

The issue of journal contains:

Proceedings of the III Correspondence
International Scientific and Practical Conference

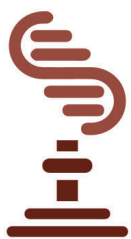
OPEN SCIENCE NOWADAYS: MAIN MISSION, TRENDS AND INSTRUMENTS, PATH AND ITS DEVELOPMENT

held on November 1st, 2024 by

NGO European Scientific Platform (Vinnytsia, Ukraine)
LLC International Centre Corporative Management (Vienna, Austria)

Nº45
NOVEMBER, 2024

ISSN 2710-3056



GRAIL OF
SCIENCE

PERIODICAL SCIENTIFIC JOURNAL



INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL

GRAIL OF SCIENCE

№ **45** (November, 2024)

with the proceedings of the:

III Correspondence International
Scientific and Practical Conference

**OPEN SCIENCE NOWADAYS:
MAIN MISSION, TRENDS
AND INSTRUMENTS, PATH
AND ITS DEVELOPMENT**

held on November 1st, 2024 by

NGO European Scientific Platform
(Vinnytsia, Ukraine)
LLC International Centre Corporative
Management (Vienna, Austria)

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

ГРААЛЬ НАУКИ

№ **45** (листопад, 2024)

за матеріалами:

III Міжнародної науково-
практичної конференції

**ВІДКРИТА НАУКА СУЧАСНОСТІ:
ГОЛОВНА МІСІЯ, НАПРЯМИ
ТА ІНСТРУМЕНТИ, ШЛЯХ І
ЇЇ РОЗВИТОК**

що проводилася 01.11.2024

ГО «Європейська наукова
платформа» (Вінниця, Україна)
ТОВ «International Centre Corporative
Management» (Відень, Австрія)



Видання розраховане на науковців, викладачів, аспірантів, студентів, усіх, хто прагне отримати ґрунтовні знання теоретичного і прикладного характеру.

Рекомендовано до видання Вченою Радою Наукової установи «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці». Протокол № 60 від 31.10.2024.

Головний редактор: Танасійчук Альона Миколаївна, д-р. екон. наук, доцент (Україна)
Заступник головного редактора: Ємельянов Олександр Юрійович, д-р. екон. наук, професор (Україна)
Голова оргкомітету конференції: Голденблат Марія (Україна)
Заступник голови оргкомітету конференції: Рейчел Апаро (Австрійська Республіка)
Відповідальний секретар: Рабей Настасія Романівна (Україна)

ЧЛЕНИ РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ:

Квасницька Раїса Степанівна - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Jakhongir Shaturaev** - канд. екон. наук, доцент (Республіка Узбекистан); **Бойко Світлана Василівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Заднепровська Ганна Ігорівна** - канд. екон. наук (Україна); **Занора Володимир Олександрович** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Маркович Ірина Богданівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Яковенко Роман Валерійович** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Поливанна Людмила Анатоліївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Гевчук Анна Вікторівна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Маслій Олександра Анатоліївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Євтушенко Наталія Миколаївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Москвічова Олена Сергіївна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Ясишена Валентина Валеріївна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Михайлишин Лілія Іванівна** - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Гавриленко Наталія Вікторівна** - канд. екон. наук, доцент (Україна); **Гіулі Гігуашвілі** - д-р. екон. наук, професор (Грузія).

НАУКОВІ КОНСУЛЬТАНТИ:

Онкієнко Сергій Володимирович - д-р. екон. наук, професор (Україна); **Marko Timchev** - д-р. екон. наук, доцент (Республіка Болгарія); **Khatuna Tabagari** - д-р. екон. наук, професор (Сакартвело); **Грень Лариса Миколаївна** - д-р. наук з держ. управління, професор (Україна); **Михаліцька Наталія Ярославівна** - канд. наук з держ. управління, доцент (Україна); **Ткаченко Павло Ігорович** - аспірант (Україна); **Купріянова Дарина Сергіївна** - практикуючий юрист (Польща); **Губаль Галина Миколаївна** - канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна); **Козуб Галина Олександрівна** - канд. техн. наук, доцент (Україна); **Козьма Антон Антонович** - канд. хім. наук (Україна); **Морозова Тетяна Василівна** - канд. біол. наук, доцент (Україна); **Купріянова Лариса Сергіївна** - канд. мед. наук, доцент (Україна); **Лисенко Дмитро Андрійович** - канд. мед. наук, доцент (Україна); **Цубанова Наталя Анатоліївна** - д-р. фарм. наук., професор (Україна); **Олійник Світлана Валентинівна** - канд. фарм. наук, доцент (Україна); **Полєжаєв Юрій Григорович** - канд. наук із соц. ком., доцент (Україна); **Mikhabbat Khakimova** - д-р. пед. наук, професор (Республіка Узбекистан); **Куліченко Алла Костянтинівна** - д-р. пед. наук, доцент (Україна); **Фурман Тарас Юрійович** - канд. пед. наук, доцент (Україна); **Бажан Станіслав Миколайович** - д-р. філософії (Україна); **Ямполь Юрій Віталійович** - аспірант (Україна); **Антипова Жанна Ігорівна** - старший викладач (Україна); **Яцик Мар'яна Романівна** - канд. пед. наук, доцент (Україна); **Корбозерова Ніна Миколаївна** - д-р. філол. наук, професор (Україна); **Ковальська Наталя Аркадіївна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Присяжнюк Оксана Ярославівна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Мелех Галина Богданівна** - канд. філол. наук, доцент (Україна); **Корнус Анатолій Олександрович** - канд. геогр. наук, доцент (Україна); **Фомін Андрій Володимирович** - канд. іст. наук, доцент (Україна); **Гірна Наталія Мирославівна** - канд. іст. наук, доцент (Україна); **Устінова Ірина Ігорівна** - д-р. арх., професор (Україна); **Катерина Діденко** - канд. арх. (Україна); **Воскобойнікова Юлія Василівна** - д-р. мист. (Україна); **Крипчук Микола Володимирович** - канд. мист., доцент (Україна); **Лугова Тетяна Анатоліївна** - канд. мист., доцент (Україна)

Верстальник: Білоус Тетяна (Україна). **Дизайнер:** Казьміна Надія (Україна). **Коректор:** Дудник Григорій (Україна).

«Грааль науки» є офіційно зареєстрованим мультидисциплінарним науковим виданням з міжнародною сферою поширення, що підтримує політику відкритого доступу. **Ідентифікатор медіа R30-02704** (рішення № 430 від 22.02.2024 Національної Ради України з питань телебачення і радіомовлення).

Наказом МОН України № 582 від 24.04.2024 виданню «Грааль науки» присвоєно Категорію Б фахових видань України з питань економіки (051 «Економіка»).

«Грааль науки» індексується в міжнародних реферативних та наукометричних базах даних:

Index Copernicus Journals Master List; «Наукова періодика України» (Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського НАН України); Національний репозитарій академічних текстів; Google Scholar; WorldCat; Open Ukrainian Citation Index; CrossRef; Mendeley; Scite; Semantic Scholar; Scilit; OpenAIRE, PubPeer.

Конференція зареєстрована УкрІНТЕІ (Посвідчення № 370 від 12.06.2024) та сертифікована Euro Science Certification Group (Сертифікат № 22686 від 27.09.2024).

За точність викладених фактів та коректність цитування відповідальність несе автор.



DOI 10.36074/grail-of-science.01.11.2024.058

UNKNOWN FORMULAS OF TRIANGLE ANGLE BISECTOR SEGMENTS

Liudmyla Hetmanenko

Senior Lecturer,
Department of the Natural Sciences and Mathematics Education and
Technologies
Institute of In-Service Teacher's Training
Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine

Summary. In triangle geometry, alongside basic segments such as altitudes, angle bisectors, medians, and circle radii, there exist so-called secondary segments which, despite their less obvious nature, play a crucial role in solving various geometric problems. The study of these segments significantly deepens the understanding of triangle properties, enriching its structural geometry. This paper, in particular, examines segments located on the angle bisector of a triangle. It is noteworthy that these segments exhibit cyclic properties, meaning they can be found on the bisectors of all triangle angles, not just one. The analysis of these segments enables the derivation of a set of important formulas presented in this work. The obtained results may prove valuable in solving a wide range of geometric problems related to the properties of triangles.

Keywords: Mansion Circle; Circumscribed Circle; Inscribed Circle; Excircle; Angle Bisector; Angle Bisector Segments; Trinity formula; Identity Proofs; Segments of Tangents to the Circle.

The center of the inscribed circle in triangle ABC lies on the bisector of angle $\angle BAC$, or I , the incenter of the triangle. The line AI intersects the circumscribed circle around triangle ABC at point W_1 , which is the center of the Mansion circle with radius

$$W_1C = W_1B = W_1I = R_M.$$

Similarly, the point I_a lies on the bisector AI as the center of the excircle, which is tangent to the extensions of two sides AC and AB of triangle ABC and to side BC (see Fig. 1).

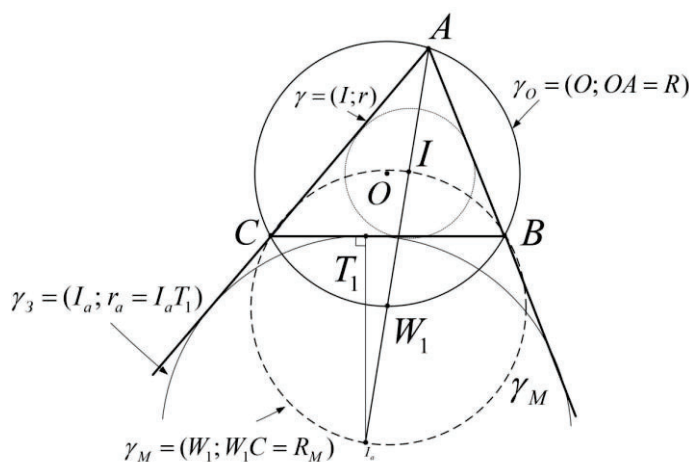


Fig. 1

This paper discusses segments located on the angle bisector $\angle BAC$ of triangle ABC and the resulting formulas. Problems are presented for consideration, and a series of related identities are proven.

Problem 1.

Prove the two proposed formulas: $AI + AI_a = 2AW_1$ or $\frac{AI+AI_a}{2} = AW_1$.

Proof.

$$AW_1 = AI + IW_1, \tag{1}$$

$$AW_1 = AI_a - IW_1, \tag{2}$$

Thus, (1) + (2) $\rightarrow 2AW_1 = AI + AI_a$.

$$\frac{AI+AI_a}{2} = AW_1.$$

Problem 2.

Prove the formula $AI_a - AI = 2IW_1$ [3].

Proof.

The proof follows from the Mansion circle $\gamma_M(W_1; R_M = W_1C = W_1B = IW_1)$.

Alternatively, $IW_1 = I_aW_1 = R_M$, the radius of the Mansion circle.

Or $AI_a - AI = II_a$.

Since $II_a = 2R_M$, the diameter of the Mansion circle, we have $II_a = 2IW_1$.

Therefore, $AI_a - AI = 2IW_1$.

Problem 3.

Prove the formula $AI \cdot AI_a = bc$,

where b and c are the sides AC and AB of triangle ABC .

This formula is known as the Trinity formula [1] introduced in the works of I. A. Kushnir [2], an honored teacher of Ukraine and author of more than 60 books.

Proof.

We apply the well-known formula for the area of a triangle, $S = rp$, where r is the radius of the inscribed circle, and p is the semiperimeter of triangle ABC (see Fig. 2).

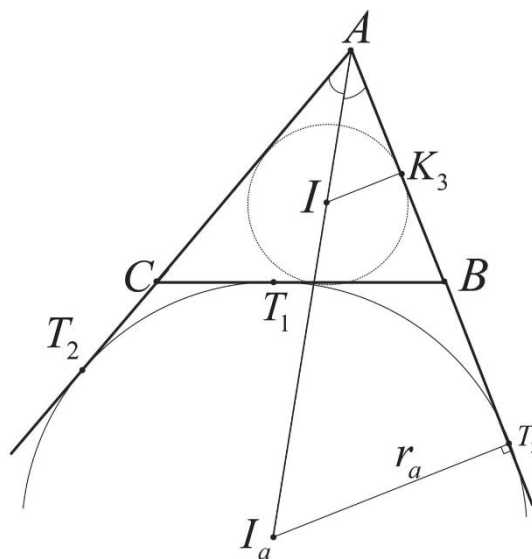


Fig. 2

$$r = IK_3 = AI \sin \frac{\angle BAC}{2}$$

$$p = AT_3 = AI_a \cos \frac{\angle BAC}{2}.$$

Since $AT_3 = AT_2$, as they are segments of tangents to the excircle $\gamma_3 = (I_a; r_a)$, we have

$$AT_2 = AC + CT_2 = AC + CT_1, \tag{3}$$

$$AT_3 = AB + BT_3 = AB + BT_1, \tag{4}$$

Setting (3) equal to (4), otherwise we get

$$AC + CT_1 = AB + BT_1 = p.$$

We have $S = rp = AI \sin \frac{\angle BAC}{2} \cdot AI_a \cos \frac{\angle BAC}{2}$ (applying the double-angle sine formula).

$$S = \frac{1}{2} AI \cdot AI_a \sin \angle BAC,$$

$$S = \frac{1}{2} AI \cdot AI_a \sin \angle BAC = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \angle BAC,$$

$$AI \cdot AI_a = bc.$$

Proven.

We will prove the identities that form the segments of the angle bisectors of the triangle (see Fig. 3).

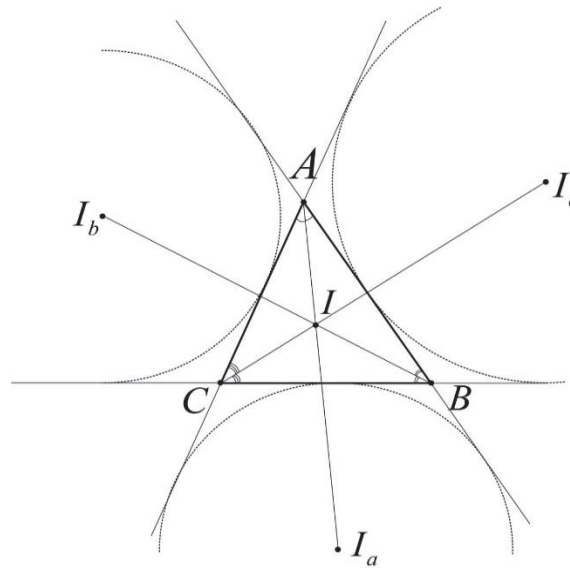


Fig. 3

Problem 4.

Prove the formula $\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} = 1$.

Proof.

We have (see Fig. 3) $\frac{AI}{AI_a} = \frac{p-a}{p}$, since

$$AI = AK_3 \cos \frac{\angle BAC}{2} = (p-a) \cos \frac{\angle BAC}{2}, \text{ and}$$

$$AI_a = AT_3 \cos \frac{\angle BAC}{2} = p \cos \frac{\angle BAC}{2}.$$

$$\text{Therefore, } \frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{p} = \frac{3p-2p}{p} = \frac{p}{p} = 1.$$

Proven.

Problem 5.

Prove that $\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ac} + \frac{CI^2}{ab} = 1$.

where $a, b,$ and c are the sides $BC, AC,$ and AB of triangle ABC .

Proof.

We have $\frac{AI^2}{bc} = \frac{AI^2}{AI \cdot AI_a} = \frac{AI}{AI_a}$, (since $bc = AI \cdot AI_a$ – see Problem 3).

Similarly, $\frac{BI^2}{ac} = \frac{BI^2}{BI \cdot BI_b} = \frac{BI}{BI_b}$, $\frac{CI^2}{ab} = \frac{CI}{CI_c}$.

The sum of these fractions $\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c}$ equals 1 (proven in Problem 4).

Thus, $\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ac} + \frac{CI^2}{ab} = \frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} = 1$.

Proven.

Similarly, it can be proven that $\frac{bc}{AI^2} + \frac{ac}{BI^2} + \frac{ab}{CI^2} = 1$.

Problem 6.

Prove that $\frac{K_2K_3}{T_2T_3} + \frac{K_1K_3}{T_1^bT_3^b} + \frac{K_1K_2}{T_1^cT_2^c} = 1$ [4]

Where $K_1, K_2,$ and K_3 are the points of tangency of the inscribed circle with the sides $BC, AC,$ and AB of triangle ABC ; $T_1^b, T_1^c; T_2, T_2^c; T_3, T_3^b$ are the points of tangency of the excircles with the sides $BC, AC,$ and AB of triangle ABC (see Fig. 5).

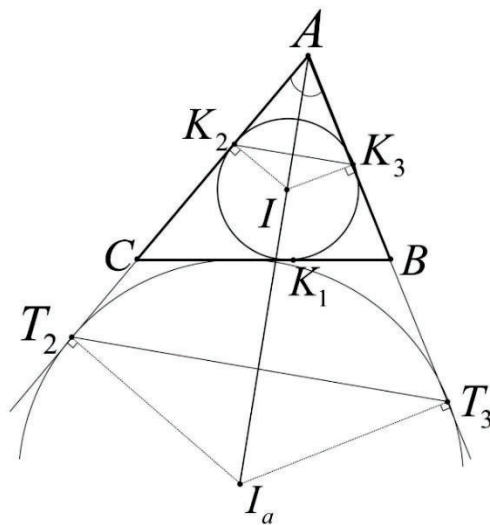


Fig. 4

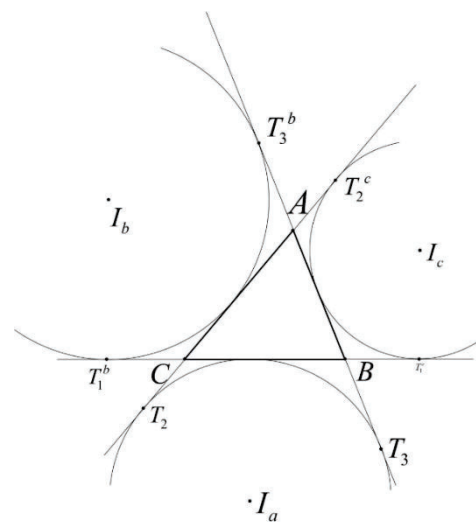


Fig. 5

Proof.

We have (see Fig. 4) $\frac{K_2K_3}{T_2T_3} = \frac{AI \sin \angle BAC}{AI_a \sin \angle BAC}$ or $\frac{K_2K_3}{T_2T_3} = \frac{AI}{AI_a}$.

Similarly (see Fig. 5), $\frac{K_1K_2}{T_1^cT_2^c} = \frac{CI \sin \angle ACB}{CI_c \sin \angle ACB} = \frac{CI}{CI_c}$, $\frac{K_1K_3}{T_1^bT_3^b} = \frac{BI \sin \angle ABC}{BI_b \sin \angle ABC} = \frac{BI}{BI_b}$.

Otherwise we have $\frac{K_2K_3}{T_2T_3} + \frac{K_1K_3}{T_1^bT_3^b} + \frac{K_1K_2}{T_1^cT_2^c} = \frac{AI}{AI_a} + \frac{CI}{CI_c} + \frac{BI}{BI_b} = 1$ (see identity 4).

Proven.

Problem 7.

Prove that $AI^2 \sin \angle BAC + BI^2 \sin \angle ABC + CI^2 \sin \angle ACB = 2S$.

Proof.

Consider $I^2 \sin \angle BAC = \frac{AI \cdot AI \sin \angle BAC \cdot AI_a}{AI_a} = \frac{AI \cdot AI_a \sin \angle BAC \cdot AI}{AI_a} = \frac{2S \cdot AI}{AI_a}$ where we applied the formula from Problem 3, $AI \cdot AI_a = bc$.

Therefore, we have:

$$AI^2 \sin \angle BAC + BI^2 \sin \angle ABC + CI^2 \sin \angle ACB = \frac{2S \cdot AI}{AI_a} + \frac{2S \cdot BI}{BI_b} + \frac{2S \cdot CI}{CI_c} =$$

$$= 2S \left(\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} \right) = 2S \text{ (see identity 4).}$$

Proven.

Problem 8.

Prove that $S = \frac{1}{2} \left(\frac{(K_2 K_3)^2}{\sin \angle BAC} + \frac{(K_1 K_3)^2}{\sin \angle ABC} + \frac{(K_1 K_2)^2}{\sin \angle ACB} \right)$ [3].

Proof.

We have $\frac{(K_2 K_3)^2}{\sin \angle BAC} = \frac{(AI \sin \angle BAC)^2}{\sin \angle BAC} = AI^2 \sin \angle BAC$ or

$$\frac{(K_2 K_3)^2}{\sin \angle BAC} + \frac{(K_1 K_3)^2}{\sin \angle ABC} + \frac{(K_1 K_2)^2}{\sin \angle ACB} = AI^2 \sin \angle BAC + BI^2 \sin \angle ABC + CI^2 \sin \angle ACB = 2S$$

(see identity 7).

Otherwise we have $\frac{1}{2} \left(\frac{(K_2 K_3)^2}{\sin \angle BAC} + \frac{(K_1 K_3)^2}{\sin \angle ABC} + \frac{(K_1 K_2)^2}{\sin \angle ACB} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2S = S$.
 $S = S$. Proven.

Problem 9.

Prove the formula $AI \cdot IW_1 = 2Rr$, where R is the radius of the circumcircle of triangle ABC .

Proof.

We have $AI = \frac{r}{\sin \frac{\angle BAC}{2}}$ (see Fig. 2).

Also, $IW_1 = CW_1$ (as the radius of the Mansio circle).

Now, $IW_1 = CW_1 = 2R \sin \frac{\angle BAC}{2}$ (see triangle CDW_1) (Fig. 6).

Thus, we can write $AI \cdot IW_1 = \frac{r}{\sin \frac{\angle BAC}{2}} \cdot 2R \sin \frac{\angle BAC}{2} = 2Rr$.

Proven.

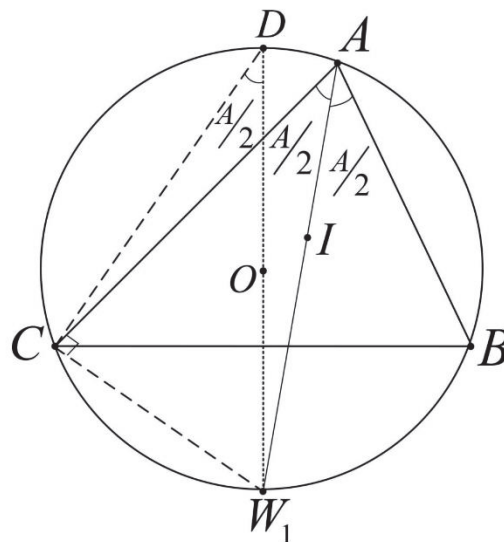


Fig. 6

Problem 10.

Prove that $AI^2 = bc^2 - 4Rr$,
where b and c are the sides AC and AB of triangle ABC ; R is the radius of the circumcircle of triangle ABC .

Proof.

We have

$$bc = AI \cdot AI_a \text{ (see the formula from Problem 3).}$$

$$2Rr = AI \cdot IW_1 \text{ (see the formula from Problem 9).}$$

$$\text{Also, } bc - 4Rr = AI \cdot AI_a - 2AI \cdot IW_1 = AI(AI_a - 2IW_1)$$

Using the formula from Problem 2:

$$AI_a - AI = 2IW_1, \text{ or } AI_a - 2IW_1 = AI.$$

$$\text{Therefore, we have: } bc - 4Rr = AI(AI_a - 2IW_1) = AI \cdot AI = AI^2.$$

Proven.

I invite the readers to attempt to prove the formula $AI_a \cdot I_a W_1 = 2Rr_a$, which is manageable but equally significant.

References:

- [1] Гетманенко, Л. (2023). ФОРМУЛА-ТРІЙЦЯ ЯК РЕЗУЛЬТАТ ЕМОЦІЙНОГО ПОШУКУ НОВИХ ФОРМУЛ ГЕОМЕТРІЇ. Фізико-математична освіта, 38(4), 31–35. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-004>
- [2] Кушнір І.А. (2002). ГЕОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ, ЩО НЕ ВВІЙШЛИ ДО ШКІЛЬНИХ ПІДРУЧНИКІВ. Київ: Факт.
- [3] Кушнір І.А. (2007). ТРИУМФ ШКІЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ: НАВЧ. ПОСІБНИК ДЛЯ 7-11 КЛ. Київ: Наш час.
- [4] Рубльов Б.В. (2016). МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДНІ ЗМАГАННЯ ШКОЛЯРІВ УКРАЇНИ: 2014/15 НАВЧАЛЬНИЙ РІК. Харків: Гімназія

НЕВІДОМІ ФОРМУЛИ ВІДРІЗКІВ БІСЕКТРИСИ КУТА ТРИКУТНИКА

Гетманенко Людмила Миколаївна

старша викладачка кафедри природничо-математичної освіти і технологій

Інститут післядипломної освіти

Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна

Анотація. У геометрії трикутника, поряд із базовими відрізками, такими як висоти, бісектриси, медіани та радіуси кіл, існують також так звані неосновні відрізки, які, попри свою менш очевидну природу, відіграють ключову роль у вирішенні багатьох геометричних задач. Вивчення цих відрізків значно поглиблює розуміння властивостей трикутника, збагачуючи його структурну геометрію. Зокрема, у даній статті розглядаються відрізки, що лежать на бісектрисі кута трикутника. Важливо зазначити, що ці відрізки є циклічними, тобто можуть бути розташовані на бісектрисах усіх кутів трикутника, а не лише на одній із них. Аналіз цих відрізків дозволяє вивести низку важливих формул, які пропонуються в цій роботі. Отримані результати можуть бути корисними у вирішенні широкого кола геометричних задач, що стосуються властивостей трикутників.

Ключові слова: коло Мансіона; описане коло; вписане коло; зовнівписане коло; бісектриса кута; відрізки бісектриси кута; формула-трійця; доведення тотожностей; відрізки дотичних до кола.