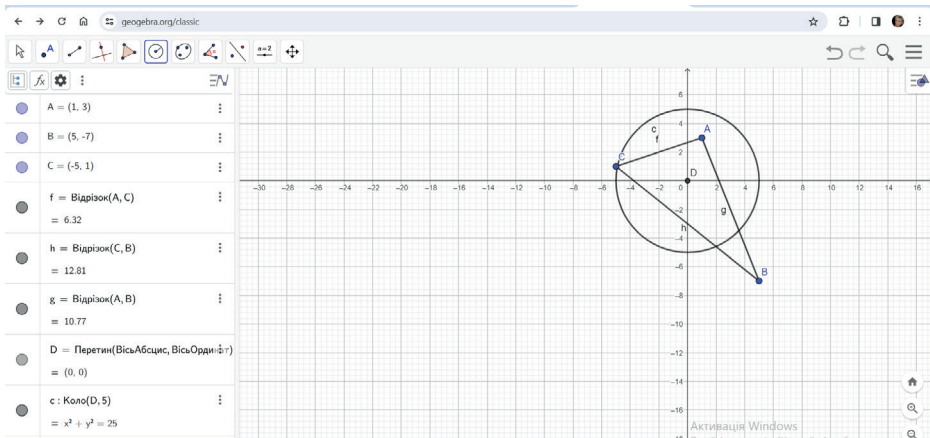


Рис.3.4.10. Створення комбінації фігур в Geogebra

На цьому можливості Geogebra не вичерпуються, додаток може створювати і складніші геометричні рисунки на площині для науковців будь-якого рівня. Також додаток працює і з моделями в просторі за допомогою 3D калькулятора (рис. 3.4.11).

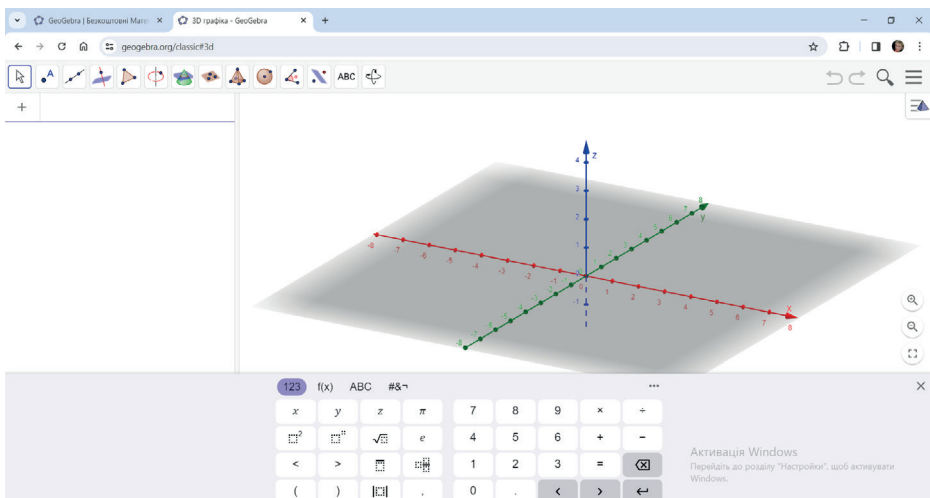


Рис. 3.4.11 3D калькулятор в Geogebra

Існує багато готових проектів, які створені користувачами програми, класифіковані за категоріями і містяться в базі даних <http://www.geogebraTube.org/?lang=es>. [5].

Тестові завдання для самоперевірки до першого блоку

1. Оберіть з наведених нижче означень математичних понять істинне.

А. Бісектрисою трикутника називається промінь, який виходить з вершини кута та ділить цей кут навпіл.

Б. Бісектрисою трикутника називається промінь, який ділить протилежну сторону трикутника навпіл.

В. Бісектрисою трикутника, яка проведена з даної вершини, називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою перетину бісектриси з протилежною стороною трикутника.

Г. Бісектрисою трикутника називається пряма, які ділить кут трикутника навпіл.

2. Установіть відповідність між назвою поняття та його дефініцією:

1. Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки	А. Квадрат
2. Промінь, який виходить з вершини даного кута та ділить цей кут навпіл	Б Бісектриса
3. Ромб, у якого всі кути рівні	В. Коло
4. Чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні	Г. Паралелограм
	Д. Трапеція

3. Які з поданих речень є простими?

А. Число 25 є непарним і ділиться на 5.

Б. Число e ірраціональне.

В. Добуток двох чисел дорівнює нулю, якщо одне з них дорівнює нулю.

Г. Якщо кути в трикутнику рівні, то цей трикутник рівносторонній.

4. Які з поданих речень є висловленнями?

А. Сьогодні вітряно

Б. Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.

В. Дана задача легка.

Г. Чи існують рівнокутні трикутники?

5. Які з поданих речень не є предикатами?

А. $7x - 5 < 0$;

Б. $x^2 + x - 6 = 0$;

В. $10 \cdot 3 - 5 > 4$;

Г. $x^2 + y^2 = 25$.

6. Задано вектори $\vec{a}(2; 4; 1)$ та $\vec{b}(-2; 0; 5)$. Який з указаних векторів є сумою $\vec{a} + \vec{b}$?

А	Б	В	Г	Д
(4; 4; -4)	(-4; 0; 5)	(0; 4; 6)	(-4; 4; 6)	(0; 4; -6)

7. Дано вектор $\vec{a}(-2; 3; 1)$ та $\vec{c}(8; y; z)$. При якому значення y і z ці вектори колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
$y = 12, z = -4$	$y = -12, z = 4$	$y = -1, z = -4$	$y = 2, z = 4$	$y = -12, z = -4$

8. Чи будуть вектори перпендикулярні $\vec{a}(-2; 3; 1)$ та $\vec{c}(8; 5; 1)$?

А	Б	В
Не можливо визначити	Так	Ні

9. Обчисліть площу паралелограма, три вершини якого задані точками $A(2; 1; 3), B(0; 1; -1), C(-2; -1; -1)$.

10. Установіть відповідність між назвою лінії та її рівнянням?

1. $x^2 + y^2 = 9$	А) Пряма
2. $x^2 = -4y$	Б) Коло
3. $x^2 - y^2 = 2$	В) Еліпс
4. $2x - 3y + 6 = 0$	Г) Парабола
	Д) Гіпербола

11. Задано точки $A(-1; 1), B(-1; 3), C(5; b)$. Обчисліть площу трикутника ABC .

А	Б	В	Г	Д
Відповідь залежить від параметра b	15	7,5	6	12

12. Визначте точку, яка не може належати прямій $y = kx$, за умови що $k > 0$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 3)	(-2; -3)	(1; 5)	(-2; 3)	(-5; -1)

13. Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ дорівнює 10. Укажіть множину всіх можливих значень $y_1 + y_2$.

А	Б	В	Г	Д
[0; 10]	[-20; 20]	[0; +∞)	[-10; 10]	(-∞; +∞)

14. Якщо пряма $Ax + By + C = 0$ паралельна осі ординат, то

А	Б	В	Г	Д
$A = 0$	$A = B$	$B = 0$	$A = C$	$C = 0$

15. Якщо пряма $Ax + By + C = 0$ проходить через початок координат, то

А	Б	В	Г	Д
$A = 0$	$A = B$	$B = 0$	$A = C$	$C = 0$

16. Якщо коло $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ дотикається до осі абсцис, то

А	Б	В	Г	Д
$R^2 = a^2 - b^2 $	$R^2 = b^2$	$R^2 = a^2 + b^2$	$R^2 = a^2$	$R^2 = (a - b)^2$

17. Якщо коло $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ проходить через початок координат, то

А	Б	В	Г	Д
$R^2 = a^2 - b^2 $	$R^2 = b^2$	$R^2 = a^2 + b^2$	$R^2 = a^2$	$R^2 = (a - b)^2$

18. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

19. Обчисліть визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

20. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 = 19 \end{cases}$$

У відповідь запишіть суму коренів $x_1 + x_2$.

21. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -9 \\ 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -13 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

У відповідь запишіть суму коренів $x_1 + x_2 + x_3$.

22. Кут між векторами \vec{a} та \vec{b} дорівнює $\frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 10$.

Обчисліть значення виразу $[\vec{a}, \vec{b}]^2$.

23. Складіть канонічне рівняння еліпса, якщо $a = 3$, $b = 7$.

24. Складіть рівняння гіперболи, якщо $2c = 8$, а відстань між директрисами дорівнює 4.

25. Спортсмен кинув диск під гострим кутом до горизонту, який впав на відстані 52 м від нього. Визначте параметр параболічної траєкторії, яку описав диск, якщо максимальна висота, якої він досяг, дорівнює 10 м.

**Список використаної літератури
використаної у першому блоці**

1. Вища математика / за ред. д.е.н., проф. В.С. Пономаренка. – Харків: Фоліо. – 2014. – 672 с.
2. Грисенко М.В. Вища математика для економістів : підручник / М.В. Грисенко. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2023. – 687с.
3. Левшин М.М. Математика : навч. посібник для напряму підготовки 6.010102 «Початкова освіта» пед. навч. закладів: у 3 ч. Ч.1/ М.М. Левшин, О.Є. Лодатко; за заг. ред. Є.О. Лодатка. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. – 264 с.
4. Левшин М.М. Математика: навч. посібник для напряму підготовки 6.010102 «Початкова освіта» пед. навч. закладів: у 3 ч. Ч.ІІ/ М.М. Левшин, О.Є. Лодатко; за заг. ред. Є.О. Лодатка. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. – 224 с.
5. Покрокова інструкція геогейбра <https://www.geogebra.org/m/su5ywtxw>
6. Руденко Н.М. Особливості підготовки майбутніх учителів початкової школи до застосування ментальних карт на уроках математики. *Освітологічний дискурс : електронне наукове фахове видання*. 2020. № 2. с. 92-104. ISSN 2312-5829
7. Руденко Н.М., Головчанська О.В. Застосування інтерактивних технологій з використанням ІКТ на заняттях дисциплін математичного циклу. *Інформатика та інформаційні технології в початкових закладах*. 2015, № 4(57). с. 41-47.
8. GeoGebra Вікіпедія : вільна енциклопедія.
URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/GeoGebra> (дата звернення: 16.04.2024).

**II БЛОК: МАТЕМАТИКА З МЕТОДИКОЮ НАВЧАННЯ:
ТЕХНОЛОГІЧНИЙ АСПЕКТ**

**ТЕМА 4. ТЕОРЕТИЧНЕ І МЕТОДИЧНЕ ПІДРУНТЯ ЗАПРОВАДЖЕННЯ
СУЧАСНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ПОЧАТКОВІЙ
ШКОЛІ НУШ**

**ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ: МЕТА, ОСНОВНІ ЕТАПИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ,
КЛЮЧОВІ ПОНЯТТЯ ТЕМИ**

Мета. Розуміння процесів модернізації та реформування початкової математичної освіти; ознайомити з новітніми підходами до означення інноваційних технологій у навчання математики здобувачів початкової освіти відповідно до Концепції НУШ; навчити застосувати алгоритми технологій навчання математики учнів початкової школи НУШ.

Необхідні умови досягнення мети: особиста потреба студента в необхідності пізнання інформації, спрямованої на розвиток професійних компетентностей майбутнього вчителя початкових класів, прояв активності у пізнанні та самостійності в розвитку логічного мислення, розв'язування педагогічних ситуацій навчального характеру.

Основні етапи вивчення теми:

4.1. Реформування та модернізація початкової математичної освіти.

4.2. Технології навчання: означення, структура, застосування на уроках математики учнів початкової школи.

Ключові поняття теми: модернізація, реформування початкової математичної освіти; Концепція НУШ: НУШ-1, НУШ-2; інтеграція: внутрішньо предметна та міжпредметна; технологія, навчальна технологія, технологія навчання; критерії технологічності; технології навчання математики: означення, структура технологій початкової математичної освіти, алгоритм застосування.

4.1. Реформування та модернізація початкової математичної освіти

Завдання 4.1.1. Розгляньте таблицю 4.1.1 компонентів математичної освіти.

Таблиця 4.1.1

Математична освіта	
Назва компоненти	Зміст компоненти
Змістова	Математичні знання про властивості арифметичних дій та математичні поняття
Операційна	Математичні уміння і навички проводити обчислення, робити побудови, проводити вимірювання
Діяльнісна	Формування досвіду навчально-творчої роботи
Особистісна	Формування цілеспрямованого емоційно-оцінного ставлення до предмету

Чи погоджуєтесь ви з твердженням, що оновлене нормативне забезпечення початкової освіти сприяє формуванню в учнів початкової школи досвіду математичної діяльності завдяки зміщенню акцентів на уроці від безпосереднього відтворення знань

до формування навчальної діяльності? Якщо так, то вкажіть ці нормативні документи; якщо ні, то обґрунтуйте свою думку.

Завдання 4.1.2. З метою підтримання життєдіяльності математичної освіти та забезпечення фундаментальності математичної підготовки, формування математичного стилю мислення, застосування математичних знань до вирішення прикладних завдань відбувається процес оновлення математичної освіти, до якого належать реформування та модернізація. На аашу думку, які з компонент математичної освіти охоплюють процес модернізації, а які процес реформування?

Завдання 4.1.3. Модернізація – процес змін та удосконалень навчального процесу, що відповідають сучасним вимогам математичної освіти. Реформування – перебудова певної сторони навчального процесу, що не знищує основ існуючої системи математичної освіти. Чи можна зробити висновок, що модернізація вимагає створення нової парадигми, неперервності математичного розвитку та формування математичної культури в здобувачів початкової освіти, а реформування доповнює традиційну систему навчання математики новими методичними підходами? Обґрунтуйте свій висновок.

Завдання 4.1.4. Реформи, які здійснюються в Україні за останнє десятиліття, суттєво вплинули й на освіту, яка генерує знання, уміння та інноваційне мислення, сприяє переосмисленню та утвердженню європейських цінностей. Прийнято нові закони, зокрема: Концепція Нової української школи (2016), Закон України «Про освіту» (2017), Державний стандарт початкової освіти (2018, зі змінами 2019) та інші. Державний стандарт початкової освіти визначає вимоги до обов'язкових результатів навчання та компетентностей здобувачів освіти (Додатки 1-11), загальний обсяг їх навчального навантаження в базовому навчальному плані початкової освіти (Додаток 12). У цьому документі виділено 11 ключових компетентностей, зокрема і математичну, яка передбачає виявлення простих математичних залежностей у навколишньому світі, моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичних відношень та вимірювань, усвідомлення ролі математичних знань та вмінь в особистому та суспільному житті людини. Відповідно до Державного стандарту в 2018 році Міністерство освіти і науки України затвердило дві освітні програми за якими можуть навчатися здобувачі початкової освіти: НУШ-1 (під керівництвом О.Савченко) та НУШ-2 (під керівництвом Р.Шияна). Створіть карту знань (за допомогою одного з е-ресурсів [Free Mind](#), [Bubbl.us](#), [Canva](#), [Mind Meister](#), [Coggle it](#) тощо), у якій продемонструйте відмінності цих навчальних програм стосовно предмету математика.

Завдання 4.1.5. Інтеграція в навчанні реалізується в межах окремої дисципліни, так і між різними предметами. Чи використовується внутрішньо предметна інтеграція при вивченні математики в початковій школі? Пропонується вибрати та обґрунтувати одну з двох гіпотез. Гіпотеза перша: Так, внутрішньо предметна інтеграція застосовується при вивченні математики, що підтверджує програма з математики (вкажіть клас, тему, взаємозв'язок з іншою темою), що дає змогу учням вивчати не

тільки тему, а й розуміти зв'язки між ними. Гіпотеза друга: Ні, внутрішньо предметна інтеграція не застосовується, тому що....

Завдання 4.1.6. Проаналізуйте дидактичні цілі навчання математики в початкових класах (освітня, розвивальна, виховна та практична) у процесі оновлення освіти (модернізація та реформування). Результати порівняльного аналізу цих процесів подайте у вигляді схеми, таблиці або карти знань.

Завдання 4.1.7. Продовжіть заповнювати таблицю 4.1.2 складових математичної діяльності в процесі модернізації та реформування математичної освіти.

Таблиця 4.1.2

Процес	Складові математичної діяльності			
	мотиваційна	змістова	процесуальна	контрольно-оцінна
Реформування	Акцентує увагу на удосконаленні процесу навчання математики та оволодінні програмними математичним знаннями, уміннями та навичками			
Модернізація	Реалізує стратегію математичного розвитку здобувачів початкової освіти як майбутніх членів громадянського суспільства			

Завдання 4.1.8. У модернізації початкової освіти вчені виділяють такі підходи: теоретико-методологічний, інтуїтивно-практичний, когнітивний інформаційно-логічний. Підберіть ключові слова до кожного з названих наукових підходів, які найбільш емко їх характеризують.

4.2. Технології навчання: означення, структура, застосування на уроках математики учнів початкової школи

Завдання 4.2.1. Поміркуйте, що на вашу думку позначають терміном *технологія*?

Завдання 4.2.2 Уважно прочитайте текст поданий нижче.

Термін *технологія*, якщо його розділити на дві частини в перекладі з грецької мови означає: *techne* – мистецтво, майстерність; *logos* – наука, закон), що дає можливість зробити висновок у буквальному розумінні – наука про майстерність. Цей термін став більш вживаним і емним за змістом наприкінці XVIII століття в період бурхливого розвитку промисловості, під час якого відбувається поступовий перехід до машинного виробництва та відмова від ручної праці. Тривалий процес переробки сировини на кінцеву продукцію, з розподілом цього процесу на окремі етапи, технологічні складові, ускладнення способів обробки продукту з регламентуванням,

конкретизацією всіх етапів циклу виробництва, заходів та дій і є технологією. *Технологія* – це комплексні знання про методи, засоби впровадження виробничих процесів, у результаті яких відбувається якісна зміна, трансформування, модифікування оброблюваних об'єктів. Отже, технологія – це сукупність прийомів, що застосовуються в будь-якій справі, майстерності, мистецтві [16].

Поміркуйте, чи можна застосувати *технологію* в педагогіці? Обґрунтуйте свою думку.

Завдання 4.2.3. Прочитайте перелік понять: *освітня технологія, педагогічна технологія, технологія навчання*. Пропонуйтеся вибрати та обґрунтувати одну з двох гіпотез.

Гіпотеза перша: Всі три поняття є науковою полісемією, яка містить сутність поняття спільну, але має різні терміни, у нашому випадку це *освітня технологія, педагогічна технологія, технологія навчання*.

Гіпотеза друга: Всі три поняття різні, оскільки мають свою ієрархію цілей, завдань та змісту, але їх всі об'єднують на певному історичному етапі освітні концепції та педагогічні парадигми.

Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 4.2.4. Розгляньте два терміни *навчальна технологія* та *технологія навчання*. Пропонуйтеся вибрати та обґрунтувати одну з двох гіпотез.

Гіпотеза перша: Ці поняття тотожні.

Гіпотеза друга: Поняття *технологія навчання* і *навчальна технологія* є різними.

Завдання 4.2.5. Дотримуючись 4-х цілей з'ясуйте сутність терміну *навчальна технологія*:

- 1) власні міркування щодо сутності терміну *навчальна технологія* та перевірка їхньої істинності;
- 2) дослідження власного процесу міркування щодо отримання нової інформації;
- 3) знаходження із запропонованих чотирьох варіантів для усвідомлення змісту нової інформації найбільш ефективного особисто для вас;
- 4) формулювання висновку.

Варіант 1

опрацювання терміну, зміст якого подано цілісно

Прочитайте трактування терміну *навчальна технологія* та зробіть висновок про рівень розуміння його змісту.

Навчальна технологія – це послідовність дій викладача та студентів (здобувачів освіти) для гарантованого досягнення навчальних цілей при вивченні навчального предмета, що передбачає застосування певної сукупності методів і засобів навчання, орієнтованих на реалізацію змісту навчання [23, с.13].

Варіант 2

опрацювання терміну, зміст якого поділено на логічні частини

Прочитайте трактування терміну *навчальна технологія*, якщо його зміст поділено на логічні частини та сформулюйте висновок про рівень розуміння його змісту.

Навчальна технологія

- послідовність дій викладача та студентів (здобувачів освіти) для гарантованого досягнення навчальних цілей при вивченні навчального предмета;
- застосування певної сукупності методів і засобів навчання, орієнтованих на реалізацію змісту навчання.

Варіант 3

опрацювання терміну шляхом візуалізації головної, а за необхідності і другорядної інформації

Створіть інтелект карту (карту знань) в одному з е-ресурсів [Free Mind](#), [Bubbl.us](#), [Canva](#), [Mind Meister](#), [Coggle it](#) тощо (на вибір студента), у якій залишено слова, значущі для розуміння терміну. За допомогою візуалізованої інформації зробіть висновок про рівень усвідомлення поняття.

Варіант 4

опрацювання терміну шляхом складання тестового завдання

З цієї метою виконайте тестові завдання.

Тестові завдання:

1. Оберіть варіант для доповнення речення:

У згорнутому формулюванні поняття *навчальна технологія* – це

- А) застосування певної сукупності методів і засобів навчання при вивченні предмету;
- Б) послідовне застосування викладачем певної сукупності методів і засобів навчання для гарантованого досягнення студентом (здобувачем освіти) навчальних цілей при вивченні навчального предмета;
- В) сукупність методів і засобів навчання, орієнтованих на реалізацію змісту навчання.

2. Оберіть варіант для доповнення речення:

Навчальна технологія стосується ...

- А) студента;
- Б) викладача;
- В) викладача та здобувача освіти.

Здійсніть самоперевірку правильності виконання завдання з використанням розділу навчального посібника «Дані для самоперевірки».

Завдання 4.2.6. Подумайте над твердженням.

Термін *навчальна технологія* є ширшим за поняття *технологія навчання*, оскільки термін *технологія навчання* вимагає розглядати конкретну технологію, яка дозволяє високо ефективно навчати, а поняття *навчальна технологія* не є таким цілеспрямованим і дозволяє розглядати різні технології навчання.

Розгляньте діаграми Ейлера-Венна, на яких позначено множиною А – поняття *навчальна технологія*, множиною В – *технологія навчання*. З'ясуйте, яка з діаграм А) – В) на рисунку 4.2.1 відповідає вищезазначеному твердженню.

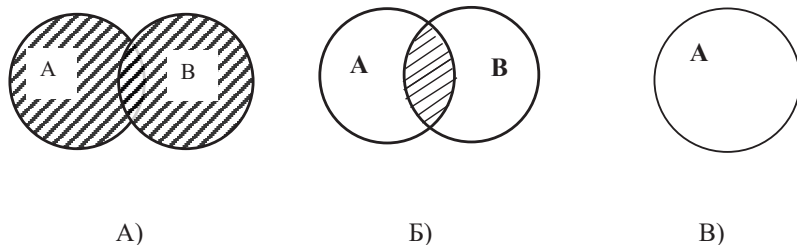


Рис. 4.2.1. Діаграми Ейлера-Венна

За допомогою візуалізованої інформації зробіть висновок про рівень усвідомлення цих понять.

Завдання 4.2.7. Із множини термінів створіть карту знань ієрархії понять для вивчення теми: *інноваційна технологія*, *технологія*, *технологія навчання*. На побічних гілках карти дайте означення вказаних понять. Зробіть висновок чи технологізація процесу навчання від дошкільної ланки до вищої школи впливає на математичну освіту?

Завдання 4.2.8. Кожна технологія навчання має свої критерії.

За допомогою таблиці 4.2.1 встановіть відповідність між критерієм та його описом [23, с.14].

Таблиця 4.2.1

Критерій	Опис критерію
1.Концептуальність	А) технологія повинна мати такі ознаки, як логіка процесу, взаємозв'язок усіх його елементів, цілісність
2.Системність	Б) кожна технологія має спиратися на певну наукову ідею
3.Керованість	В) можливість застосування (повторення)
4.Ефективність	Г) передбачає можливість діагностичного цілепокладання, планування, проектування процесу навчання, поетапної діагностики, варіювання засобами та методами з метою коригування результатів
5. Відтворюваність	Д) технологія має бути максимально дієвою та оптимальною за витратами, гарантувати досягнення певного результату навчання

Завдання 4.2.9. Уважно прочитайте текст поданий нижче.

Математика початкової школи – математична освітня галузь, метою навчання якої є: 1) різносторонній розвиток учнів початкової школи, їхніх поглядів на світ та переконань засобами математики, 2) зароджувати й розвивати в учнів основи ключових компетентностей, зокрема та математичної, необхідних в подальшому навчанні протягом життя

Урок математики в початковій школі – урок математики з колективом здобувачів початкової освіти (1-4 класи) за Типовою освітньою програмою НУШ, обраною навчальним закладом та відповідним їй підручником з математики [6 с., 179-180].

Поміркуйте, чи можливе застосування технологій навчання на уроках математики в початковій школі. Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 4.2.10. Прочитайте інформацію, подану нижче.

У Державному стандарті початкової освіти означено, що *математична компетентність* передбачає виявлення простих математичних залежностей у навколишньому світі, моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичних відношень та вимірювань, усвідомлення ролі математичних знань та вмінь в особистому і суспільному житті людини та виділено її компоненти, які подані на рис.4.2.2. [16].

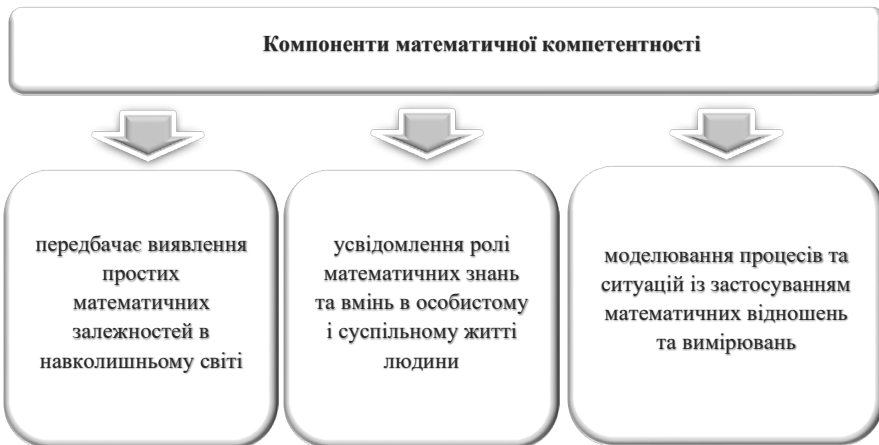


Рис.4.2.2 Компоненти математичної компетентності

Математична компетентність здобувача початкової освіти є особистісною властивістю, яка виявляється в різноманітних життєвих ситуаціях як здатність актуалізувати, поєднати й застосувати здобутий у процесі навчання досвід діяльності та особистісні якості, що необхідні для досягнення певного результату. Ця компетентність формується як довготривале засвоєння предметних і міжпредметних знань, вироблення досвіду виконання способів діяльності, вправління в застосуванні знань і вмінь у різних навчальних і життєвих обставинах [1].

У державному стандарті сформульовано вимоги до обов’язкових підсумків навчання математичної компетентності здобувачів початкової освіти, які окреслено у межах математичної освітньої галузі. Відповідно мети та загальних підсумків навчання з цієї галузі, узгоджено необхідні підсумкові результати навчання учнів початкової школи, які в подальшому стануть основою для продовження навчання в 5-11 класах ЗЗСО, що проілюстровано на рис. 4.2.3.

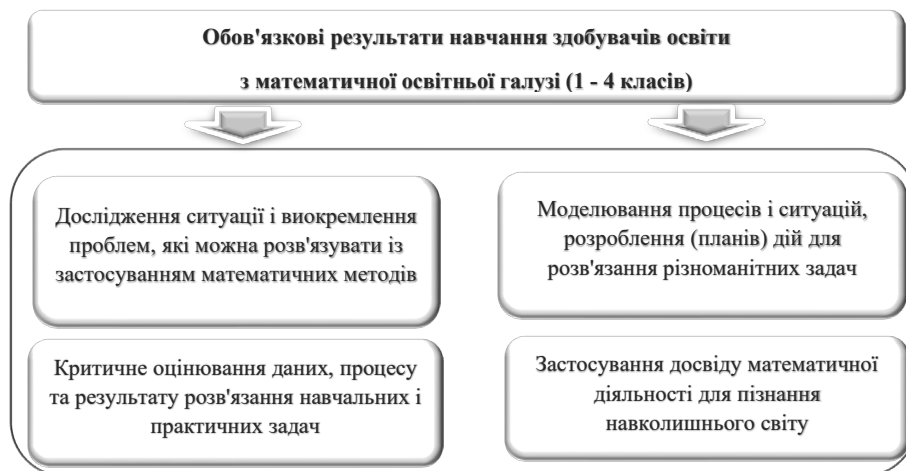


Рис. 4.2.3. Обов'язкові результати навчання учнів 1-4 класів.

Поміркуйте чи можна формувати математичну компетентність засобами технологій навчання.

Завдання 4.2.11. Проаналізуйте технології навчання представлені на рис. 4.2.4. За допомогою одного з е-ресурсів [Free Mind](#), [Bubbl.us](#), [Canva](#), [Mind Meister](#), [Coggle it](#) тощо створіть інтелект карту, на якій відобразить ті технології навчання, які доцільно на вашу думку застосувати на уроках математики в початковій школі.



Рис. 4.2.4. Технології навчання

На побічних гілках створеної вами карти знань до відібраних технологій занотуйте коротке означення.

Завдання 4.2.12. Розгляньте на рис.4.2.5 структуру технологій навчання математики в початковій школі.



Рис.4.2.5 Структура технологій навчання математики

Пропонується вибрати та обґрунтувати одну з двох гіпотез.

Гіпотеза 1. Всі технології навчання математики мають однакову структуру, подану на рис.4.2.5.

Гіпотеза 2. Технології навчання математики мають різну структуру, оскільки це залежить від виду технології, яку застосовують.

Завдання 4.2.13. Прочитайте означення. *Інноваційній технології* це сукупність та строго регламентована послідовність нових методів та способів взаємодії усіх учасників освітнього процесу, які гарантують досягнення найкращих результатів освітньої діяльності.

Розгляньте рис. 4.2.6, на якому зображено деякі інноваційні технології навчання.

1) Відберіть ті, які на вашу думку доцільно застосувати на уроках математики в початковій школі НУШ.

2) Подумайте, чи можна доповнити поданий на малюку 4.2.6 перелік інноваційних технологій іншими? У разі позитивної відповіді, вкажіть які саме технології.

3) Створіть ментальні карту відібраних технологій, на побічних гілках якої запишіть означення цих технологій та вкажіть прізвища сучасних науковців, які їх досліджували.

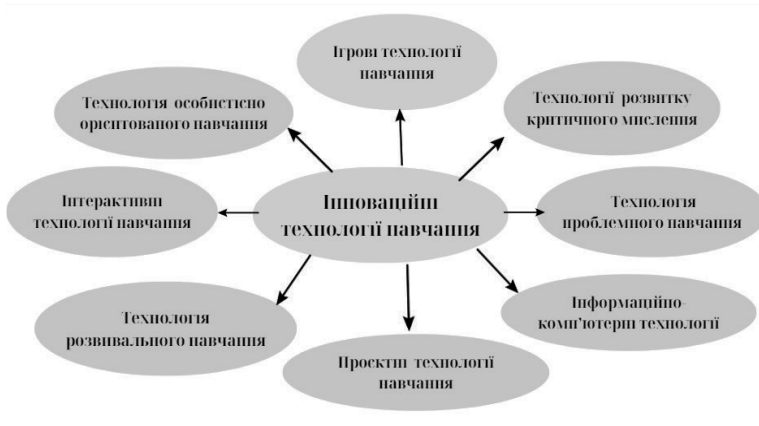


Рис. 4.2.6. Інноваційні технології навчання

Завдання 4.2.14. Складіть таблицю переваг та недоліків застосування інноваційних технологій навчання на уроках математики в початковій школі НУШ за поданим нижче зразком (табл.4.2.2).

Таблиця 4.2.2.

Назва технології	Переваги застосування	Недоліки застосування
1. <i>Ігрові технології навчання</i>		
2.		

Питання для самоперевірки до теми 4

1. Дайте визначення *модернізації освіти*?
2. Що таке *реформування освіти*?
3. Яка існує нормативна база в реформуванні освіти останнього десятиріччя?
4. Як реалізується *інтеграція* в навчанні?
5. Які дидактичні цілі навчання математики в початковій школі?
6. Які підходи виділяють сучасні вчені в модернізації початкової освіти?
7. Що таке *технологія*?
8. Означте поняття *педагогічна технологія*.
9. Чи тотожні поняття *педагогічна технологія*, *технологія навчання* та *освітня технологія*?
10. Які критерії мають технології?
11. *Математика в початковій школі* – це...
12. Що таке *урок математики в початковій школі*?
13. Означте поняття *інноваційна технологія*.
14. Які Ви знаєте інноваційні технології?

Електронні помічники до теми 4

Сучасному вчителю потрібно проводити уроки в різних режимах (дистанційно, офлайн або в змішаному режимі). Для роботи зручно використовувати хмарні технології та різноманітні е-ресурси, зокрема різні дошки (інтерактивні смарт дошки або онлайн дошки). Спочатку уточнимо дефініції цих понять.

Смарт дошка або *інтерактивна дошка* – це сучасна дошка (обладнання) для шкільної класної кімнати або офісу, інформація на яку виводиться за допомогою комп’ютера або ноутбука і проектора. На такій дошці, яка є сенсорним полотном, можна робити безліч корисних для навчання речей: малювати, писати, демонструвати текстові документи, фото і відеоматеріали.

Смарт дошки – винахід, що значно спрощує, але одночасно робить і більш продуктивним процес навчання (роботи), оскільки дозволяє наочно демонструвати навчальні матеріали великій кількості здобувачів освіти.

Сучасні хмарні технології надають користувачам мережі Internet доступ до сервера та використання різноманітного програмного забезпечення в режимі онлайн, зокрема і до онлайн дошок (цифрового аналогу смарт дошки).

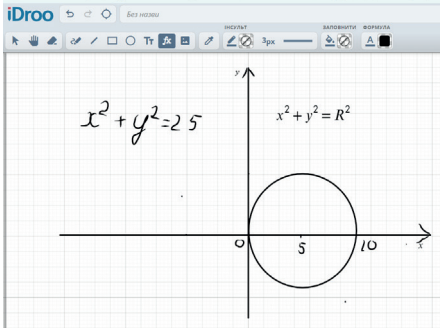
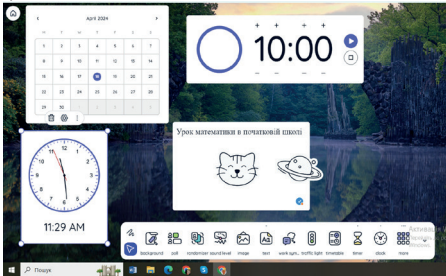
Онлайн дошка (*whiteboard*) – цифровий інтерактивний ресурс, який дозволяє організувати в реальному часі спільну роботу (навчання) і працювати дистанційно, створювати та редагувати одночасно зображення та текстові документи, аудіо і відео-матеріали [17].

У таблиці 4.2.3 наведено кілька сервісів онлайн дошок

Таблиця 4.2.3

Назва сервісу	Можливості ресурсу
<i>Twiddla</i> умовно безкоштовна	Дозволяє безкоштовно працювати без реєстрації 30 днів (посилання на робочий простір генерується сайтом автоматично, що дозволяє поширити його серед учнів). Візуально привабливий і зрозумілий інтерфейс дозволяє легко працювати з текстовими документами (вирівнювати і форматувати текст, змінювати розмір літер), демонструвати ілюстрації, працювати з математичними формулами тощо
<i>Miro</i> є безкоштовна версія	Безкоштовна реєстрація на сервісі, інтерфейс ресурсу доступний тільки англійською мовою, але інтуїтивно зрозумілий. Ресурс дозволяє проводити онлайн уроки, створювати план роботи, закріплювати завдання, що необхідно виконати. Доступний як з комп’ютера, так і зі смартфона. Учасників легко запрошувати через посилання та по електронній пошті. Має різноманітний інструментарій: створення безлічі дошок, на яких можна працювати з текстовими документами (писати пером або працювати з текстом, змінюючи шрифт, колір та розмір), таблицями, зображеннями, графіками та малюнками. Легко створювати геометричні фігури змінюючи налаштування товщини шаблонних ліній (прямі, ламані, пунктирні лінії тощо). На дошку можна додавати стікери, що дає можливість учасникам ділитися своїми ідеями та коментарями, стимулює смільну роботу всіх учасників та забезпечує зворотній зв’язок з організатором роботи. Створені дошки можна зберегти як: у форматі плакатів (pdf); у форматі презентації; на GoogleDisk; завантажити резерву копію.

Продовження таблиці 4.2.3

Назва сервісу	Можливості ресурсу
<p><i>IDroo</i> є безкоштовна версія</p>	<p>Онлайн дошка містить повний набір інструментів для введення математичних формул та створення графіків. Розміри дошки нескінченні. На рисунку 4.2.7 показано, як легко можна створювати математичні рисунки від руки. На дошці можуть працювати одночасно декілька учасників</p>  <p>Рис.4.2.7.</p> <p>Запрошення учасників – за посиланням. У платній версії є можливість додавати документи та зображення, змінювати фон дошки тощо. Створені дошки можна зберігати у форматі PDF або як зображення</p>
<p><i>Classroomscreen</i> безкоштовна</p>	<p>Дошка розроблена голландським учителем. Має декілька цікавих функцій: <i>текстове поле</i> (для введення інструкцій до завдань); <i>календар</i>, <i>годинник</i>, <i>таймер</i> (для встановлення часу на виконання завдання); <i>світлофор</i> (зелений початок роботи, червоний – кінець роботи, учень може вмикати червоний колір, якщо йому потрібна допомога); <i>фон</i> (можна змінювати фон відповідно до уроку) (рис. 4.2.8)</p>  <p>Рис. 4.2.8.</p>
<p><i>Padlet</i></p>	<p>Поліфункціональна онлайн дошка, яка є зручною для роботи вчителя, оскільки дозволяє йому, окрім оформлення всіх матеріалів по темі в одному місці, ще й аналізувати, проводити, контролювати, відстежувати роботу учнів (Додаток А)</p>

Існують і інші онлайн дошки, зокрема *Awwapp Whiteboard*, *Fox*, *Conceptboard*, *Groupboard*, *NoteBookCast*, *Limnu* та інші.

У зв'язку з невідомим розвитком технологій з кожним днем з'являються нові сервіси, які допомагають вчителям в роботі. Кожен собі обирає, те що зручно і ефективно сприяє створенню навчальних матеріалів для учнів, допомагає в роботі.

ТЕМА 5. ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ЗДОБУВАЧІВ ПОЧАТКОВОЇ ОСВІТИ

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ: МЕТА, ОСНОВНІ ЕТАПИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ, КЛЮЧОВІ ПОНЯТТЯ ТЕМИ

Мета. Ознайомити з технологіями навчання, які доцільно застосовувати на уроках математики в початковій відповідно до Концепції НУШ; навчити створювати алгоритми технологій навчання математики учнів початкової школи НУШ.

Необхідні умови досягнення мети: особиста потреба студента в необхідності пізнання інформації, спрямованої на розвиток професійних компетентностей майбутнього вчителя початкових класів, прояв активності у пізнанні та самостійності в розвитку логічного мислення, розв'язування педагогічних ситуацій навчального характеру.

Основні етапи вивчення теми:

- 5.1. Технологія ігрового навчання.
- 5.2. Інтерактивні технології.
- 5.3. Інформаційно-комунікаційні технології.
- 5.4. Технологія організації диференційованого навчання.
- 5.5. Технологія проєктування.

5.1. Технологія ігрової діяльності

Завдання 5.1.1. Прочитайте текст поданий нижче.

Сутність *ігрового навчання*. Чільне місце серед типів інноваційного навчання займає ігрове. Для сучасної системи освіти ігрові форми важливі перш за все тим, що вони істотно впливають на обсяг, глибину та свідоме засвоєння учнями навчального матеріалу, формування у них нестандартного мислення, свободи вибору, потреби й готовності до інноваційної діяльності. Гра – це складне, багатогранне явище, яке неможливо однозначно трактувати. Тривалість навчальної гри від кількох хвилин до цілого уроку, а тому ігрове навчання може бути застосоване як на різних етапах уроку, так і в позаурочній роботі. Ігрове навчання – це технологія, як складається із системи взаємопов'язаних елементів, які являють собою комплекс виборчого залучення складових, де взаємодіяльність і взаємовідношення набувають характер взаємного сприяння компонентів, направлених на досягнення запланованого дидактичного результату. Впровадження у педагогічну практику початкової школи ігрових методів покликані активізувати учбову діяльність учнів. До ігрових технологій навчання відносяться: ділові ігри (модифікації: бліц-гра, гра-вправа, рольова, операційна, імітаційна ігри та ін.), дидактичні ігри, ігри-змагання [23, с.47].

За допомогою одного з е-ресурсів [Free Mind](#), [Bubbl.us](#), [Canva](#), [Mind Meister](#), [Coggle it](#) тощо створіть інтелект карту, на якій відобразіть основні дефініції тексту. На побічних гілках інтелект карти запишіть короткі означення до обраних дефініцій.

Завдання 5.1.2. Прочитайте трактування терміну *дидактична гра*.

Дидактична гра це різновид спеціально створених дорослими чи успадкованих від попередніх поколінь ігор, що використовуються в навчальному процесі під безпосереднім керівництвом педагога, особливістю якої є наявність, крім ігрової (для

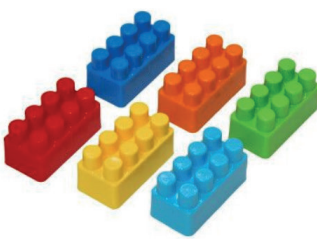
учнів), чітко визначеної дидактичної мети (для педагога), регламентування ігрової діяльності спеціально визначеними правилами, а ігровий задум та ігрові дії допомагають зберегти високу активність і самостійність учнів до моменту досягнення результату, наповнюючи навчання радісними позитивними інтелектуальними емоціями [23, с.48].

На основі означення виділіть структурні елементи технології дидактичної гри.

Короткі відомості

В таблиці 5.1.1 подані відомості про технологію компетентнісного навчання *Шість цеглинок* [14, 15].

Таблиця 5.1.1

Ігрова технологія <i>Шість цеглинок</i>	
Шість цеглинок	Практичний інструмент, який дає змогу за допомогою конструктора LEGO DUPLO реалізувати ігрові технології навчання в початковій школі. Це не фіксований набір завдань та інструкцій, а інструмент, який дозволяє вчителю творити та імпровізувати на уроці, а учню – робити відкриття, досліджувати, експериментувати, шукати відповіді на проблемні питання.
Засновник методики Brent Хатчесон директор департаменту освітніх технологій LEGO Foundation	Освітянин, практик та експерт з ігрових методів навчання з Південно-Африканської Республіки. Розробив в 2014 році технологію <i>Шість цеглинок</i> , яка пройшла апробацію в 4 країнах: ПАР, Україні, Данії та Мексиці. У 2015 році Кембриджський університет (University of Cambridge), Велика Британія, провів дослідження, яке підтвердило дієвість цієї навчальної технології. У 2016 році Аміна Брей (Amina Brey) з університету Нельсона Манделі (Nelson Mandela University), ПАР, захистила докторську дисертацію, яка виявила позитивний вплив ігрової технології <i>Шість цеглинок</i> на візуальне сприйняття учнів початкової школи та їхнє вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, що має значний вплив на швидкість навчання читання та розумінню прочитаного
Набір 6 цеглинок конструктора LEGO DUPLO 6 кольорів: червоного, жовтого, помаранчевого, синього, зеленого та блакитного (рис. 5.1.1)	 <p>Рис.5.1.1.</p>
Гра-завдання (гра-вправа)	Це комплекс розвитку мислення, мовлення, уваги; механізм розвитку оперативної пам'яті, самоконтролю, когнітивної гучкості

Продовження таблиці 5.1.1

Алгоритм створення гри-завдання	<ol style="list-style-type: none"> 1. Визначити мету гри-завдання і перелік умінь, які учні мають розвинути під час виконання 2. Розпишіть покроково завдання, що легко орієнтуватись у вправі 3. Переконайтесь, що вправу можна ускладнити (спростити) відповідно до рівня розвитку учнів певного класу 4. Продумайте місце виконання вправи (парта, клас, інше приміщення школи) 5. Чи можна цю гру-завдання використовувати систематично?
---------------------------------	---

Завдання 5.1.3. Прочитайте текст, поданий нижче [14, 15].

В Україні офіційним початком впровадження в освітній процес ігрової технології з використанням конструктора LEGO вважається 2009 рік (впроваджено програму «Основи робототехніки» для учнів 5-8 класів загальноосвітніх шкіл). У системі дошкільної освіти починає діяти програма «Сприяння освіти», започаткована Меморандумом про взаєморозумінні між Міністерством освіти і науки України та благодійним фондом The LEGO Foundation (Королівство Данія), який повністю забезпечив дошкільні навчальні заклади наборами конструкторів, завдяки яким впроваджується заняття з використанням конструктора LEGO. З 2017 року МОН України рекомендував проваджувати програму використання конструктора LEGO в освітньому процесі початкової школи, створивши середовище, що полегшує учню через ігрову діяльність розкрити особистий потенціал в пізнанні навколишнього світу. Таким чином створивши освітнє середовище LEGO, яке об'єднує в собі спеціально скомпоновані для занять в групі учнів комплекти LEGO, ретельно продуману систему завдань для учнів і має чітко сформульовану освітню концепцію.

Конструктор LEGO спонукає працювати в рівній мірі, і голову, і руки учня. Конструктор дозволяє вчитися граючи і навчатися в грі (LEGO – від дат. Leg-godt – гра, задоволення).

Конструктор LEGO – це набір цеглинок і спеціальних деталей для створення різних цікавих ігор. Для наборів LEGO характерні висока якість, естетичність, незвичайна міцність, безпека. У педагогіці ігрова технологія з використання конструктора LEGO актуальна тим, що, будуючись на інтегрованих принципах, об'єднує у собі елементи гри і експериментування. Ігри LEGO тут виступають засобом дослідження і орієнтації учня в реальному світі, просторі і часі.

Подумайте чи можливо застосовувати конструктор LEGO на уроках математики в початковій школі. Пропонується вибрати та обґрунтувати одну з двох гіпотез.

Гіпотеза 1. Ні, не можливо.

Гіпотеза 2. Так, можливо.

Завдання 5.1.4. Користуючись рис. 5.1.1 подумайте, в роботі над якими змістовими лініями навчання математики ми можемо використовувати LEGO. Відповідь обґрунтуйте.



Рис. 5.1.1. Компоненти математичної компетентності.

Завдання 5.1.5. В роботі над якими, на вашу думку, змістовими лініями навчання математики ми можемо використовувати ігрову технологію LEGO?

Розгляньте рис. 5.1.2. З'єднайте змістові лінії стрілками з варіантами ознайомлення.






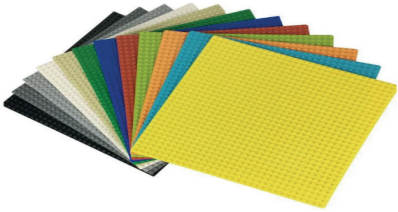


Рис.5.1.2. Змістові лінії навчання математики

Короткі відомості

У таблиці 5.1.2 подані короткі відомості словника термінів конструктора LEGO [14, 15].

Таблиця 5.1.2

<p><i>Основні базові цеглинки</i></p>		
<p><i>Цеглинки</i></p>	<p>2x4</p> 	<p>2x2</p> 
<p><i>Міні фігурки</i></p>		
<p><i>Інші види деталей</i></p>		
<p><i>Базові пластини</i></p>		

Завдання 5.1.6. У таблиці 5.1.3 запропоновано застосування цеглинок LEGO при вивченні теми нумерації чисел першого десятка. Проаналізуйте ці вправи і подумайте чи можна застосувати цеглинки LEGO при вивченні нумерації чисел від 11 до 100. У разі позитивної відповіді складіть аналогічну таблицю з застосуванням цеглинок

LEGO з цієї теми. Запропонуйте свої ігри-вправи. Розпишіть технологію їх застосування

Таблиця 5.1.3

Методика навчання нумерації чисел 1-10	Застосування цеглинок LEGO
Лічба – встановлення бієкції (взаємно однозначної відповідності) між елементами заданої скінченної множини і числами (елементами початкового відрізка натурального ряду). Утворення нового числа Навчання співвіднесення цифри і числа Порівняння чисел	рахувати цеглинки, рахувати шипи на цеглинках, рахувати цеглинки за різними ознаками (кольором, кількістю шипів, величиною), викладати з цеглинок певну кількість, викладати з цеглинок певні числа

Завдання 5.1.7. Розгляньте на рис. 5.1.3 завдання №1 з підручника [24, с.19]. Користуючись алгоритмом (табл. 5.1.3) складіть гру-завдання за допомогою цеглинок LEGO



Рис. 5.1.3. Завдання з підручника 1 класу [24, с.19]

Завдання 5.1.8. Розгляньте на рис. 5.1.4. завдання №2 і №3 з підручника на ознайомлення з дією додавання та віднімання [24, с.21]. Користуючись алгоритмом (табл. 5.1.4) складіть гру-завдання за допомогою цеглинок LEGO. Обов'язково зазначте орієнтовний час виконання вправи.



Рис. 5.1.4 Завдання з підручника 1 класу [24, с.21]

Завдання 5.1.9. В таблиці 5.1.5 запропоновано застосування цеглинок LEGO при вивченні теми «Методика розв’язування простих задач».

Таблиця 5.1.5

Методика розв’язування простих задач	Варіанти вправ-ігор застосування цеглинок LEGO
Ознайомлення з умовою задачі Визначати ключові слова умови Розв’язання задачі Відповідь	Викласти за допомогою цеглинок умову задачі в символічному вигляді (одна цеглинка – одна цукерка, одна машинка тощо) Викласти умову задачі в числовому вигляді (викладати різні числа) Будувати модель задачі Викласти відповідь задачі в числовому або символічному вигляді

Проаналізуйте ці вправи-ігри. Створіть гру-вправу до кожної із запропонованих задач (рис. 5.1.5), складіть технологічну картку із застосуванням цеглинок LEGO [25, с.10]. Поясніть методику розв’язування простих задач.

3 До кожної задачі добери опорну схему з поданих нижче. Розв’яжи задачі.

1) У Сашка 6 карamelьок і 3 шоколадні цукерки. Скільки всього цукерок у Сашка?

2) У Сашка всього 9 цукерок — карamelьок і шоколадних. Скільки в Сашка карamelьок, якщо шоколадних цукерок у нього 3?



3) У Сашка всього 9 цукерок — карamelьок і шоколадних. Скільки в Сашка шоколадних цукерок, якщо карamelьок у нього 6?



Рис. 5.1.5. Прості задачі з підручника 2 класу [25, с. 10]

Завдання 5.1.10. Складіть фрагмент уроку з використанням ігрової технології Шість цеглинок для другого класу на тему «Розв’язування простих задач». Сформулюйте мету уроку. Для підбору задач, скористайтесь схемою, поданою на рис. 5.1.6.

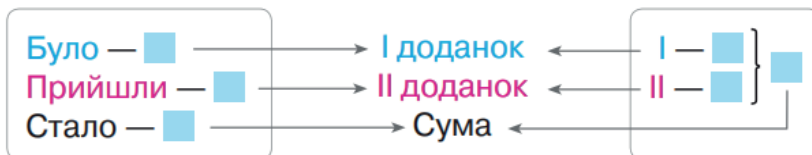


Рис. 5.1.6. Схеми простих задач з підручника 2 класу [25, с. 17]

Короткі відомості

В таблиці 5.1.6 подані короткі відомості про квести та їх види, навчальні квести, умови успішності квестів.

Таблиця 5.1.6

<i>Квест (англ. quest – пошук)</i>	1) любительське спортивно-інтелектуальне змагання кількох команд або окремих гравців, в основі якого послідовне виконання заздалегідь підготовлених завдань. Під час гри учасники вирішують логічні завдання, здійснюють пошук на місцевості або в приміщенні, створюють оптимальні маршрути своїх переміщень, шукають підказки та оригінальні рішення. Перейти до наступного завдання команда (або окремих гравець) може тільки виконавши повністю попереднє. Перемагає так команда, яка найшвидше виконала всі завдання. 2) гра-пригода, яка побудована за певним сюжетом, із підготовленим завданнями, маршрутом та завершується досягненням ігрової мети
<i>Навчальний квест</i>	це інтелектуальна, динамічна гра, яка створена за певним сценарієм та полягає у проходженні командами кількох етапів (маршруту) з виконанням на кожному з них завдань, які відповідають конкретній навчальній меті.
<i>Види квестів</i>	<i>лінійний</i> – учасники рухаються за визначеним лінійним маршрутом, виконуючи поступово всі завдання (ребуси, головоломки, загадки, шифровки, руханки, творчі завдання, підказки тощо); <i>коловий</i> – маршрут побудований по колу; можуть брати участь декілька команд, які стартують з різних позицій і приходять до фінішу, пройшовши всі етапи; <i>штурмовий</i> – гравці або команди отримують завдання та підказки для його виконання, але маршрут і спосіб виконання обирають самостійно
<i>Умови успішності квесту</i>	безпе́чність для учасників; оригінальність; логі́чність; цілі́сність; відпові́дність запланованому сюжету; створення атмосфери повної зануреності в гру
<i>Квест-технологія</i>	ігрова технологія, що поєднує ідеї проектного методу, проблемного та ігрового навчання, взаємодії в команді та використання ІКТ, поєднує цілеспрямований пошук при виконанні головного завдання з серією допоміжних завдань з пригодами або грою за певним сюжетом

Завдання 5.1.11 Користуючись шаблоном-підказкою (табл. 5.1.7) створіть сценарій навчального квесту для учнів 2 класу на тему «Додаємо і віднімаємо двоцифрові числами частинами».

Зразок завдань на рис. 5.1.7.





$56 + 20 + 3$ $96 - 60 - 5$ $25 + 40 + 3$ $78 - 50 - 6$
 $56 + 23$ $96 - 65$ $25 + 43$ $78 - 56$





Рис. 5.1.7.Завдання з підручника 2 класу [25, с. 18].

Таблиця 5.1.7

Шаблон підготовки навчального квесту

<p>1) Мета навчального квесту 2) Детальне вивчення ігрового простору 3) Знання про рівень розвитку гравців 4) Визначення тривалості квесту (урок, навчальний день або навчальний тиждень) 5) Головні герої 6) Складність завдань</p>	
Сюжет	Перший етап підготовки – вибір сюжету або легенди та написання сценарію, підготовка завдань
Маршрут	Другий етап – найскладніший етап підготовки, оскільки організатор повинен продумати, щоб він був безпечним для учнів, цікавим та незвичним. Оскільки в процесі квесту учні мають діяти самостійно, то запропонований маршрут має дозволяти учням рухатися вільно. В залежності від особливостей архітектури закладу освіти можуть бути 3 варіанти: 1) маршрут квесту в класній кімнаті; 2) квест на вулиці (стадіоні або подвір'ї школи), що передбачає активну рухову діяльність учнів; 3) об'єднання двох попередніх варіантів в один (подвір'я + класна кімната)
Підказки	Третій етап – найцікавіший. Підказки треба сховати так, щоб учні могли знайти, але цей пошук повинен бути не надто простим. Можна використовувати «фальшиві підказки» для яких можна використовувати маленькі коробочки, повітряні кульки та ін. Учні повинні відкрити всі коробочки (лопнути всі кульки тощо) та знайти необхідну підказку або картку з завданням
Завдання	Для того щоб квест був не лише розважальним, а й мав пізнавальний характер, необхідно підготувати цікаві завдання. Слід пам'ятати, що вони не мають бути занадто легкими і, в той же час, необхідно щоб діти їх змогли виконати хоча б за допомогою кількох підказок

Завдання 5.1.12 Користуючись планом підготовки (табл. 5.1.8) створіть сценарій навчального квесту для учнів 3 класу. Тема квесту «Пошук математичних скарбів». Маршрут, підказки та орієнтовні завдання можна змінювати.

Таблиця 5.1.8

План підготовки навчального квесту

Мета навчального квесту Тривалість Поділ на команди за математичною підготовкою учнів Головні герої Карта скарбів	
Сюжет (легенда)	Вчителем знайдена стара карта, на якій позначений захований математичний скарб. Це місце – територія школи, але де саме захований скарб важко зрозуміти, бо за багато років це місце дуже змінилось, але....
Маршрут	Маршрут прокласти по території школи Станція 1 «Вишня» Станція 2 «Стадіон» Станція 3 «Під вербою»
Підказки	1) 2) 3)
Завдання	Завдання 1 Математичний ребус. Завдання 2 Завдання на логіку. Поділити цифру дев'ять навпіл, щоб вийшло чотири. Завдання 3 Задача

Завдання 5.1.13. Користуючись планом підготовки (табл. 5.1.9) створіть сценарій навчального квесту для учнів 4 класу. Тема квесту на вибір студента.

Таблиця 5.1.9

План підготовки навчального квесту

Загальні моменти організації	
Сюжет (легенда)	
Маршрут	Станція 1 Станція 2 Станція 3
Підказки	1) 2)
Завдання	Завдання 1 Завдання 2

5.2. Інтерактивні технології навчання

Короткі відомості

У таблиці 5.2.1.подані короткі відомості про інтерактивні технології навчання, інтелект карта інтерактивного уроку математики, класифікація інтерактивних технологій навчання за О.Пометун та Л.Пироженко [13].

Таблиця 5.2.1

Інтерактивні технології навчання – це сукупність та скінченна послідовність педагогічних методів та прийомів, які спрямовані на реалізацію дидактичної мети, суб'єкт-суб'єктної взаємодії всіх учасників освітнього процесу, що позитивно впливає на активізацію мисленнєвої діяльності та підвищує якість знань учнів з того предмету, на якому вони застосовуються [16, с.42]. Інші визначення цього поняття в Додатку Б

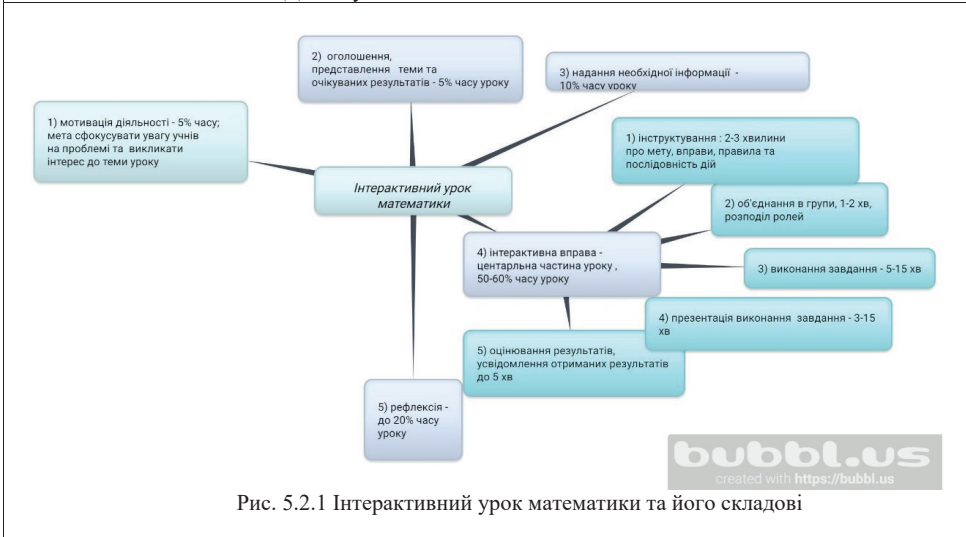


Рис. 5.2.1 Інтерактивний урок математики та його складові

Класифікація інтерактивних технологій навчання за О.Пометун і Л.Пироженко	
Технології колективно-групового навчання	«Мікрофон», «Мозкова атака» «Навчаючись – вчусь», «Ажурна пилка» («Мозаїка», «Джиг-со») «Обговорення проблеми у спільному колі», «Незакінченні речення», «Аналіз ситуації (case-study), «Вирішення проблем». «Древо рішень»
Технології кооперативного (колективного) навчання	«Робота в парах» («Один проти одного», «Один – вдвох – всі разом»), «Два – чотири – всі разом», «Коло ідей Раунд Робін», «Акваріум», «Карусель», «Ротаційні трійки», «Спільний проєкт», «Пошук інформації»
Технології ситуативного моделювання	«Займи позицію», «Розігрування сюжетної задачі». «Ток-шоу», «Рольва гра»
Відпрацювання дискусійних питань	Різноманітні дискусії та дебати (в початковій школі фактично не застосовуються)


Завдання 5.2.1. Проаналізуйте інтерактивні технології навчання, подані в таблиці 5.2.1. Заповніть таблицю застосування інтерактивних технологій навчання на уроках математики по роках навчання (табл. 5.2.2).

Таблиця 5.2.2.

Клас технології	Клас навчання	Назва технології	Дидактична мета
Технології колективно-групового навчання	1		
	2		
	3		
	4		
Технології кооперативного (колективного) навчання	1		
	2		
	3		
	4		
Технології ситуативного моделювання	1		
	2		
	3		
	4		

Завдання 5.2.2. Розгляньте технологічну картку (табл. 5.2.1) для застосування в 1 класі технології *Мікрофон*

Таблиця 5.2.1

Технологія <i>Мікрофон</i> дає можливість кожному учневі по черзі висловити думку, відповісти на запитання тощо	
<i>Правила для учнів</i>	Відповідає тільки той учень, у якого в руках «символічний мікрофон», а інші учні дотримуються тиші. Відповіді учні не коментують і не оцінюють
<i>Завдання</i>	Віднови таблиці. Склади рівності на додавання. 
<i>Дидактична мета</i>	Навчити складати рівності на додавання чисел першого десятка
<i>Алгоритм застосування технології</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Учні виконують в зошитах запропоноване завдання 2) Учитель може в певній послідовності передавати символічний мікрофон (або вибірково) 3) Учні, в яких мікрофон відповідають, а інші перевіряють у зошитах відповіді, не коментуючи правильність виконання 4) Учитель підводять підсумки виконання вправи

Чи погоджуєтесь ви, що технологію *Мікрофон* доцільно застосувати на уроках математики в 1 класі? Відповідь обґрунтуйте. Підберіть завдання з підручника [24] та створіть власну технологічну карту.

Завдання 5.2.2 Розгляньте технологічну картку (табл. 5.2.2) для застосування в 1 класі технології *Робота в парах*

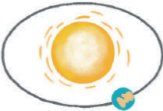


Таблиця 5.2.2

Технологія <i>Робота в парах</i> навчає учнів навичок співробітництва, умінню слухати іншого учня та стисло висловлювати свою думку	
<i>Правила для учнів</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Пара учнів читає завдання та вказівки до його виконання 2) Визначають хто говорить першим 3) По черзі висловлюють свої думки стосовно розв'язання завдання 4) Не можна змінювати тему розмови, оцінювати іншого учня, перебивати його 5) Спільно розв'язують завдання 6) Визначають, хто буде доповідачем спільного результату для всього класу
<i>Завдання</i>	<p>Тема «Знайомимось із задачами на знаходження невідомого зменшуваного або від'ємника»</p> <p>Склади задачу за кожним малюнком відповідно до схеми. Розв'яжи задачу. Установи, який компонент є в ній шуканим. З'ясуй, чи є зв'язок між задачами.</p> <p>Рис.5.2.2 Завдання з підручника для 1 класу [24, с. 131].</p>
<i>Дидактична мета</i>	Ознайомлення із задачами на знаходження невідомого зменшуваного або від'ємника
<i>Алгоритм застосування технології</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Учні працюють в парах визначений учителем час (3-5 хв) 2) Кожна пара представляє отриманий результат (1-3 хв, в залежності від кількості пар) 3) Підведення підсумків, рефлексія

Обґрунтуйте доцільність застосування вище згаданої технології на уроках математики в 1 класі. Чи можна її застосовувати в інших класах? В разі позитивної відповіді складіть свою технологічну картку. Вкажіть клас, тему, номери підручника.

Завдання 5.2.3 Розгляньте технологічну картку (табл. 5.2.3) для застосування в 2 класі технології *Коло ідей (Раунд робін)*.

Таблиця 5.2.3

<p><i>Коло ідей (Раунд робін)</i> – це технологія, яка дозволяє залучити до обговорення завдань усіх учнів класу, дозволяє уникнути ситуації, коли перша група учнів доповідає і подає усю інформацію з анонсованої проблеми; ефективна технологія для розгляду суперечливих завдань і є базовою для складання списку загальних ідей більш складнішої технології <i>Мозковий штурм</i></p>	
<p><i>Правила для учнів</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Група учнів читає завдання та вказівки до його виконання 2) Визначають хто записуватиме ідеї 3) По черзі висловлюють свої ідеї. Не можна змінювати тему розмови, оцінювати іншого учня, перебивати його 4) Визначають, хто буде доповідачем однієї з ідей для всього класу, решта слідкують, щоб доповідач не озвучив ідею, яку вже проговорили інші групи
<p><i>Завдання</i></p>	<p>Одиниці вимірювання часу — рік, місяць, доба — пов'язані з обертанням небесних тіл. Земля обертається навколо Сонця. Навколо Землі обертається її супутник — Місяць. Земля обертається ще й навколо своєї осі. Назви відомі тобі одиниці вимірювання часу. Коли ти ними користуєшся?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Рік</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Місяць</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Доба</p> </div> </div> <p>Рис.5.2.3 Завдання з підручника для 2 класу [25, с. 21].</p>
<p><i>Дидактична мета</i></p>	<p>Навчити як вимірюють одиниці часу: рік, місяць, доба</p>
<p><i>Алгоритм застосування технології</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Учитель анонсує питання для обговорення і пропонує обговорити його в групах (3-5 хв). 2) По закінченні обговорення, кожна група доповідає і висуває тільки одну ідею (до 1 хв) 3) Групи виступають по черзі, поки не будуть заслухані всі ідеї (3-5 хв) 4) Під час доповідей представників груп учитель записує всі ідеї на дошці

Чи можна її застосовувати в першому класі? А інших класах? В разі позитивної відповіді складіть свою технологічну картку. Вкажіть клас, тему, номери підручника.

Завдання 5.2.4. Розгляньте технологічну картку (табл. 5.2.4) для застосування в 2 класі технології *Мозковий штурм*.

Таблиця 5.2.4

<p><i>Мозковий штурм</i> технологія колективного обговорення та пошуку ідей, яка спонукає учнів вивчити креативність та творчість</p>	
<p><i>Правила для учнів</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Включити увагу, не відкидати жодної, навіть фантастичної ідеї. 2) Намагатися запропонувати як найбільше ідей. 3) Не можна критикувати ідею іншого учня, давати оцінку запропонованим ідеям. 4) Учні мають право розвивати ідеї інших
<p><i>Завдання</i></p>	<p>У магазині було 24 кг яблук. До обіду продали 11 кг яблук, а після обіду — 12 кг. Скільки всього кілограмів яблук продали? Скільки кілограмів яблук залишилося?</p> <p>Орися при розв'язуванні задачі міркувала так.</p> <p>Скільки до? 11 + 12 Скільки після? Скільки всього продали?</p> <p>Скільки було? 24 - Скільки залишилося? Скільки продали?</p> <p>Рис.5.2.4 Задача з підручника для 2 класу [25, с. 39]</p>
<p><i>Дидактична мета</i></p>	<p>Навчити розв'язувати задачі з двома запитаннями</p>
<p><i>Алгоритм застосування технології</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Учитель анонсує проблемне питання. 2) Визначають учня, який буде записувати ідеї на дошці. 3) Усі учасники пропонують ідеї щодо розв'язання (ідеї можуть бути фантастичні) (можна застосувати <i>Мікрофон</i>). 4) Обговорюють ідеї, аналізують групою (дозволяється вдосконалювати чужі). 5) Обирають найкраще розв'язання проблеми (задачі)

Чи можна її застосовувати на уроках математики в інших класах початкової школи?

У разі позитивної відповіді складіть свою технологічну картку.

Укажіть клас, тему, номери підручника.

Завдання 5.2.5. Розгляньте технологічну картку (табл. 5.2.5) для застосування в 3 класі технології Акваріум

Таблиця 5.2.5

Акваріум – технологія уміння вести дискусію	
Завдання для груп. Замініть складене іменоване число простим іменованим; просте іменоване число – складеним іменованим	
Завдання для групи 1	$14 \text{ міс.} = \blacksquare \text{ рік } \blacksquare \text{ міс.}$ $1 \text{ доба } 4 \text{ год} = \blacksquare \text{ год}$ $1 \text{ рік } 7 \text{ міс.} = \blacksquare \text{ міс.}$ $7 \text{ м } 5 \text{ дм} = \blacksquare \text{ дм}$ Рис.5.2.5 Задача з підручника для 3 класу [27, с. 5]
Завдання для групи 2	$5 \text{ см } 2 \text{ мм} = \blacksquare \text{ мм}$ $3 \text{ дм } 5 \text{ см} = \blacksquare \text{ см}$ $42 \text{ дм} = \blacksquare \text{ м } \blacksquare \text{ дм}$ $25 \text{ см} = \blacksquare \text{ дм } \blacksquare \text{ см}$ Рис.5.2.6 Задача з підручника для 3 класу [27, с. 5]
Завдання для групи 3	$1 \text{ тижд.} = \blacksquare \text{ діб}$ $70 \text{ с} = \blacksquare \text{ хв } \blacksquare \text{ с}$ $1 \text{ м} = \blacksquare \text{ см}$ $1 \text{ ц} = \blacksquare \text{ кг}$ Рис.5.2.7 Задача з підручника для 3 класу [27, с. 5]
Дидактична мета	Навчити переводити прості іменовані числа в складені іменовані і навпаки
Алгоритм застосування технології та правила для учнів	<ol style="list-style-type: none"> Учитель ділить учнів класу на 2-4 групи та пропонує їм завдання для виконання, надає необхідну для роботи інформацію Одна з груп (<i>рибки</i>) сідає в центрі в центрі класу, утворивши внутрішнє коло (<i>акваріум</i>), для обговорення отриманого питання, а всі інші учні розташовуються по зовнішньому колу (<i>коти</i>). Обговорення триває 3-5 хв. Правила роботи для груп <i>Рибки:</i> <ol style="list-style-type: none"> один представник групи читає вголос завдання; члени групи обговорюють завдання, шукають шляхи його розв'язання, дискутують; мають виробити спільне рішення. <i>Коти:</i> <ol style="list-style-type: none"> спостерігають за роботою <i>рибок</i>; уважно слухать і аналізують; не втручаються в обговорення і мовчать. Після закінчення виділеного часу для <i>рибок</i>, учитель задає питання <i>котам</i>: <ul style="list-style-type: none"> - Чи погоджусь Ви з рішенням (розв'язанням) цієї групи? - Чи було рішення (розв'язання) цієї групи достатньо аргументованим та доведеним? - Якщо ні, то запропонуєте своє розв'язання. Місце в акваріумі займає інша група, яка обговорює іншу проблему. В акваріумі мають побувати всі групи і результати роботи кожної з них мають бути обговорені з класом

Продовження таблиці 5.2.5.



Рис. 5.2.8 Схематичне зображення інтерактивної технології *Акваріум*

Чи можна її застосовувати в інших класах? У разі позитивної відповіді складіть свою технологічну картку. Вкажіть клас, тему, номери підручника.

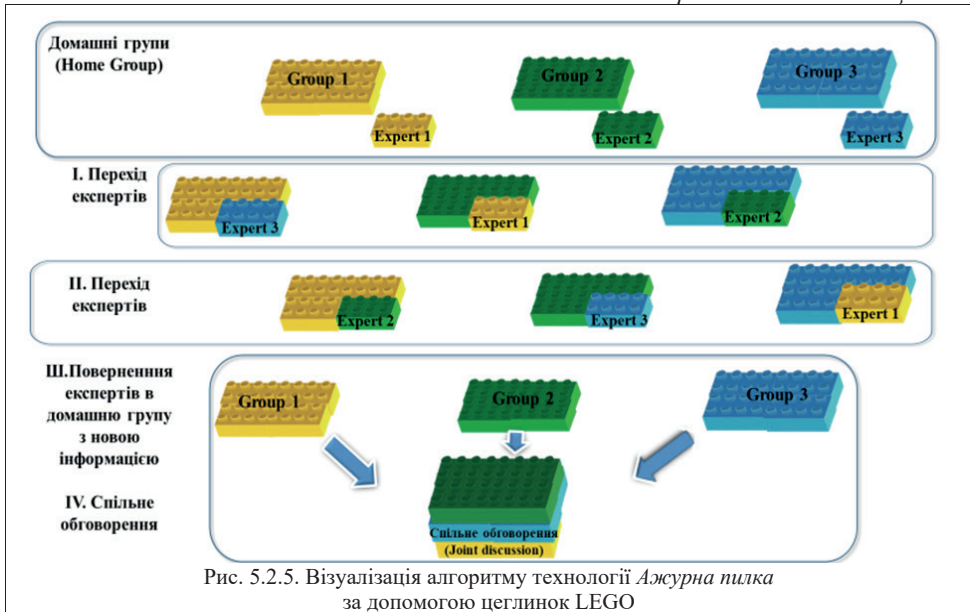
Короткі відомості

У таблиці 5.2.6 представлена інформація про технологію *Ажурна пилка* [18].

Таблиця 5.2.6

Інтерактивна технологія <i>Ажурна пилка</i> (<i>Джиг-со</i> , <i>Мозаїка</i>) – технологія, що дозволяє працювати здобувачам освіти разом для того, щоб за обмежений проміжок часу вивчити як найбільший обсяг інформації; заохочує учнів допомагати один одному в вчитися навчаючи. Під час роботи учні працюють в різних групах	
<i>Розробник технології</i>	Технологія представлена в 1971 році американським вченим, соціальним психологом професором Елліотом Аронсоном
<i>Алгоритм роботи</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Учитель ділить учнів на групи, так звані <i>домашні групи</i> (бажано однакової за кількістю учнів) 2) Спочатку учні працюють у <i>домашніх групах</i>, обирають <i>тайм-кіпера</i> (той хто слідкує за часом), опрацюють наданий вчителем матеріал, визначають <i>експерта</i>, який добре засвоїв матеріал домашньої групи і може донести цю інформацію іншим групам 3) Перший перехід <i>експертів</i>: за вказаною вчителем траєкторією <i>експерти</i> переходять в іншу групу, в якій діляться інформацією з <i>домашньої групи</i> та отримують інформацію від учнів нової групи 4) Другий перехід <i>експертів</i>: за тою ж траєкторією <i>експерти</i> переходять в іншу групу, в якій діляться інформацією, принесеною з двох попередніх груп та отримують нову інформацію від учасників третьої групи 5) Повернення <i>експертів в домашню групу</i>: <i>експерти</i> повертаються в свою початкову групу, для того, щоб поділитися новою інформацією, отриманою від учнів інших груп 6) Спільне обговорення всіх питань трьох груп, перевірка правильності отриманої інформації від <i>експертів</i>

Продовження таблиці 5.2.6



Завдання 5.2.6. Розгляньте алгоритм проведення технології *Ажурна пилка* (табл. 5.2.6), ознайомтесь алгоритм підготовчої роботи вчителя для застосування цієї технології (табл. 5.2.7).

Таблиця 5.2.7

Інтерактивна технологія <i>Ажурна пилка</i> при дослідженні задач у 4 класі	
Дидактична мета	Навчити досліджувати задачі
Алгоритм підготовчої роботи вчителя	<ol style="list-style-type: none"> 1) Продумати як поділити на групи. Варіант поділу: У класі 15 дітей. При вході до класу стоїть шкатулка з геометричними фігурами. Наприклад, 3-х кольорів (помаранчевий, синій, зелений) та 5 різних фігур. Кожен учень бере фігурку. Вчитель може вкласти свою задумку і прослідкувати, щоб три найсильніші учні взяли певну фігурку. Таким чином вже вчитель визначив експертів. 2) Поділ на групи за кольорами $15 : 3 = 5$. Отже, три групи по 5 учнів 3) Підготувати завдання та необхідну інформацію для трьох груп 4) Розв'язати підготовлені завдання, продумати аналіз задач, розподілити час на виконання кожної задачі. 5) Продумати рефлексію
Алгоритм проведення технології	За аналогією табл. 5.2.6

Продовження таблиці 5.2.5.

Завдання для груп

Складіть за коротким записом задачі та розв'яжіть їх.

Група 1

1	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	?	8	56
II	?, на 1 грн менше	9	54

2	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	?	8	56
II	?, на 1 грн менше	9	?

Група 2

3	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	?	8	56
II	?, однак	9	?

4	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	?	8	56
II	?, однак	?	63

Група 3

5	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	7	8	?
II	4	?	?, однак

6	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	7	?	56
II	4	?, однак	?

Рис.5.2.6 Задачі з підручника для 4 класу [28, с. 16]

Поміркуйте чи всі дії розписані в алгоритмі підготовчої роботи вчителя при застосування інтерактивної технології *Ажурна пилка*? Складіть власну технологічну карту. Вкажіть клас, тему і номери підручника, який використовуєте.

Завдання 5.2.7. Складіть ментальну карту за допомогою одного з е-ресурсів [Free Mind](#), [Bubbl.us](#), [Canva](#), [Mind Meister](#), [Coggle it](#) тощо з алгоритмами роботи інтерактивних технологій, які доцільно застосувати на уроках математики в початковій школі. На побічних гілках від кожного алгоритму зазначте цільове призначення відібраних технологій.

Завдання 5.2.8. Складіть алгоритм інтерактивної технології *Розігрування сюжетної задачі*. Підберіть завдання і напишіть сценарій застосування вказаної технології.

Завдання 5.2.9. Напишіть есе на тему «Як я буду застосувати інтерактивні технології на уроках математики в початковій школі». В есе обов'язково має бути: сценарій однієї з обраних технологій з підбором завдань для класу, для груп; вказати авторів підручника та номери обраних завдань.

Короткі відомості

В таблиці 5.1.10 подані короткі відомості про ігри-стратегії (Додаток В).

Таблиця 5.1.10

<i>Ігри-стратегії</i> – інтерактивна форма навчання учнів початкової школи. Гра-стратегія є ситуативною грою, складною та багатоплановою діяльністю, передбачає ігровий задум, сюжетну лінію, певну послідовність спільних дій учасників гри, з якими треба домовлятися, об'єднувати зусилля, приймати рішення та робити особистісний і колективний вибір.	
<i>Компоненти гри-стратегії</i>	задум, ігрові ролі, відповідний сюжет, ігрові дії, результат гри
Інтерактивна технологія <i>Гра- стратегія «Дерево рішень»</i>	
	Обрати проблему (задачу, приклад, які можуть розв'язуватись кількома способами). Виклад проблеми може бути різний. Для зацікавлення учнів можна використовувати: історію, ситуації з життя, можливість міжпредметної інтеграції для більшого занурення в проблему
	Запропонувати учням всю необхідну інформацію для розв'язання проблеми
	Підготувати на дошці в класі чи віртуальній інтерактивній дошці онлайн зразок "Дерева рішень"
	Сформулювати чітко проблему, суть та представити на дошці схему, яку потрібно заповнити
	Шляхи та варіанти розв'язання проблеми можна визначити проведенням "Мозкового штурму"
	Для вирішення проблеми представити додаткову інформацію
	В результаті обговорення варіантів розв'язання частину ідей відхилиємо та залишаємо дві-три
Рис. 5.2.7. Алгоритм застосування на уроці математики технології <i>Дерево рішень</i>	

Завдання 5.2.10. Розгляньте алгоритм гри-стратегії, поданий в табл. 5.1.10. Складіть сценарій гри-стратегії за планом поданим нижче на тему «Відкриваємо кав'ярню» («Будуємо годівничку») тощо. У сценарії розписати вправи та завдання.

Відкриваємо кав'ярню

Мета ...

Матеріали до заняття: атрибутика для кав'ярні, дидактичні ігри,

План

Ігрова мотивація. Ми сьогодні станемо підприємцями і спробуємо відкрити свою кав'ярню. Складемо план дій.

1. Де взяти гроші.
2. Банк, кредити, валюта. Розрахунки.
3. Приміщення. План залу. Як облаштувати.
4. Розподіл обов'язків працівників.
5. Реклама.
6. Продажі.
7. Підрахунки чи зможемо віддати кредит.

5.3. Інформаційно-комунікаційні технології

Короткі відомості

У таблиці 5.3.1 подана основна інформація про інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ), інформаційне середовище, утворення словосполучення ІКТ.

Таблиця 5.3.1.

<i>Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) (з англ. Information and communication technology, ICT)</i>	Це загальний термін, який об'єднує уніфіковані технології та інтегрує телекомунікації (телефонні лінії та бездротові з'єднання), комп'ютери, програмне забезпечення, накопичувальні та аудіовізуальні системи, що дозволяє користувачам отримувати доступ, створювати, зберігати та передавати інформацію [4]
<i>Автор терміну</i>	Словосполучення було використано в 1997 році Денісом Стівенсоном у доповіді для уряду Великої Британії, який посприяв створенню нового Навчального плану Великої Британії (2000) [4]
<i>ІКТ</i>	Сукупність методів і технічних засобів збирання, організації, зберігання, опрацювання, передавання та подання інформації, яка розширює знання людей і розвиває їх можливості щодо керування технічними й соціальними проблемами [3]
<i>Інформаційне середовище, e - середовище</i>	1) Сукупність технічних і програмних засобів зберігання, обробки та передачі інформації 2) Обсяг усієї інформації, що оточує людину та її інформаційна діяльність[4]

Завдання 5.3.1. Прочитайте короткі відомості про інформаційно-комунікаційні технології подані в табл. 5.3.1. Чи використовуються ці технології при вивченні математики в початковій школі? Пропонується вибрати та обґрунтувати одну з двох гіпотез.

Гіпотеза перша: Так, інформаційно-комунікаційні технології застосовуються при вивченні математики, тому що ... (обґрунтуйте свою думку).

Гіпотеза друга: Ні, інформаційно-комунікаційні технології не застосовуються, тому що....(обґрунтуйте свою думку).

Завдання 5.3.2. Подумайте над алгоритмом застосування інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики. Чи потрібно скласти технологічну карту?

Завдання 5.3.3. Створіть ментальну карту за допомогою одного з е-ресурсів Free Mind, Bubbl.us, Canva, Mind Meister, Coggle it тощо власного е-середовища: комп'ютер, ноутбук, смартфон, програмне забезпечення, яким користуєтесь для навчання і роботи.

Короткі відомості

У таблиці 5.3.2 подана класифікація мультимедійних ресурсів за певним підходами.

Таблиця 5.3.2.

Класифікація мультимедійних е-ресурсів	
<i>Підходи до класифікації</i>	<i>Перелік освітніх мультимедійних ресурсів</i>
<i>Інформаційні довідники, ресурси для створення формул</i>	Mathcad; Mathemstica; Maple; MATLAB;
<i>Ресурси для створення інфографіки</i>	HohliBuilder (http://charts.hohli.com/) Infogr (http://infogr.am/); GoogleCharts (https://developers.google.com/chart/)
<i>Ресурси для створення карт знань</i>	FreeMind; FreeMindMap—Freeware (http://www.edrawsoft.com/freemind.php); Xmind(http://www.xmind.net/); Realtimeboard (https://realtimeboard.com); Mapul (https://www.mapul.com/); Bubbl (https://bubbl.us/)
<i>Засоби для створення презентацій</i>	Офісний редактор (MicrosoftPowerPoint), онлайн-редактори (Prezi (http://prezi.com))
<i>Платформи для створення навчальних проєктів</i>	Thinkfree (http://www.thinkfree.com/main.jsp); Futureschool (https://www.futureschool.com/countries/); Study (https://study.com/academy/popular/free—online—high—school—math—courses.html); Formula (http://formula.co.ua/uk/games); Vchy (https://vchy.com.ua/matematika). LEARNING APPS Kahoot!
<i>Художньо-ілюстративні</i>	Мультимедійна теорія для сучасних школярів – (https://www.youtube.com/channel/UCAu_hCCOp_LvqYluOe8wolg); Pustunchik(https://pustunchik.ua/ua/online—school/math); Smarttech(http://smarttech.ru/notebook_family.html); Desmos (https://www.desmos.com/?ref=edshelf); Topmarks (https://www.topmarks.co.uk/maths—games/7—11—years/ordering—and—sequencing—numbers); <u>Futureschool</u> (https://www.futureschool.com/elearning—videos/).

Завдання 5.3.4. Створіть ментальну карту за допомогою одного з е-ресурсів Canva, Mind Meister, Coggle it тощо мультимедійних засобів, яким користуєтесь в процесі навчання. На побічних гілках вкажіть переваги цих ресурсів.

Завдання 5.3.5. Доповніть таблицю 5.3.2 новітніми е-ресурсами, мультимедійними засобами, які доцільно застосовувати на уроках математики в початковій школі.

Короткі відомості

В таблиці 5.3.3. подана інформація про веб-квести [20].

Таблиця 5.3.3.

<p>Веб-квест (англ. Webquest)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) формат навчального заняття (уроку), орієнтованого на пошук необхідної інформації в Інтернеті 2) технологія, яка об'єднує інтерактивне навчання та ІКТ: спонукає учнів знаходити інформацію в Інтернеті, перевіряти її та ефективно використовувати з навчальною метою, що сприяє розвитку критичного мислення здобувачів освіти; викладач має можливість поділити учнів на групи застосовуючи інтерактивні технології навчання 3) інші означення в Додатку В
<p>Розробник</p>	<p>викладач Університету з Сан-Дієго <i>Берні Додж</i> (Bernie Dodge) у 1995 році запропонував модель заняття у вигляді веб-квесту, модель поширилась по всьому світу. Особливо популярна у Бразилії, Іспанії, Китаї, Австралії та Голландії</p>

Основні елементи веб-квесту

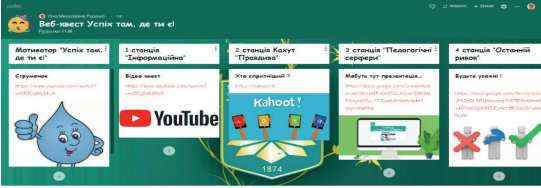



Рис. 5.3.1. Структура веб-квесту

<p>Місце організації (проведення) веб-квесту</p>	<p>Віртуальні інтерактивні дошки Educreations; Lino it; Padlet; Rizzoma; Popplet та ін. (див. Електронні помічники до теми 4)</p>
--	---

Завдання 5.3.6. Створіть веб-квест для учнів 1 класу за допомогою шаблону сценарію табл. 5.3.4.

Таблиця 5.3.4

Матеріали обладнання:	та комп'ютер, мультимедійна презентація, картки, завдання, відео, гул форми, Kahoot! (тощо), інтерактивна онлайн дошка Padlet (Miro або інша)								
Назва	Весняні свята (назва тижня)								
Вступ	Налаштування на творчу роботу, представлення героїв (Незнайко, Пізнайко тощо) легенда пошуку (пошуки подарунка до свят тощо), представлення станцій веб-квесту на обраній інтерактивній дошці за зразком (рис. 5.3.2)								
									
	Рис.5.3.2. Представлення станцій на дошці Padlet								
Станція 1 «Транспортна» (на якому транспорті будемо шукати подарунок до свята)	<p>Підібрати приклади на обчислення рис. 5.3.3 і зашифрувати слово (наприклад трамвай)</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>$67 - 23$</td> <td>$62 + 36$</td> <td>$45 - 24$</td> <td>$43 + 5$</td> </tr> <tr> <td>$17 + 22$</td> <td>$99 - 67$</td> <td>$74 + 23$</td> <td>$77 - 16$</td> </tr> </table> <p>Рис 5.3.3 Зразок прикладів на обчислення [1 кл., ст.141] Надати учням посилання, де можна знайти інформацію про історію появи трамваїв у місті Києві (чи зручний цей транспорт, чи екологічний)</p>	$67 - 23$	$62 + 36$	$45 - 24$	$43 + 5$	$17 + 22$	$99 - 67$	$74 + 23$	$77 - 16$
$67 - 23$	$62 + 36$	$45 - 24$	$43 + 5$						
$17 + 22$	$99 - 67$	$74 + 23$	$77 - 16$						
Станція 2 «Геометрична» (вивчаємо маршрут, рух трамваю)	<p>Пряма, паралельні прямі (рейки трамваю), ламані лінії Створити гру в Kahoot! (за бажанням можна використати інший ресурс)</p>								
Станція 3 «Календар весняних свят» (які подарунки можна знати до світ)	<p>«День театру» 27 березня «Великдень» (святя можна додати). До кожного свята підібрати інформацію, щоб надати її учням і математичні вправи, задачі. Приготувати шаблони для розмалювання геометричними лініями писанки (рис. 5.3.4) – одного з атрибутів Великодня</p> <div style="text-align: right;">  </div> <p style="text-align: right;">Рис. 5.3.4. Писанка</p>								
Станція 4 Музична	<p>Сім нот. За кожною нотою закріпити приклад на обчислення або порівняння числових виразів рис. 5.3.5.</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>$56 + 10$</td> <td>$40 + 30$</td> </tr> <tr> <td>$80 - 1$</td> <td>$70 + 9$</td> </tr> <tr> <td>$36 + 12$</td> <td>$75 - 34$</td> </tr> </table> <p>Рис. 5.3.5. Зразок прикладів на порівняння [24 кл., ст.142] Розв'язують правильно – отримують бал і співають пісню (приготовлену вчителем за посиланням); не правильно – співають дві пісні.</p>	$56 + 10$	$40 + 30$	$80 - 1$	$70 + 9$	$36 + 12$	$75 - 34$		
$56 + 10$	$40 + 30$								
$80 - 1$	$70 + 9$								
$36 + 12$	$75 - 34$								
Рефлексія									

Завдання 5.3.7. Створіть веб-квест для учнів 2 класу за допомогою шаблону сценарію (табл. 5.3.5) на тему *Досліджуємо задачі*.

Таблиця 5.3.5

Матеріали та обладнання:	Комп'ютер, мультимедійна презентація, картки, завдання, відео, гул форми, Kahoot! (тощо), інтерактивна онлайн дошка Padlet (Miro або інша)
Назва	<i>Досліджуємо задачі</i>
Вступ	Налаштування на творчу роботу, представлення героїв, легенда пошуку (пошуки подарунка до свят тощо), представлення станцій веб-квесту на обраній інтерактивній дошці
Станція 1 «Пташина»	<p>В Антарктиці мешкають птахи: альбатрос і поморник. На скелях сиділо 8 альбатросів, а поморників — на 3 більше. Скільки поморників стало після того, як ще 5 прилетіли?</p> <p>Рис. 5.3.6. Зразок задач [25, ст.57]</p> <p>Розв'язати задачі надані вчителем, знайти і Інтернеті інформацію про птахів, які згадані в задачі</p>
Станція 2 Географічна	Прокласти маршрут до Антарктиди
Станція 3 Мешканці морів та океанів	<p>1) Довжина голови китової акули 2 м, а тулуба — на 9 м довше. Яка довжина всього тіла акули?</p> <p>2) Тигрову акулу супроводжувало 12 рибко-лоцманів. 6 із них змінили маршрут і попливли геть. Скільки рибко залишилося з акулою?</p> <p>3) Під коралами ховалося 14 крабів. На полювання вилізло 6 крабів, а залізло під корали 4 інші краби. Скільки крабів стало під коралами?</p> <p>Рис. 5.3.7. Зразок задач [25, ст.59]</p> <p>Розв'язати задачі надані вчителем, знайти і Інтернеті інформацію про мешканців морів та океанів</p>
Станція 4


На прикладі цього веб-квесту створіть інтеграцію предмету «Математика» з «Я досліджую світ».

Завдання 5.3.8. Створіть веб-квест для учнів 3 класу за допомогою шаблону сценарію табл. 5.3.6.

Таблиця 5.3.6

Матеріали та обладнання:	комп'ютер, мультимедійна презентація, картки, завдання, відео, гул форми, Kahoot!(інш.), інтерактивна онлайн дошка Padlet (Miro або інша) .
Назва	Шопінг
Вступ	Налаштування на творчу роботу, представлення героїв, легенда пошуку (закупки по господарству), представлення станцій веб-квесту на обраній інтерактивній дошці, бесіда про гроші

Продовження таблиці 5.3.6

Станція 1 квітова	<p>У квітковому магазині зробили кілька букетів, у кожному з яких 3 гербери і 2 троянди. Скільки коштують 4 такі букети, якщо ціна гербери — 20 грн, а ціна троянди — 30 грн?</p> <p>Рис. 5.3.8. Зразок задач [26, ст.89] Розв'язати задачі надані вчителем, знайти і Інтернеті інформацію про квіти згадані в умові</p>
Станція 2	<p>У магазині склали однакові набори посуду. Для 3 наборів узяли 15 великих тарілок і 6 маленьких. Скільки всього тарілок у кожному наборі?</p> <p>Рис. 5.3.9. Зразок задач [26, ст. 90] Розв'язати задачі надані вчителем, знайти і Інтернеті інформацію про порцеляну і фаянс – видів кераміки, з якої виготовляють посуд. З'ясувати різницю</p>
Станція 3	 <p>На терезах розміщено 8 однакових пакетів крупи і 6 однакових пакетів цукру. Терези перебувають у рівновазі. Яка маса пакета крупи, якщо маса пакета цукру 4 кг?</p> <p>Рис. 5.3.10. Зразок задач [26, ст. 96] Розв'язати задачі надані вчителем, знайти в Інтернеті інформацію про цукор (простий цукор, фруктоза, сахароза) та користь і шкоду для здоров'я людини</p>
Станція 4

Завдання 5.3.9. Складіть алгоритм роботи вчителя під час приготування веб-квесту. Створіть веб-квест для учнів 4 класу за допомогою шаблону (табл. 5.3.7.). Тему та завдання оберіть самостійно за підручником Математика.

Таблиця 5.3.7

Матеріали та обладнання:	комп'ютер, мультимедійна презентація, картки, завдання, відео, гул форми, Kahoot!(ін.), інтерактивна онлайн дошка Padlet (Miro або інша) .
Назва	На вибір студента
Вступ	
Станція 1	
Станція 2	
Станція 3	
Станція 4	
Станція 5	

5.4 Технологія організації диференційованого навчання

Короткі відомості

В таблиці 5.4.1 представлено короткі відомості про технологію диференційованого навчання [31].

Таблиця 5.4.1

Диференціація – з лат. <i>differentia</i> різниця, відмінність	Термін означає поділ на окремі різнірідні елементи, розчленування
<i>Науковці, які вивчали проблему диференціації</i>	
К.Ушинський (1823-1871)	Ідея полягала в тому, що поділ класу на групи, з якої одна сильніша за іншу, корисний за умови, якщо вчитель, працюючи з однією групою учнів, може дати сильніший групі самостійну вправу
В.Сухомлинський	Диференційований підхід – найефективніша форма індивідуалізації навчання і його необхідно впроваджувати
О.Савченко, С.Логачевська, О.Онопрієнко, С.Скворцова	Сучасні українські науковці, які в своїх працях для початкової школи, зокрема і математики, розглядають проблему диференціації, оскільки одним із основних завдань визначених Державним стандартом початкової загальної освіти є орієнтація навчально-виховного процесу на особистість здобувача освіти та його розвиток. Диференційований підхід має бути обов'язковим принципом функціонування початкової освіти, оскільки його застосування в сучасній школі сприяє формуванню творчої особистості
<i>Рівні диференціації повної середньої освіти</i>	
За структурою системи освіти	Загальноосвітні школи, вищі навчальні заклади I, II рівнів акредитації тощо
За змістом навчання	Масове, поглиблене, профільне різних спрямувань
За формою організації навчального процесу	Зовнішня – профільна, внутрішня – рівнева
<i>Зовнішня диференціація</i> впроваджується в ліцєях, гімназіях, закладах освіти, що мають статус експериментального майданчика	Вимагає утворення класів високого інтелектуального розвитку, вікових норм, підвищеної педагогічної уваги, а це передбачає диференціацію навчальних програм та всього навчально-методичного забезпечення, підготовки вчителів до роботи в нових умовах
<i>Внутрішня диференціація</i>	Застосовується в умовах одночасного навчання в класі дітей з різним рівнем навчальних можливостей. Обов'язковою умовою такої диференціації є створення динамічних навчальних груп з урахуванням пізнавальних можливостей учнів та з використанням різних прийомів організації навчальної діяльності: за ступенем складності, за ступенем самостійності, за обсягом

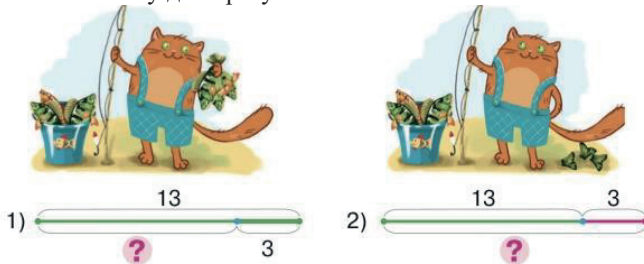
Продовження таблиця 5.4.1.

Диференціація за ступенем складності	Потребує застосування певних завдань: Потребують різної ґрунтовності узагальнення та висновків Розраховані на різний рівень роботи, що виконується Репродуктивного і творчого змісту
Диференціація за ступенем самостійності	Передбачає застосування завдань однакової складності, але з різною мірою допомоги вчителя кожній групі учнів: - для учнів з високим навчальним можливостями ставиться лише мета, а способи її досягнення вони відшукують самостійно; - для учнів з середніми навчальними можливостями пропонується невелика допомога: вказівка на спосіб розв'язання, зразок, схема. Малюнок тощо - учням з низькими навчальними можливостями надається найбільше інформації і приділяється найбільше часу
Диференціація за обсягом	Передбачає завдання однакового змісту, але відрізняється обсягом завдань або часом для його виконання

Завдання 5.4.1. Розгляньте диференційовану самостійну роботу для учнів 2 класу на тему «Узагальнюємо знання про арифметичні дії додавання та віднімання»

І рівень

1. Добери малюнок і схему до виразу: $13 - 3$



2. Запиши вираз до іншої схеми та обчисли вираз.

3. Знайди невідомі компоненти арифметичних дій і встанови відповідність між виразом і невідомою компонентою:

1	$8 - \square = 3$
2	$\square + 3 = 7$
3	$13 - \square = 6$
4	$17 + \square = 20$

А	7
Б	3
В	5
Г	4
Д	2

II рівень

4. Знайди значення виразів:

$15 + 0$	$100 - 1$
$89 + 1$	$30 + 7$
$80 - 50$	$45 - 5$
$10 + 6$	$60 + 20$

5. Розв'яжи задачу.

Порося з'їло 36 жолудів, а каштанів на 3 більше. Скільки каштанів з'їло поросля?

III рівень

6. До кожної задачі добери опорну схему з поданих нижче і розв'яжи кожну задачу.

1) У Сашка 6 карамельок і 3 шоколадні цукерки. Скільки всього цукерок у Сашка?

2) У Сашка всього 9 цукерок — карамельок і шоколадних. Скільки в Сашка карамельок, якщо шоколадних цукерок у нього 3?



3) У Сашка всього 9 цукерок — карамельок і шоколадних. Скільки в Сашка шоколадних цукерок, якщо карамельок у нього 6?



Дайте назви до кожного рівня. Назвіть вид диференціації цієї роботи.

Завдання 5.4.2. Розгляньте, фрагмент самостійної роботи для 4 класу. Проаналізуйте та розв'яжіть складені задачі, подані нижче.

1. Родина баби Наталки виростила, збирала та здала в аптеку лікарські трави. Вербени – 6 кг 100 г, чебрецю на 1 кг 300 г менше, ніж вербени, а м'яти на 5 кг 500 г більше, ніж вербени та чебрецю разом. Скільки кілограмів м'яти здала в аптеку родина баби Наталки?

2. Родина баби Наталки виростила, збирала та здала в аптеку лікарські трави. Вербени – 6 кг 100 г, чебрецю на 1 кг 300 г менше, ніж вербени, а м'яти на 5 кг 500 г більше, ніж вербени та чебрецю разом. Скільки кілограмів лікарських трав здала в аптеку родина баби Наталки?

3. Родина баби Наталки виростила, збирала та здала в аптеку лікарські трави. Вербени – 6 кг 100 г, чебрецю на 1 кг 300 г менше, ніж вербени, а м'яти на 5 кг 500 г більше, ніж вербени та чебрецю разом. В аптеці усі лікарські трави розфасували в коробки по 100 г у кожну. Скільки коробок лікарських трав було підготовлено для продажу?

Чи є в цьому фрагменті самостійної роботи диференціація? В разі ствердної відповіді скажіть її вид та розділіть задачі по рівнях диференціації.

Завдання 5.4.3. Оберіть вид диференціації та складіть диференційовану самостійну роботу для учнів 3 класу.

5.5. Технологія проєктування

Короткі відомості

У таблиці 5.5.1 подані відомості про проєктну технологію, етапи роботи над проєктом.

Таблиця 5.5.1

Проектна технологія	освітня технологія, один із найефективніших засобів формування в здобувачів освіти компетентностей, оскільки передбачає динамічність організації навчального процесу, при якому учні через дослідження проблеми отримують більш глибокі знання.
Мета проєктного навчання	позитивно впливати на підвищення особистої впевненості кожного учасника проєкту; удосконалювати комунікативні компетентності; розвивати критичне мислення учнів; формувати та розвивати уміння пошуку шляхів розв'язання задач (проблеми); розвивати дослідницькі уміння, спостережливість, планувати, розвивати гіпотези, аналізувати отримані результати, робити висновки
Завдання проєктної технології	навчити учнів здобувати знання самостійно, а потім уміти їх застосувати розв'язання нових практичних задач (завдань); позитивно впливати на розвиток комунікативних навичок учнів, навчити працювати у різних групах в різних соціальних ролях (лідера, виконавця тощо); розширити «зону комфорту» учнів: коло спілкування, коло інтересів тощо надихнути на дослідження: збирати інформацію з різних джерел, перевіряти та проаналізувати її, робити висновки
Етапи проєкту	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Організація проєкту.</i> Виявлення кола інтересів, пошук напрямів діяльності 2. <i>Вибір теми.</i> Формулювання теми 3. <i>Планування проєкту.</i> Складання плану проєкту. Визначення критеріїв оцінювання роботи 4. <i>Реалізація проєкту.</i> Пошук інформації Виготовлення спільного продукту 5. <i>Підсумок проєкту.</i> Презентація та захист

Завдання 5.5.1. Створіть план-конспект проєкту для 1 класу за зразком в Додатку Д.

Завдання 5.5.2. Створіть план-конспект проєкту для 2 класу.

Завдання 5.5.3. Створіть план-конспект проєкту для 3 класу.

Завдання 5.5.4. Створіть план-конспект проєкту для 4 класу.

Питання для самоперевірки до теми 5

1. Сутність *ігрового навчання*.
2. Що таке *дидактична гра*?
3. *Шість цеглинок* – це...
4. Що таке *гра-завдання* (гра-вправа)?
5. Які основні *терміни* словника LEGO?
6. Назвіть кілька вправ, які легко застосувати при навчанні учнів нумерації чисел першого десятка.
7. Назвіть кілька вправ, які легко застосувати при навчанні учнів нумерації чисел в межах сотні.
8. Назвіть кілька вправ, які легко застосувати при навчанні учнів розв'язуванню простих задач.
9. Дайте означення терміну *квест*.
10. Що таке *навчальний квест*?
11. Назвіть види *квестів*?
12. *Квест-технологія* – це...
13. Дайте означення терміну *інтерактивні технології навчання*.
14. Класифікація інтерактивних технологій за О.Пометун та Л.Пироженко.
15. Сформулюйте алгоритм роботи з технологією *Мікрофон*.
16. Назвіть основні етапи роботи з технологією *Робота в парах*.
17. Сформулюйте алгоритм роботи з технологією *Мозковий штурм*.
18. Назвіть основні етапи роботи з технологією *Акваріум*.
19. Сформулюйте алгоритм роботи з технологією *Ажурна пилка*.
20. Що таке *гра стратегія*?
21. Дайте означення *інформаційно-комунікаційним технологіям*?
22. Які основні е-ресурси використовує вчитель початкової школи на уроках математики?
23. Чим відрізняється *веб-квест* від звичайного квесту?
24. Що таке *диференціація*?
25. Які бувають *види диференціації*?
26. Що називають *зовнішньою диференціацією*?
27. *Внутрішня диференціація* та її види.
28. *Проектна технологія* – це...

Електронні помічники до теми 5

У навчанні учнів початкової школи популярними зараз стали комікси. Їх використовують з навчальною метою на різних предметах, зокрема і математиці.

Комікс – це колаборація сюжетної текстової частини та візуального зображення (картинки), що розміщені в хронологічному порядку, з метою передачі певного змісту.

Комікси універсальні, з навчальною метою (як навчальну технологію) їх можна застосувати на різних предметах (мові, літературі, математиці тощо). У таблиці 5.5.2 наведено позицію зарубіжних та українських науковців, щодо застосування коміксів в освітньому процесі.

Таблиця 5.5.2.

Науковець	Наукова позиція
H. Yii Phoon, R. Roslan, D. Seelow, M. Shahrill, H. Said	Комікси являють собою якісну подачу навчального матеріалу, оскільки формат коміксів дозволяє змістовно передати великі обсяги інформації завдяки ілюстраціям та відпадає потреба в детальних описах, що робить читання зрозумілішим [33]
Stephen C., автор книги «Going Graphic: Comics at Work.»	Комікси надають особливі можливості вивчення предмету для всіх учнів, оскільки лімітований текст та графіка з цікавим сюжетом у коміксах робить їх зрозумілими для учнів початкової школи [35]
О. Онопрієнко, С. Скворцова	Навчальну інформацію у вигляді коміксів варто подавати не в 1-2 а в 3-4, оскільки учні 6-7 років демонструють труднощі при сприйманні на інтерпретації сюжетних особливо серійних картин (коміксів) [30, с. 10-11]

Для створення коміксів використовують *e-ресурси* – це онлайн ресурси, створені безпосередньо для розробки коміксів та мають потужний інструментарій: робоче місце, достатня кількість готових шаблонів фону та сцен, бібліотеку персонажів, предмети та атрибути, які необхідні для створення коміксу.

У таблиці 5.2.3 подані деякі інтернет ресурси для створення коміксів та короткий їх опис.

Таблиця 5.2.3.

№	Ресурс для створення коміксів	Коротка анотація до ресурсу
1.	Comic Master (http://www.comicmaster.org.uk/)	Зручний флеш-сайт, за допомогою якого легко створювати власних героїв коміксу, оригінальні історії для них. Ресурс має простий алгоритм застосування від початку створення коміксу до готового результату
2.	Pixton (https://www.pixton.com/)	Е-ресурс використовує метод drag-and-drop (тягни-та-кидай), який дозволяє перетягувати готові шаблони та створювати комікси незалежно від наявності художніх здібностей у користувача. Необхідно зареєструватися в Pixton і це надає можливість обмінювати коміксами з іншими користувачами
3.	Storyboardthat (https://www.storyboardthat.com/)	Е-ресурс має спрощену безкоштовну версію та платну розширену преміум-версію. Можливості ресурсу дозволять всім учасникам різних рівнів майстерності створювати візуальні ефекти в своїх шедеврах. Платформа дозволяє вчителям створювати матеріали уроки для свої учнів

Продовження таблиця 5.2.3.

4.	MakeBeliefsComix (http://www.makebeliefscomix.com/Comix/)	Безкоштовний ресурс, який надає можливість створювати та використовувати безліч персонажів (героїв коміксу), шаблонів, підказок для створення власних коміксів. Придатний для роботи як учителя так і учня, оскільки простий у використанні. Є обмеження по використанню вибору кольору: фон можна змінювати, а символи залишаються чорно-білими
5.	Write Comics (http://writecomics.com/)	Простий сайт без реєстрації та заповнення різних форм. Необхідно зайти в систему, вибрати з меню фон та персонажів та легко створювати власний комікс. Під час роботи є вбудовані підказки, що полегшують роботу над коміксом
6.	Witty Comics (http://www.wittycomics.com/)	Зручний ресурс для вчителів та учнів. Сервіс дозволяє відображати діалоги між персонажами. Для цього необхідно вибрати попередньо створену сценку, своїх персонажів і додати до неї текст

Ми провели невелике дослідження серед здобувачів першого (бакалаврського) та другого (магістерського) рівнів освіти Факультету педагогічної освіти Київського столичного університету імені Бориса Грінченка з метою з'ясування сучасного стану створення навчальних коміксів за допомогою е-ресурсів (понад 150 респондентів). Статистика показала, що 98 відсотків респондентів вважають доцільним використання коміксів в початковій школі, зокрема на уроках математики (98%). На запитання з якого дидактичною метою варто застосувати комікси респонденти обрали таку відповіді: ознайомити з важкою темою (задачею, завданням) (84%); моделювати життєві ситуації (72%). Із запропонованого списку е ресурсів студенти обрали ті, які використовують для створення коміксів. Розподіл представлено на рис. 5.5.1.



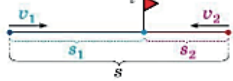

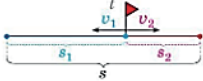


Рис. 5.5.1 Статистичні дані використання е-ресурсів для створення коміксів

У таблиці 5.5.4. представлено алгоритм створення коміксу в одному е-ресурсі (довільному).

Таблиця 5.5.4

1. Вибір е-ресурсу	За одним посилань з табл. 5.2.3. запустіть програмне забезпечення на комп'ютері або смартфоні, зареєструйтеся за допомогою електронної пошти або облікового запису
2. Пошук шаблону	Перегляньте доступні в е-ресурсі шаблони коміксів, виберіть той, який відповідає темі вашого коміксу, натисніть на нього і починайте роботу з дизайном
3. Експериментування з функціями е-ресурсу	У кожному шаблоні є сторінки з наповненням та без нього, хмари з текстом та сторінки з наборами ілюстрацій. Потрібні елементи можна перетягувати на свій дизайн коміксу. Є можливість працювати над дизайном з друзями
4. Створити авторський комікс	У авторському коміксі можна продемонструвати свою творчість, налаштувавши кольорову палітру та стиль шрифту, створити свій макет, переставляти хмари з текстом, додати власні зображення
5. Публікація	Закінчений комікс можна роздрукувати або опублікувати в одній з соціальних мереж (Facebook, Instagram тощо)

На рис. 5.5.2 наведено приклади навчальних коміксів створених на основі задач на рух [28, 29].

Умова	Комікс
<p>1) Два учні, які стояли в протилежних кінцях класної кімнати, рушили одночасно назустріч один одному, зустрілись і зупинилися.</p> 	
<p>2) Два учні, які стояли в одному місці класної кімнати, рушили одночасно в протилежні боки й зупинилися за сигналом.</p> 	
<p>3) Від двох пристаней, відстань між якими 116 км, одночасно назустріч один одному відійшли два човни й зустрілися за 4 год. Швидкість руху одного із човнів – 15 км/год. Знайдіть швидкість руху іншого човна</p>	

Тестові завдання до другого блоку

У завданнях 1- 25 оберіть одну правильну відповідь.

1. Педагогічна технологія – це...

А)	комплекс технічних засобів і навчальних матеріалів, задіяні у навчально-виховному процесі
Б)	педагогічна система, яка використовує засоби, прийоми навчання з метою підвищення ефективності навчального процесу
В)	процес або спосіб виконання певного визначеного завдання для навчального процесу
Г)	процес, під час якого вчитель передає знання учням

2. Головною метою розвивального навчання є

А)	розвиток умінь та навичок учнів
Б)	навчити учня читати, писати, лічити
В)	забезпечити всебічний розвиток учня
Г)	виховання школярів

3) Особистісно-орієнтоване навчання .

А)	формує внутрішню пізнавальну діяльність учня
Б)	передбачає моделювання навчального дидактичного матеріалу
В)	навчання, центром якого є особистість здобувача освіти
Г)	формує духовний світ учня

4) Основоположником групової форми навчальної діяльності є ...

А)	Жан-Жак Руссо
Б)	Ян Амос Коменський
В)	Костянтин Дмитрович Ушинський
Г)	Василь Олександрович Сухомлинський

5) Навчальний проєкт

А)	практика особистісно орієнтованого навчання в процесі конкретної праці учня на основі його вільного вибору, з урахуванням його інтересів
Б)	розглядає учня як життєве явище, а не педагогічне, вбачаючи в ньому особистість, що активно розвивається
В)	процес формування в здобувача освіти конкретних здібностей
Г)	процес формування в учня організаторських здібностей

6) Документ, в якому визначено стратегічні реформування освіти в Україні – ...

А)	Закон України про загальні середню освіту
Б)	Державна національна програма «Освіта (Україна ХХІ століття)»
В)	Державний стандарт початкової освіти
Г)	Конституція України

7) Предметом теорії навчання (дидактики) є ...

А)	процес навчання
Б)	процес пізнання
В)	здобувачі освіти
Г)	діяльність вчителя

8) Основною формою навчання математики в сучасній початковій школі є ...

А)	домашня навчальна робота
Б)	навчально-виховний процес
В)	урок
Г)	заняття з репетитором

9) Документ, який визначає зміст та обсяг знань учнів початкової школи з математики, – ...

А)	документи Міністерства освіти
Б)	навчальна програма
В)	підручники початкової школи
Г)	методичні вказівки

10) Актуалізація – це ...

А)	один із дидактичних принципів зв'язку шкільної науки з життям
Б)	удосконалення методів і організаційних форм навчально-пізнавальної діяльності
В)	здатність людини до свідомої трудової і соціальної діяльності
Г)	активна життєва позиція людини, що виявляється в її принциповості та умінні відстоювати свої погляди

11) Аналіз уроку – це

А)	процес дослідження розумових здібностей учня
Б)	один із способів опитування учнів
В)	розгляд та оцінювання навчального заняття в цілому (або окремих його етапів)
Г)	розгляд та аналіз діяльності вчителя на уроці

12) Функції групової навчальної діяльності: ...

А)	мотиваційна
Б)	навчальна, виховна
В)	розвивальна, організаційна
Г)	мотиваційна, навчальна, виховна, розвивальна, організаційна

13) Ефективність групової навчальної діяльності полягає в

А)	ретельній побудові структури уроку
Б)	організації навчально-виховної роботи серед учнів
В)	вихованні
Г)	однозначно відповісти не можна

14) Технологія групової діяльності передбачає

А)	навчити учнів співпрацювати для виконання завдань
Б)	стимулювати моральні переживання взаємного навчання, умінню радіти успіху своїх однокласників
В)	формувати комунікативні уміння учнів початкової школи
Г)	усі відповіді подані в пунктах а)-в)

15) Особистість креативна, якщо вона

А)	має внутрішні передумови, що забезпечують її творчу активність
Б)	володіє свідомістю та самосвідомістю
В)	є діячем суспільного розвитку
Г)	є соціальною

16) Ознаками технології навчання є

А)	діагностичне цілепокладання та результативність
Б)	алгоритмізованість і проєктованість
В)	цілісність, керованість та коригованість
Г)	усі відповіді подані в пунктах А)-В)

17) Інформаційно-комунікаційні технології це ...

А)	особистісно орієнтований підхід до процесу навчання та виховання
Б)	сукупність методів та технічних засобів організації навчання,
В)	цілеспрямована діяльність вчителя та учня
Г)	сукупність методів і технічних засобів збирання, організації, зберігання, опрацювання, передавання та подання інформації, яка розширює знання людей і розвиває їх можливості щодо керування технічними й соціальними проблемами

18) Методика навчання математики в початковій школі це – ...

А)	наука про математику як навчальний предмет і закономірності процесу навчання математики учнів початкової школи
Б)	специфічні об'єкти дослідження, зумовлені як особливостями самого предмета, так і шляхами оволодіння ним
В)	технологія навчання математики
Г)	наука, яка об'єднує алгебру, геометрію і фізику

19) Для якої технології характерними такі особливості: використання проблемних методів, створення проблемних ситуацій на всіх етапах навчання?

А)	Диференційованого навчання
Б)	Проблемного навчання
В)	Творчого навчання
Г)	Сугестивного навчання

20) Для якої технології характерно ознакою є психологічна підтримка розвитку особистості здобувача освіти?

А)	Диференційованого навчання
Б)	Розвивального навчання
В)	Створення ситуації успіху
Г)	Проблемного навчання

21) Технологія організації диференційованого навчання дозволяє ...

А)	створити умови пошукової діяльності учнів на уроках математики
Б)	створити умови для включення учнів початкової школи в навчальну діяльність відповідно до актуальної готовності та зони найближчого їхнього розвитку
В)	здійснити самоперевірку виконаної роботи
Г)	здійснювати психологічну підтримку учнів

22) Завданням «Методики навчання математики» є ...

А)	розвивати та виховувати здобувачів освіти в процесі навчання математики
Б)	дати відповіді на такі питання: навіщо навчати математики (мета навчання), що потрібно вивчити (зміст навчання), як результативно потрібно навчати математики (використання сучасних навчальних технологій), як розвивати та виховувати в процесі навчання математики
В)	навчати рахувати, розв'язувати текстові задачі
Г)	розпізнавати геометричні фігури

23) Технологія організації навчальної проектної діяльності ...

А)	орієнтована на самостійну пошукову та творчу роботу учнів (індивідуальну або групову), з метою навчання учнів всебічно пізнавати об'єкт дослідження, здобувати нові знання, застосувати їх для розв'язання навчальних проблем
Б)	дозволяє створити нові умови для включення учнів початкової школи у навчальну діяльність відповідно до актуальної готовності та зони найближчого розвитку
В)	дозволяє здійснити самоперевірку виконаної роботи
Г)	здійснювати психологічну підтримку учнів

24) Ігрова навчальна технологія ...

А)	має мотиваційну, пізнавальну та виховну значущість, ґрунтується на залученні учнів початкової школи до різних видів дидактичних ігор у процесі вивчення предметів базового навчального плану
Б)	орієнтована на самостійну пошукову та творчу роботу учнів (індивідуальну або групову), з метою навчання учнів всебічно

	пізнавати об'єкт дослідження, здобувати нові знання, застосувати їх для розв'язання навчальних проблем
В)	дозволяє створити нові умови для включення учнів початкової школи у навчальну діяльність відповідно до актуальної готовності та зони найближчого розвитку
Г)	здійснювати психологічну підтримку учнів

25) Веб-квест – це ...

А)	формат навчального заняття (уроку), орієнтованого на пошук необхідної інформації в Інтернеті
Б)	технологія, яка об'єднує інтерактивне навчання та ІКТ: спонукає учнів знаходити інформацію в Інтернеті, перевіряти її та ефективно використовувати з навчальною метою, що сприяє розвитку критичного мислення здобувачів освіти; викладач має можливість поділити учнів на групи застосовуючи інтерактивні технології навчання
В)	комп'ютерна гра
Г)	відповіді А і Б правильні

Список використаних джерел до другого блоку

1. Державний стандарт початкової освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 21.02.2018 №87. URL: <https://cutt.ly/3YXp4Sx>
2. Дичківська, І.М. Інноваційні педагогічні технології [Текст] : навчальний посібник / І. М. Дичківська. – К. : Академвидав, 2004. – 352с. – С.56 - 72, 75 - 79.
3. Дишлева С. В. Методика і технологія : Інформаційно — комунікаційні технології та їх роль в освітньому процесі // [Електронний ресурс] Режим доступу: <http://osvita.ua/school/technol/6804> (Дата звернення 17.03.2018).
4. Інформаційне середовище. *Вікіпедія: вільна енциклопедія*. URL: <https://cutt.ly/XgOvq0S> (дата звернення: 26.10.2023).
5. Інформаційно–комунікаційні технології. *Вікіпедія: вільна енциклопедія*. <http://surl.li/xfth>
6. Кравчук, А., Руденко, Н., Широков, Д. Модулювання уроку математики в початковій школі з використанням карт знань. *Молодий вчений*. 2021. №6 (94), С. 179–183. DOI: <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2021-6-94-35>.
7. Логачевська С.П. Математика : підручник для 1 класу закладів загальної середньої освіти / С. П. Логачевська, Т. А. Логачевська, О. А. Комар. – Київ, Літера ЛТД, 2018. – 128 с.
8. Логачевська С.П. Математика : підручник для 2 класу закладів загальної середньої освіти / С. П. Логачевська, Т. А. Логачевська, О. А. Комар. – Київ, Літера ЛТД, 2019. – 128 с.
9. Логачевська С.П. Математика : підручник для 3 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах) : Ч. 1 / С. П. Логачевська, Т. А. Логачевська, О. А. Комар. – Київ, Літера ЛТД, 2020. – 112 с.
10. Логачевська С.П. Математика : підручник для 3 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах) : Ч. 2 / С. П. Логачевська, Т. А. Логачевська, О. А. Комар. – Київ, Літера ЛТД, 2020. – 112 с.
11. Логачевська С.П. Математика : підручник для 4 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах) : Ч. 1 / С. П. Логачевська, Т. А. Логачевська, О. А. Комар. – Київ, Літера ЛТД, 2021. – 112 с.
12. Логачевська С.П. Математика : підручник для 4 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах) : Ч. 2 / С. П. Логачевська, Т. А. Логачевська, О. А. Комар. – Київ, Літера ЛТД, 2021. – 112 с.
13. Пометун О. І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: наук.-метод. посіб. / О. І. Пометун, Л. В. Пироженко. – Київ: Вид-во А.С.К., 2004. – 192 с.
14. Рома О. Гра по-новому, навчання по-іншому. Методичний посібник. [Електронний ресурс] / Оксана Рома // The LEGO Foundation. – 2018. – Режим доступу : <https://mon.gov.ua/storage/app/media/nova-ukrainska-shkola/LEGO/po-nov-navchannya-po-inshomu.pdf>. – Назва з екрану.
15. Рома О. ШІСТЬ ЦЕГЛИНОК в освітньому просторі школи. Методичний посібник / Упорядник О.Рома – The LEGO Foundation, 2018. – 32 с.
16. Руденко Н.М. Підготовка майбутніх учителів початкової школи в умовах коледжу до застосування інтерактивних технологій на уроках математики : дис. ... канд. пед. наук: 13.00.04 / Руденко Ніна Миколаївна, Київський університет імені Бориса Грінченка. – Київ, 2016. – 290 с.

-
17. Руденко Н., Донченко Ю., Широков Д. Концептуальні ідеї застосування інтерактивної дошки padlet на уроках математики у початковій школі. *Молодь і ринок*. 2021, №10(196). с. 74-78. ISSN 2617-0825
18. Руденко Н., Івахненко Ю., Широков Д. Застосування інтерактивної технології «Ажурна пилка» на уроках математики в 4 класі. *Молодий вчений*, 2021 №10 (98). с. 286-290. ISSN 2313–2167
19. Руденко Н. М. Особливості підготовки майбутніх учителів початкової школи до застосування ментальних карт на уроках математики. *Освітологічний дискурс: електронне наукове фахове видання*, 2020, № 2, с. 92-104. ISSN 2312-5829
20. Руденко Н. М., Широков Д. Застосування веб-квест-технології у підготовці майбутніх учителів початкової школи . *Молодий вчений*, 2020, №10 (86). с. 151-157. ISSN 2304-5809
21. Руденко Н., Калашник О., Дмитрієва А., Широков Д. Формування умінь розв'язування задач на рух в учнів початкової школи за допомогою коміксів. *Молодий вчений*, 2021 №10. ISSN 2304-5809
22. Руденко Н. М., Романенко Л. В., Кудикіна Н.В. Методичний супровід упровадження коміксів в освіту дітей старшого дошкільного віку та учнів початкової школи. *Імідж сучасного педагога*, 2023, №213 (6). с. 136-143. ISSN 2522-9729
23. Педагогічні технології у професійній підготовці кваліфікованих робітників: довідник / Романова Г. М., Артющина М. В., Слатвінська О. А. – Київ : Інститут професійно-технічної освіти НАПН України, 2015. – 87 с.
24. Скворцова С.О. Математика : підр. для 1 кл. закл.заг. сер. освіти / С. О. Скворцова, О.В. Онопрієнко. – Харків : Вид-во «Ранок», 2018. – 144 с.: іл.
25. Скворцова С.О. Математика : підр. для 2 кл. закл.заг. сер. освіти / Світлана Скворцова, Оксана Онопрієнко. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019. – 144 с.: іл.
26. Скворцова С.О. Математика : підр. для 3 кл. закл.заг. сер. освіти (у 2-х ч.) : Ч.1. / С. О. Скворцова, О.В. Онопрієнко. – Харків : Вид-во «Ранок», 2020. – 128 с.: іл.
27. Скворцова С.О. Математика : підр. для 3 кл. закл.заг. сер. освіти (у 2-х ч.) : Ч.2. / С. О. Скворцова, О.В. Онопрієнко. – Харків : Вид-во «Ранок», 2020. – 136 с.: іл.
28. Скворцова С.О. Математика : підр. для 4 кл. закл.заг. сер. освіти (у 2-х ч.) : Ч.1. / С. О. Скворцова, О.В. Онопрієнко. – Харків : Вид-во «Ранок», 2021. – 136 с.: іл.
29. Скворцова С.О. Математика : підр. для 4 кл. закл.заг. сер. освіти (у 2-х ч.) : Ч.2. / С. О. Скворцова, О.В. Онопрієнко. – Харків : Вид-во «Ранок», 2021. – 136 с.: іл.
30. Скворцова С.О., Онопрієнко О. В. Нова українська школа: методика навчання математики у 1–2 класах закладів загальної середньої освіти на засадах інтегративного і компетентнісного підходів: навч.-метод. посіб. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 352 с.
31. Скворцова С.О., Онопрієнко О. В. Нова українська школа: методика навчання математики у 3–4 класах закладів загальної середньої освіти на засадах інтегративного і компетентнісного підходів: навч.-метод. посіб. Харків : Вид-во «Ранок», 2020. 320 с.
32. Council recommendation of 22 May 2018 on key competences for lifelong learning (Text with EEA relevance). The council of the European union. URL: <https://cutt.ly/7YXdISF>
33. Hong Yii Phoon, Roslinawati Roslan, Masitah Shahrill, Hardimah Mohd. Said The Role of Comics in Elementary School Science Education Formatif: *Journal Ilmiah Pendidikan MIPA*, September 2020, №10 (2) pp. 67-76.

34. McCloud S. Understanding comics: The invisible art. Northampton, М А: Kitchen Press, 1994. 224 p.
35. Stephen C. Going Graphic: Comics at Work in the Multilingual Classroom. Heinemann. 2004. 218 p.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Відповіді на завдання до першого блоку

Відповіді.

22. 100.

$$24. \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

25. $\frac{25}{13}$

Тема 4. Теоретичне і методичне підґрунтя запровадження сучасних технологій навчання математики в початковій школі НУШ

Завдання 1.2.2. Правильне виконання тестових завдань: 1-б; 2-в.

Завдання 1.2.6. в).

Завдання 1.2.8. Правильна послідовність: 1-б; 2-а; 3-г; 4-д; 5-в.

Відповіді на тестові завдання до другого блоку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
б	в	в	а	а	б	а	в	б	а	в	г	а	г

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
а	г	г	а	б	в	б	б	а	а	г

ДОДАТКИ

Додаток А

**ОНЛАЙН ДОШКА PADLET ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ [17]**

Однією із хмарних технологій, на якій ми акцентуємо наше дослідження, є інтерактивна дошка Padlet, оскільки готуючись до уроку, зокрема уроку математики в початковій школі, учитель має добирати такі технології навчання, які не тільки спонукатимуть учнів пасивно засвоювати інформацію, а й розвиватимуть навчально-пізнавальну активність та вміння здобувати знання самостійно. Саме такою технологією, на нашу думку, є віртуальна інтерактивна дошка Padlet.

Padlet працює на всіх пристроях: мобільних, планшетах, нетбуках. Можна налаштувати функцію редагування стіни іншим користувачам, дозволити повний доступ, поставити пароль або запросити користувачів по e-mail. Padlet – чудовий спосіб урізноманітнити презентації та домашні завдання. Завдяки формату дошки та безлічі шаблонів, вона стане в пригоді, щоб, наприклад, створити портфоліо чи звіт, організувати віртуальний мозковий штурм чи скласти календар. Створену дошку можна розмістити в соціальних мережах, зберігати у форматі PDF, вставити у блог.

Таку дошку можна використати як під час уроків, так і в позаурочній діяльності. При цьому на ній розміщують дидактичні матеріали для уроку, презентації, відеоролики та інші матеріали, що планують використовувати.

На основі аналізу наукових та методичних джерел, ми встановили, що сервіс Padlet можна застосовувати у освітньому процесі в якості: місця для структурованого зберігання матеріалів; планеру; засобу реалізації технології *Перевернутий клас*; майданчику для розміщення навчальних матеріалів; дошки оголошень; дошки для представлення результатів дитячих робіт, звітності; місця для комунікації вчителя з батьками, учнями, вчителями.

Розглянемо як можна використати даний сервіс на уроках математики у початковій школі, орієнтуючись на визначені напрями.

Місце для структурованого зберігання матеріалів. Тут можна розглядати застосування сервісу Padlet як зі сторони учня, так і зі сторони вчителя. Під час підготовки до уроку математики для вчителя буде дуже корисно створити свою тематичну бібліотеку на основі сервісу Padlet. Зокрема добираючи матеріал до кожної теми. Наприклад тема «Дробі». Педагог створює стіну з відповідною назвою і туди додає стіни із інформаційним матеріалом, стіни із ілюстративним матеріалом, із відеоматеріалом, посилання на спеціальні онлайн ігри, власні розробки, цікаві вправи. З часом такий набір матеріалів спростить підготовку педагога до мінімуму. Особливістю є те, що напрацьований матеріал не втрачається, навіть, якщо виходить з ладу сам комп'ютер. Він зберігається у хмарі і завжди буде під рукою. Його ніхто не запозичить, якщо педагог не дасть на це згоди.

Щодо учнів, то вони можуть зберігати основні правила, терміни, схеми, зразки розв'язання задач, основні алгоритми на своїх стінах і коли настане час контрольних робіт, більше не потрібно боятися, що загубиш зошит чи шукати теоретичні основи в підручнику. Достатньо відкрити Padlet на відповідному місці і просто переглянути схематичний матеріал.

Планер. Планер може використовувати вчитель, щоб мати під рукою календарне планування з математики. Стовпці – дати. Натискаючи на плюсики, додається тема уроку. Однак, ми знаємо, що вкінці уроку ми можемо виявити якісь прогалини у знаннях дітей, чи зрозуміти на що треба більше акцентувати увагу, тож ці нотатки можна додати до наступної дати. Тоді, коли педагог буде готуватися до наступного заняття, зможе зважати на зміни обставин.

Також Padlet можна використати під час ознайомлення дітей з часом, календарем. Зокрема створити власний план на тиждень, день тощо.

Засіб реалізації технології Перевернутий клас. Останнім часом все більш популярною у застосуванні стає технологія *Перевернутий клас*. Суть такого навчання полягає у тому, що основне засвоєння нового матеріалу учнями відбувається вдома, а у школі вже учні вчаться застосовувати набуті теоретичні знання: виконують завдання, вправи, відбувається проведення лабораторних і практичних занять, проєктної діяльності тощо. Зокрема, під час онлайн уроків така технологія дозволяє економити час і більш детально відпрацювати практичні уміння та навички, зупинитися на проблемному навчанні, створенні учнями нового навчального продукту.

Реалізації цієї технології на уроках математики сприяє дошка Padlet. Для прикладу візьмемо урок обчислення площі фігури у 4 класі. Вчитель завантажує на дошку дидактичний матеріал: формулу обчислення площі, зразок обчислення, цікаві факти – у вигляді презентації, та онлайн завдання, щоб можна було визначити на скільки діти зрозуміли тему. А в урочний час, наприклад пограти у будівельників і розрахувати ремонт кабінету, школи чи власної кімнати (якщо урок проводиться онлайн). Результати теж розміщуються на дошці.

Майданчик для розміщення навчальних матеріалів. Як ми вже говорили, даний сервіс відноситься до хмарних сервісів і може стати майданчиком для розміщення необхідних матеріалів для уроку, для домашнього опрацювання, для розміщення результатів роботи.

Дошка оголошень. Кожен учитель початкової школи є класоводом. У нього також може бути створена онлайн дошка оголошень за допомогою даного сервісу. Така дошка дозволяє додавати новини та події, допомагає спростити форму запису тощо. На таку дошку можна подати оголошення про участь у математичному проєкті, у олімпіаді чи якомусь іншому математичному заході і подати гугл форму для реєстрації учнів.

Дошка для представлення результатів дитячих робіт, звітності. Не завжди вчитель може викликати всіх учнів до дошки для представлення результатів роботи, тож доцільно було б представити їх на дошці Padlet. Наприклад, виконуючи проєкт «Ремонт кімнати», діти представляють результати обчислень площі стін, підлоги, розрахунку кількості шпалер, ламінату тощо.

Також дану дошку можна використати для створення формувального оцінювання. Для кожного учня є дошка, на яку додаються всі його оцінювальні роботи, тож можна прослідкувати, які теми з математики та на якому рівні вони були засвоєні.

Місце для комунікації вчителя з батьками, учнями, вчителями. Для обговорення певної інформації вчитель може створити дошку та підключити функцію коментування. На цій платформі педагог може обговорити з учнями питання, що виникли під час пояснення нової теми з математики, подати додаткові роз'яснення. Якщо виникають якісь питання у батьків стосовно теми, вони не знають як краще вивчити з дитиною табличне множення, вчитель може обговорити з ними ці питання. Також щодо проведення проєктів, вчитель теж може подати інформацію для батьків стосовно можливої їх допомоги дітям у його проведенні. Також можна створити дошку з корисними посиланнями, цікавими іграми, завданнями, дидактичним матеріалом і ділитися з колегами та обговорювати можливості їх удосконалення.

Можливості застосування інтерактивної дошки у структурі самого уроку математики

№	Етапи уроку	Способи застосування інтерактивної дошки Padlet
1	Актуалізація опорних знань	На уроці математики дошку Padlet використовують як простір для проведення таких прийомів та інтерактивних методів: «Мозковий штурм», «Асоціативний куш», «Дерево рішень», «Сніжна грудка»; вправи «Так чи Ні?», «Ланцюжок», «Знайди зайве», «Порядок дій», «Годинник»
2	Опрацювання матеріалу	За допомогою дошки залучається значна кількість дидактичного матеріалу через мультимедіа, що підвищує якість пояснення
3	Первинне закріплення	За допомогою дошки вчитель може використовувати не тільки матеріал підручника, але і цікаві завдання, які розробив чи підібрав, попередньо помістивши їх на дошку уроку в Padlet
4	Закріплення та повторення	Дошку Padlet можна застосувати для впровадження диференційованого та індивідуального підходів навчання, застосовуючи різнорівневі завдання
5	Рефлексія	Учні можуть залишити свій відгук про урок на дошці, а також вказати, які моменти можливо залишилися не зовсім зрозумілі, таким чином педагог може сконструювати наступний урок на основі отриманих зворотних даних

Результати самостійних робіт, індивідуальних завдання та домашнього доопрацювання учні можуть подавати теж на основі дошки Padlet, що допомагає запобігти ситуацій: забув зошит, загубив роботу, не підписав листочок з самостійною роботою тощо.

Визначення поняття *інтерактивні технології*

№	Науковець	Визначення <i>Інтерактивне навчання</i>
1.	Н.Суворова, С.Заїр-Бек	<i>Діалогове навчання</i> , у ході якого учні навчаються критично мислити, приймати виважені рішення, брати участь у дискусіях, спілкуватися з іншими людьми
2.	І.Авдєєва, М.Кларін, О.Пометун	<i>Інтерактивне навчання (колективне, групове, навчання у співпраці)</i> – це навчання, що характеризується максимальним залученням тих, хто навчається, у процес навчання, який відбувається за умов постійної, активної взаємодії всіх учасників освітнього процесу
3.	Н.Руденко	<i>Інтерактивне навчання</i> – це навчання, що здійснюється за умови взаємодії учня (студента) з учителем (викладачем), з іншими учнями (студентами), з навчальним оточенням, спираючись на власний досвід, який і є джерелом пізнання.
4.	С.Сисоєва	<i>Інтерактивне навчання</i> – навчання, яке побудоване на взаємодії учня з навчальним оточенням, навчальним середовищем; навчання, що ґрунтується на психології людських взаємин і взаємодій; навчання, сутність якого полягає в організації спільного процесу пізнання, коли знання здобуваються в спільній діяльності через діалог, полілог учнів між собою й викладачем

Визначення науковців терміну *Веб-квест технологія*

№	Науковець	Визначення <i>Веб-квест технологія</i>
1.	Берні Додж	<i>Веб-квест</i> – онлайн-інструмент для навчання, що орієнтується на запити, а вся інформація, яку досліджують учні, надходить із Всесвітньої павутини. (Додж Б. WebQuest. Концепція класу. URL: https://www.thirteen.org/edonline/concept2class/webquests/index.html)
2.	Я. Биховський	<i>Веб-квест</i> – сайт в мережі Інтернет, на якому працюють вчителі або учні, задля виконання тієї чи іншої поставленої задачі. (Биховський Я.С. «Освітні веб-квести» [Електронний ресурс] / Я. Биховський. – Режим доступу: https://kvest-posibnyk.blogspot.com/p/blog-page.html].)
3.	О.Гришко	<i>Освітній веб-квест</i> – сторінка в Інтернеті з детально розписаним планом виконання завдань для учасників. (О.Гришко. Веб-квест – це що таке... Спосіб активізації навчальної діяльності учнів [Електронний ресурс] / О. Гришко - Режим доступу : https://bigbro.com.ua/veb-kvest-tse-shho-take-sposib-aktivizatsiyi-navchalnoyi-diyalnosti-uchniv/)
4.	Н.Руденко Д.Широков	<i>Веб-квест</i> – технологія, що поєднує ІКТ та інтерактивне навчання, мотивує учнів ефективно застосовувати інформацію, знайдену у Всесвітній павутині та розвиває їх критичне мислення. (Руденко Н., Широков Д. Застосування веб-квест технології у підготовці майбутніх учителів початкової школи. Молодий вчений 10(86), 151-157)

ЗАСТОСУВАННЯ ОСВІТНЬОЇ СТРАТЕГІЇ *ДЕРЕВО РІШЕНЬ* НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ОНЛАЙН ДОШКИ MIRO [17]

Освітня стратегія – (стратегія розвитку освіти) – це концепція, що закладена в основу освітньої політики. Визначає основні напрями і принципи розвитку системи освіти як цілісного соціального інституту ..

Дерево ухвалення рішень (дерева класифікацій або регресійні дерева) – використовується в галузі статистики та аналізу даних для прогнозних моделей. Структура дерева містить такі елементи: «листя» і «гілки». На ребрах («гілках») дерева ухвалення рішення записані атрибути, від яких залежить цільова функція, в «листі» записані значення цільової функції, а в інших вузлах – атрибути, за якими розрізняються випадки. Щоб класифікувати новий випадок, треба спуститися по дереву до листа і видати відповідне значення. Подібні дерева рішень широко використовуються в інтелектуальному аналізі даних.

Стратегія *Дерево рішень* – інтерактивна технологія колективно-групового навчання (за класифікацією О.Пометун і Л.Пироженко), яка має передумовою фронтальну, спільну роботу всього класу з вирішення певної навчальної проблеми. Завдання вчителя – активізація учнів у пошуку способів вирішення проблеми. Кожен учень висловлює свою позицію без остраху або побоювань щодо несприйняття його точки зору іншими: сама проблема може містити декілька способів її вирішення, кількість наданих учнями пропозицій щодо вирішення проблеми в підсумку обов'язково посприє її ефективному вирішенню.

Інтерактивний урок математики в початковій школі потребує ретельної підготовки, адже вчитель має вирішити, яку саме з інтерактивних технологій треба застосувати. Узгодження потребують тема та мета уроку, вікові та індивідуальні особливості учнів, ступінь їхньої підготовленості до роботи на уроці.

Використання стратегії *Дерево рішень* на нашу думку доцільно проводити в 4 класі початкової школи і вона дозволяє учням оволодіти навичками вибору оптимального варіанту рішення, дії тощо. Побудова *Дерева рішень* є практичним способом оцінити переваги та недоліки різних варіантів. На етапі пропозиції варіантів, і на етапі їх оцінки можливе використання також *Мозкового штурму*. Якщо робота проводиться індивідуально або в парах, то учні на записують всі можливі рішення проблем або їх наслідки, здатні впливати на подальший хід подій і призводять до певних результатів. Потім викладають їх в якості «листя», крони дерева, пояснюючи свій хід думок або озвучуючи певний висновок у процесі вирішення проблемної ситуації.

Відтак для застосування інтерактивної технології *Дерево рішень* на уроках математики вчителю початкових класів необхідно оволодіти знаннями та компетенціями з педагогіки, психології, методики викладання математики, з структури та методики підготовки, організації та проведення інтерактивного уроку математики; розвивати в собі комунікативні здібності, навички зі створення комфортних умов навчання; знати предмет математики, досконало володіти

матеріалом уроку, бути ерудованим; опанувати прийоми з мотивації учнів до ефективного засвоєння знань для формування у молодших школярів внутрішню особистісної зацікавленості у результатах заняття.

Отже, *Дерево рішень*, як освітня технологія, сприяє об'єднанню учнів в їхньому прагненні розв'язання загальної задачі. Учасники навчального процесу вчаться грамотно висловлювати свої думки, сприймати інформацію, адекватно реагувати на неї, наводити аргументи та контраргументи, малювати схеми, а також навчаються мистецтву діалогу, дискусії.

Стратегія *Дерево рішень* на уроці математики – спосіб розв'язати конкретну проблему. Для організації роботи за допомогою цієї освітньої стратегії пропонуємо наступний алгоритм дій (рис 5.2.7.).

Такий алгоритм доцільно використовувати й під час дистанційного навчання. Це значно активізує увагу учнів, змушує їх бути зосередженими, адже їм доводиться об'єднуватися в групи для виконання спільного завдання – вирішення визначеної проблеми.

Дерево рішень є алгоритмом діяльності, який допомагає проаналізувати та краще зрозуміти механізми прийняття складних рішень. вчитель вибирає проблему, яка не має однозначного розв'язку, та надає учням необхідну для розв'язання проблеми інформацію для домашнього опрацювання. Малює на дошці чи роздає кожному дерево рішень. Обговорює кожен із варіантів вирішення проблеми, що є в них позитивного і негативного. Таким чином можна відхилити ряд ідей і залишити 3-4 найбільш конструктивних. Потім учні діляться на групи для прийняття одного остаточного рішення. Кожна група пропонує своє рішення. Якщо єдності немає, то можна застосувати голосування.

Для візуалізації стратегії *Дерево рішень* ефективно використовувати графічне зображення послідовності рішень за допомогою віртуальної дошки Miro.

Інтерактивна дошка Miro (<https://miro.com/>) – це швидка, безкоштовна та проста у використанні онлайн-дошка, створена для того, щоб допомогти співпрацювати з іншими людьми в будь-який час і в будь-якому місці. Є зручною онлайн дошкою для проведення дистанційних групових занять.

За допомогою дошки Miro зручно проводити інтерактивну стратегію *Дерево рішень*, оскільки Miro містить великий вибір шаблонів, швидка та зручна у використанні, має простий та зрозумілий інтерфейс, надає можливість працювати з багатьма учасниками у режимі відеозв'язку. Miro пропонує безліч програмних інтеграцій з такими програмами, як JIRA, Trello, Zoom, Slack, можливість розміщувати на дошці Miro текст, оцифровані наліпки, рисунки, відео та аудіо файли (рис. 1, 2).

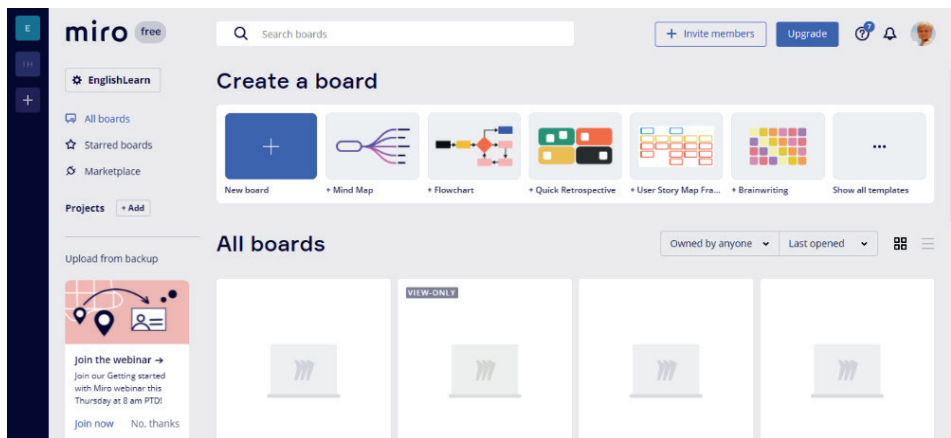


Рис 1. Меню шаблонів побудови схем для завдання «дерево рішень»





Рис 2. Зразок можливості дистанційного обговорення завдань на платформі Міро

Наведемо фрагмент уроку в 4 класі за підручником «Математика 4 клас» (автори Скворцова С., Онопрієнко О.).

Нами було розроблено *Дерево рішень* для учнів 4 класу з використанням інтерактивної дошки Miro. За проблему ми використали задачу (рис 3.) з підручника «Математика 4 клас» (автори Скворцова С., Онопрієнко О.).

9 За три дні яхта пододала 24 милі. Другого дня — у 2 рази більше, ніж першого, а третього — у 5 разів більше, ніж першого. Скільки миль долала яхта щодня?

1
2
3 } 24 милі

46

Рис 3. Задача з електронного підручника «Математика 4 клас» (автори Скворцова С., Онопрієнко О.)

На платформі Міго ми змодельовали дерево з варіантами вирішення проблеми (рис 4.)

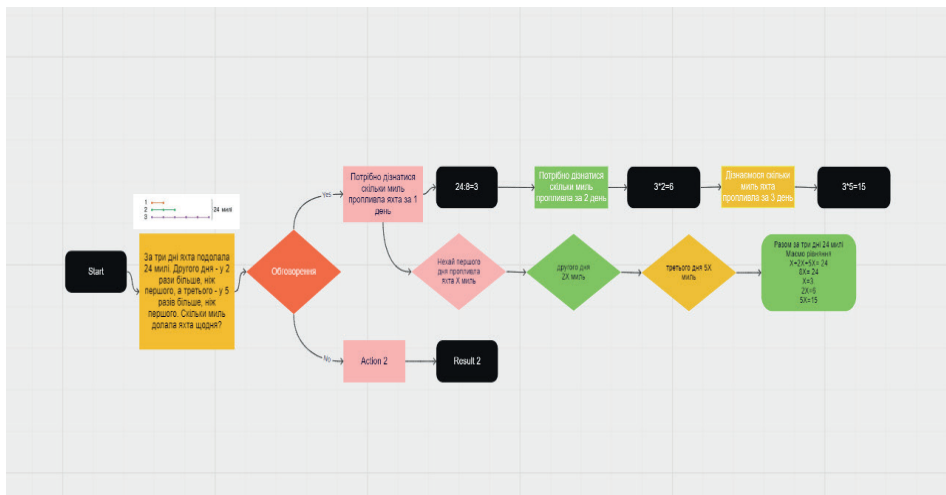


Рис 4. Змодельоване *Дерево рішень* на платформі Міго (<https://cutt.ly/YEanmOz>)

Представлена задача має два способи розв’язання: 1) частинами; 2) за допомогою рівняння. Учні разом з учителем будують *Дерево рішень* та знаходять розв’язок задачі. Обговорюють способи розв’язання і вибирають найпростіший спосіб.

ДОСЛІДНИЦЬКИЙ ПРОЕКТ ДЛЯ 1 КЛАСУ

Тема проекту: Цибулинка і Сонечко

Учасники проекту: учні 1 класу

Мета і завдання: узагальнити і розширити знання учнів про рослини та догляд за ними; ознайомити з умовами, потрібними для життя рослин; дослідити роль сонця у проростанні рослин; формувати вміння спостерігати, виконувати досліди і робити висновки; виховувати любов до праці, до природи.

Очікувані результати: зацікавленість учнів проектною діяльністю; застосування власного життєвого досвіду; покращення моральних якостей учнів.

Характеристика проекту:

- за характером діяльності – творчо-індивідуальний;
- за змістом – міжпредметний (природознавство, математика);
- за кількістю учасників – колективний;
- за тривалістю – міні – проект; (30 днів)
- за ступенем самостійності – частково-пошуковий.

ЕТАПИ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЕКТУ

I етап. Стратегія проекту.

На цьому етапі були визначені тема, мета проекту, навчальні предмети, зміст яких задіяно, вид проекту та його тривалість.

II етап. Планування проекту.

Ознайомлення учнів із загальною темою і провідною проблемою.

1. Підсумок фенологічних спостережень.

- Яка зараз пора року?
- Який місяць?
- Це початок осені чи кінець?
- Якого кольору небо? Чи є хмарки?
- Чи світить сонечко?
- Яка погода переважала протягом тижня?
- Які ще зміни ви помітили в живій природі?

2. Ознайомлення учнів із загальною темою і провідною проблемою.

Бесіда:

- У кожного вдома є кімнатні рослини. Як ви їх доглядаєте?
- Чи замислювалися ви, чому кімнатні рослини розміщують на підвіконнях, ближче до вікна? (Усім рослинам для нормального росту і розвитку потрібні повітря, світло, тепло, вода і ґрунт)
- Чи можна це твердження застосовувати і до тих рослин, що не ростуть у кімнатах?



3.Проведемо дослід.

Метою його буде дізнатися, як проростатиме цибуля за різних умов. Одну рослину ми поставимо на підвіконні, другу – в шафу, третю – в коробку з отворами. Працювати будемо в групах. Кожна група бачитиме тільки свою цибулинку.

4.Формування груп для проведення дослідження.

Учні класу об'єдналися в групи:

1 група – доглядатиме за рослиною, що знаходиться на підвіконні.

2 група – доглядатиме за рослиною, що стоїть під коробкою з отворами;

3 група – доглядатиме за рослиною, що знаходиться в шафі;

4 група – шукатиме цікаву і корисну інформацію про цибулю.

III етап. Реалізація проекту.



1.Розподіл обов'язків між членами групи.

Учні 1-3-ї груп розподіляють обов'язки:

- поливання рослин;
- розпушування ґрунту;
- вимірювання довжини пагонів;
- запис результатів вимірювання в таблицю.

Учні з 4-ї групи шукають цікаву інформацію та зображують її схематично на малюнках.

2.Практична діяльність учнів груп 1,2,3.

3.Самостійна пошукова робота учнів групи 4.

4.Аналіз та обробка інформації.

5.Виготовлення освітнього продукту

Групи 1, 2, 3 – вирощують рослину, заповнюють таблицю з даними про висоту пагонів, схематично зображують рослини з останнім показником висоти.

Група 4 – готує цікаву інформацію про цибулю, схематично виражає на малюнках.

IV етап. Підсумок проекту.

1.Оформлення результатів дослідження.

2.Презентація.

3.Вступна бесіда:

Наш клас проводив дослід. Ми спостерігали, як проростала цибуля за різних умов.



Працювали у групах.

- Де знаходилася рослина групи1?
- Де знаходилася рослина групи2?
- Де знаходилася рослина групи3?

Починаємо експеримент....

Пригадаймо, яку роботу виконували протягом останніх 30-ти днів?

Прогнозування результатів.

- Кожна група бачила лише свою цибулину, і не бачила цибулин інших груп. Як ви гадаєте чи однакові вони виростили? Чим відрізняються?

- Учні з 4-ї групи не бачили жодної рослини. Цікаво, чи зможуть вони сказати, де чия цибулина?

- Ваші прогнози справдилися – пагони різної висоти.
Відповіді дітей.

Група 1: наша рослина за 30 днів виросла на 26 см.

Група 2: наша рослина за 30 днів виросла на 15 см.

Група 3: наша рослина за 30 днів виросла на 7 см.

Висновок:

- То як сонце впливає на ріст рослин?

А тепер надамо слово представникам 4-ї групи – заслухаємо цікаву інформацію про цибулю.

Виступи учнів:

1. Щоденне споживання 80-100 гр. зелених пагонів цибулі або цибулин задовольняє добову потребу людини у вітаміні С. У дикому вигляді цибулеві ростуть по всьому світу. Їх немає лише в Австралії.

2. Найближчі родичі цибулі – часник і черемша. Давні Єгиптяни вважали цибулю та часник священними рослинами. Їх приносили в жертву богам.

3. Цибуля має здатність вбивати хвороботворні бактерії. Тому її не тільки вживають у їжу, а й використовують як ліки. Італійський письменник Джанні Родарі зробив Цибулину головним героєм своєї казки.

Оцінювання загального проекту.

- Чи задоволені ви своєю роботою?

Висновки.

Учні на практиці ознайомилися з умовами, необхідними для життя рослин, дослідили роль сонця у проростанні рослин.

Вони не отримали готові знання, а засвоїли матеріал, спираючись на власний досвід.

Ніна РУДЕНКО

**МАТЕМАТИКА
З МЕТОДИКОЮ НАВЧАННЯ**

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Видавець і виготовлювач:

ФОП Лопатіна О. О.

www.publishpro.com.ua

тел.: +38 044 501 36 70

Замовлення 177 від 08.10.2010 р.

тираж 300 штук

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

ДК № 5317 від 03.04.2017

Відомості про автора



Руденко Ніна Миколаївна,
кандидатка педагогічних наук,
старша викладачка кафедри початкової освіти,
Київський університет імені Бориса Грінченка.
Навчалася на механіко-математичному
факультеті Київського університету імені
Тараса Шевченка, який закінчила у 1994 році
за спеціальністю «Математика».

Дисертацію захистила в 2016 році у Київському
університеті імені Бориса Грінченка
за спеціальністю 13.00.04 –

«Теорія та методика професійної освіти».

З 2011 року працює в Київському столичному
університеті імені Бориса Грінченка
на посадах:

2011-2016 – викладачка циклової комісії
економіко-математичних дисциплін
Університетського коледжу;

2016-2019 – завідувачка шкільним відділенням
Університетського коледжу;

2019 – старша викладачка кафедри початкової
освіти Педагогічного інституту;

З 26 грудня 2023 року – донині – старша
викладачка кафедри початкової освіти
Факультету педагогічної освіти Київського
столичного університету імені Бориса
Грінченка.

Авторка понад 50 наукових та методичних
публікацій, із-поміж них: статті у наукових
фахових виданнях та міжнародних
наукометричних базах даних Scopus,
Web of Science. Співавторка розділів
у вітчизняних та зарубіжних монографіях
з актуальних проблем професійної підготовки
вчителів початкових класів та вчителів
математики ЗЗСО в Україні та країнах
Європейського Союзу.