УДК 512:372.851
DOI: https://doi.org/10.63437/3083-6425-2026-2(101)-09

Рудик Олександр,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри природничо-математичної освіти і технологій
Інституту післядипломної освіти,
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка,
м. Київ, Україна

Rudyk Oleksandr,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Natural Sciences and Mathematics Education and Technologies,
Institute of In-Service Training, Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University,
Kyiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0003-3676-0688

ВИВЧЕННЯ ПОНЯТТЯ ГРУПИ ПІД ЧАС ПРОФІЛЬНОГО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Анотація.
У статті розглянуто зміст вивчення початків теорії груп у закладах загальної середньої освіти. Подано виклад початків теорії груп, пристосований для роботи з учнями. За допомогою простих змістовних прикладів дослідження структури групи підстановок створено передумови для індуктивного методу навчання за можливості поєднання з навчанням програмування. Сформульовано твердження, які можна використати під час побудови ефективних алгоритмів, зокрема в процесі розв'язування олімпіадних задач з інформатики. Матеріал статті можна без додаткової адаптації використати під час профільного навчання математики в закладах загальної середньої освіти, у позакласній роботі, для підготовки учнів до конкурсів учнівських наукових робіт, на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики.
Ключові слова: *критичне мислення; логіка вивчення математики; група; дія групи на множині; наочність прикладів.*

STUDYING THE CONCEPT OF A GROUP IN THE PROFESSIONAL STUDY OF MATHEMATICS IN GENERAL SECONDARY EDUCATION INSTITUTIONS

Summary.
The study of mathematics at school is traditionally associated with the development of logical thinking. In fact, the goal of strictly logically consistent study of mathematics is not proclaimed in the curricula. And with the content proposed in the current curricula, it is not achieved and cannot be achieved. The lack of strict formulations and the ability to deduce the properties of objects from them forces students to adapt to the teaching methodology, in which only what the teacher draws attention to is proven. The problem is not only that some knowledge is not obtained, and skills and abilities are not developed. The worst thing is that the ability to think critically is suppressed by the need to adapt to such a logically inconsistent study of mathematics and a misconception about mathematics in the modern sense has been created.

The paper presents an overview of the beginnings of group theory, adapted for work with students. Simple but meaningful examples of studying the structure of a permutation group are given, including using a computer experiment. Thus, the prerequisites for an inductive method of teaching the beginnings of group theory, including integrated with information technologies, are created. It is formulated with statements that are sometimes overlooked when studying higher algebra in higher education institutions and which can be used in constructing effective algorithms. For example, when solving some problems of Olympiad in Informatics. The paper explains which elements of the theory it is convenient to motivate for studying by the need to solve certain algorithmic problems.

The presented results can be used in specialized mathematics teaching in schools, in extracurricular work, to prepare students for intellectual competitions, and in advanced training courses.
Keywords: *critical thinking; logic of learning mathematics; group; action of group on set; clarity of examples.*

Постановка проблеми. За яких обставин потрібно знайомити здобувачів загальної середньої освіти з елементами теорії груп? І чи потрібно це робити взагалі? У разі спрямування курсу математики на виконання навчальної програми лише з метою складання ЗНО/НМТ, ознайомлення з поняттям групи є зайвим. Можливо, навіть шкідливим в умовах браку часу на вироблення навичок розв'язування типових задач. Проте, намагаючись дати цілісне уявлення про математику з максимальним використанням можливостей її профільного вивчення для розумового розвитку здобувачів освіти, уникнути використання поняття групи неможливо. Річ не в тому, щоб долучити до шкільної програми додаткові цікаві знання. Існують розділи математики, що істотно динамічніше розвивалися в останні десятиліття. Важливо інше: вже на початку профільного вивчення математики сформувати правильне уявлення щодо строгості міркувань та культури висловлювання. Інакше кажучи, цей зміст навчання не є самоціллю. І значення його як основи для наступних розділів не таке велике, як інструменту вміння зосереджувати увагу та критично мислити. Наприклад, під час відповіді на такі запитання:

– тотожність правого та лівого оберненого елементів – це властивість конкретної алгебраїчної структури (наприклад, множин чисел: цілих за додаванням; раціональних, відмінних від нуля, чи додатних раціональних за множенням) чи властивість, притаманна всім групам;

– єдиність одиниці й тотожність правої та лівої одиниць – це властивість конкретної алгебраїчної структури чи властивість, притаманна всім групам;

– перелічені вище властивості можна довести чи потрібно постулювати в означенні?

Теорію груп започаткував французький математик Еварист Галуа (1811–1832). Але мова теорії груп – це мова *сучасної* математики, використання якої й досі приносить нові результати [1; 2]. Деякі складні комбінаторні задачі мають простий алгоритм розв'язання, отриманий як наслідок теореми Редфілда–Пойя [3, с. 48], сформульованої та доведеної з використанням теорії груп.

Аналіз актуальних джерел. Проблему вивчення абстрактної алгебри в середній школі розглянуто в огляді [4], зокрема на досвіді реформи «Нова математика». Її впроваджували в американських школах у 1950–1970-х роках. Аналогічні дії були в Німеччині, Франції та СРСР. Попри початковий ентузіазм і широке впровадження реформи в старшій школі, вона зіткнулася з критикою, коли учнів почали ознайомлювати з відповідними математичними поняттями вже в початковій школі. Рівень підготовки вчителів початкової школи щодо математики виявився незадовільним, а система підвищення їхньої кваліфікації – виявилася не такою ефективною, як для вчителів старших класів. Стверджували, що реформа надмірно наголошувала на абстрактних поняттях на шкоду практичному застосуванню. Ця критика, разом із занепокоєнням щодо складності та доступності реформованої програми, сприяла занепаду реформи. Висновки щодо вивчення математичних абстракцій у середній школі в повному обсязі такі: його не можна починати передчасно та його потрібно супроводжувати максимально простими і доступними для сприйняття прикладами. Наприклад, так, як було зроблено щодо використання графів дітьми дошкільного віку [5]. У праці [6, с. 11] подано концепцію викладання, що використовує групи симетрій геометричних фігур і зосереджена на елементах теорії груп для середньої освіти. Автори переконані, що, попри очевидні труднощі на початку навчання, необхідно вивчати абстрактну алгебру в школі, адже виграш від цього може бути дуже істотним. За такого навчання менше відтворюватимуться алгоритми, менше розв'язуватимуться однотипні задачі. Відтворення шаблонів не буде стратегією успіху. Замість цього варто робити наголос на дослідженні структур і відповідному розвитку структурного мислення [6, с. 21].

Щодо типових проблем такого навчання в дослідженні [7, с. 10] виявлено, що під час з'ясування наявності структури групи комутативність і асоціативність часто залишають неперевіреними, ці властивості часто плутають. Згідно з даними цього самого дослідження учні вважають, що ізоморфність груп означає їхню ідентичність (27 %) або, що їхні таблиці Келі однакові (17 %) [7, с. 12].

Істотним для «Нової математики» були вимоги до логіки викладу та структурування змісту. І тут не можна не згадати модель ван Хіле, використання якої виявляється ефективним уже у 8 класі під час вивчення геометрії [8, с. 15–19]. Узагальнивши цю модель до опису опанування довільної математичної теорії, можна виокремити такі п'ять рівнів:

1) відтворення й використання означення понять та їхніх властивостей;

2) виявлення й формулювання залежності одних властивостей понять від інших;

3) формулювання та доведення тверджень про залежність одних властивостей понять від інших, встановлення правильності розв'язання задач;

4) використання викладу аксіоматичної теорії для певної реалізації;

5) використання викладу аксіоматичної теорії безвідносно до конкретної реалізації.

Чинні підручники з математики [9] для закладів загальної середньої освіти передбачали в минулому й передбачають зараз:

– обов'язкове опанування теорії на перших двох рівнях в усіх загальноосвітніх навчальних закладах;

– опанування теорії на рівні 3 (локальна дедукція) повністю лише в класах із поглибленим вивченням математики.

Останнє спостерігаємо *ситуативно*: там, де про це скаже вчитель. Дії додавання та множення вивчають із початкової школи. Але про те, що є означенням, а що потрібно доводити, учням наразі не скажуть навіть у процесі профільного вивчення математики. Такі ж проблеми є щодо безпосередніх наслідків аксіом планіметрії. Варто зауважити, що в закладі вищої освіти студенти одразу працюють на 3–4 рівнях. Тому природним для *якісної профільної* освіти видається повідомлення учням про наявність усіх перелічених 5 рівнів та навчання на 3 рівні з показом можливості 4 рівня. Інакше буде свідомо загальмовано розвиток критичного мислення на уроках математики. Чого не варто робити, адже математичні компетентності лише посилюються в процесі інтеграції з навичками критичного мислення, хоча величина ефекту залежить від методологічного дизайну, контексту впровадження та тривалості втручання [10, с. 12].

Мета статті – дати вичерпний опис запровадження поняття групи, прийнятний для вчителів-початківців і для здобувачів загальної середньої освіти. Навіть під час навчання факультативно чи самостійно поза умовами профільного вивчення математики. Для цього використано розгляд групи підстановок 3 елементів, що має прозоре геометричне тлумачення. Це надає можливість використати індуктивний метод для вивчення властивостей групи, що видається доступнішим для учнів, ніж суто дедуктивний метод.

Виклад основного матеріалу. За логічно послідовного вивчення шкільного курсу математики поняття групи доцільно запровадити безпосередньо після запровадження цілих чисел як класів еквівалентності пар натуральних чисел. Множина цілих чисел є найлегшим для сприйняття прикладом групи за додаванням і хронологічно першим змістовним прикладом групи, обов’язкової для вивчення задовго до ознайомлення з рухами площини чи простору.

Означення 1. *Множину G називають групою, якщо справджуються такі висловлювання.*

1. *Задано закон множення (композиції), який впорядкованій парі (a; b) елементів G ставить у відповідність добуток ab – елемент G, який називають добутком b на a зліва або добутком a на b справа.*

2. *Справджується сполучний закон множення: (ab) c = a (bc).*

3. *Існує ліва одиниця множення (нейтральний елемент) групи e, тобто такий елемент групи, множення на який зліва не змінює жодного елемента групи:*

$$ex = x.$$

4. *Для довільного елемента a групи існує лівий обернений до нього a^{-1}, тобто такий, за якого добуток оберненого елемента на сам елемент дорівнює лівій одиниці множення: $a^{-1} a = e$.*

Групу називають комутативною (абелевою), якщо множення є комутативним (має переставну властивість), тобто добуток не залежить від порядку співмножників: ab = ba.

Наприклад, множина цілих чисел є абелевою групою за додаванням. Закон асоціативності множення формулюють ще й так: добуток не залежить від порядку виконання дії множення (не плутати з порядком співмножників). Саме в такій редакції його потрібно поширити на більшу кількість співмножників, розуміючи добуток як, наприклад, результат виконання дії множення в порядку запису зліва направо: *abc = (ab) c, abcd = ((ab) c) d* тощо.

Множина взаємно однозначних відображень довільної множини в себе є групою щодо суперпозиції, тобто послідовного застосування відображень. Розглянемо, наприклад, множину взаємно однозначних відображень множини {1, 2, 3} на себе. Кожне таке відображення можна подати таблицею з 2 рядків і 3 стовпчиків, де у верхньому рядку записано аргументи 1, 2, 3, а в нижньому рядку – i_1, i_2, i_3 – образи (значення функції-відображення) цих аргументів. Перелічимо всі можливі такі відображення:

$$e_1 = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}.$$

Задача 1. Заповнити таблицю множення (її ще називають таблицею Келі), у якій назви рядків і стовпчиків – позначення взаємно однозначних відображень множини {1, 2, 3}, що є відповідно лівими та правими множниками, а вписуваний елемент таблиці – позначення для добутку (суперпозиції) цих відображень. Чи можна стверджувати, що множина з заданим законом композиції є групою? Які ще висновки можна зробити щодо цієї множини?

Відповідь.

Таблиця 1

Таблиця Келі взаємно однозначних відображень множини {1, 2, 3}

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_2	e_2	e_3	e_1	e_6	e_4	e_5
e_3	e_3	e_1	e_2	e_5	e_6	e_4
e_4	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_6	e_4	e_3	e_1	e_2
e_6	e_6	e_4	e_5	e_2	e_3	e_1

1. Верхній *вписаний* рядок містить назви стовпчиків у тому самому порядку. Лівий *вписаний* стовпчик містить назви рядків у тому самому порядку. Інакше кажучи, $e_1\, e_j = e_j\, e_1 = e_j$ при $j = 1, 2, \ldots, 6$. Тобто, e_1 – нейтральний елемент при множенні як зліва, так і справа. Більше таких елементів (хоча б для множення з одного боку) немає.

2. У кожному вписаному рядку та в кожному вписаному стовпчику e_1 записано один раз. Інакше кажучи, для кожного елемента існує один обернений елемент.

3. У заповнених клітинках позначення нейтрального елемента e_1 розташовано симетрично відносно головної діагоналі. Маємо: обернений елемент при множенні зліва є оберненим елементом при множенні справа.

4. Справджується сполучний закон множення, що можна перевірити, використавши створену таблицю множення, або довести, виходячи з визначення досліджуваної множини.

5. Досліджувана множина має структуру групи та певні властивості (див. пункти 1 і 3), не перелічені в означенні групи. Природно дослідити, чи притаманні ці властивості довільній групі.

6. Підмножина $\{e_1, e_2, e_3\}$ має структуру абелевої групи. Кількість її елементів є дільником кількості елементів початкової групи, що її містить і не є абелевою (наприклад, $e_5\, e_6 \neq e_6\, e_5$).

Найменш виснажливий спосіб отримання таблиці Келі – використати комп'ютерне моделювання. Подану у відповіді до задачі 1 *табл. 1* можна отримати за допомогою такої програми мовою Python (обрано мову, яку використано у більшості українських шкільних підручників з інформатики, проте це не принципово).

```
n=6 # кількість елементів групи
# подання групи перестановками
a=[[0,1,2],[1,2,0],[2,0,1],[0,2,1],[2,1,0]
,[1,0,2]]

for j in range(n):
  s="e_"+str(j+1)
  for k in range(n):
        b=[a[j][a[k][0]],a[j][a[k][1]],a[j]
[a[k][2]]]
    for l in range(n):
        if ((b[0]==a[l][0]) and (b[1]==a[l]
[1])and
        (b[2]==a[l][2])): s=s+"&e_"+str(l+1)
  print(s)
```

Тут номери елементів зменшено на 1 для спрощення коду – у мові Python нумерацію елементів списку починають з нуля. Програма виводить частину тексту у форматі видавничої системи LATEX.

Теорема 1. *Для довільної групи справджуються такі висловлювання.*

1. *Лівий обернений елемент є правим оберненим елементом, який* для кожного елемента групи *єдиний: $a\, a^{-1} = e$.*

2. *Ліва одиниця є також правою одиницею, тобто множення на неї справа не змінює жодного елемента групи: $ae = a$.*

3. *Одиниця множення в групі єдина.*

Доведення:

– помножимо зліва рівність $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ на елемент, обернений до a^{-1} і використаємо асоціативність множення. У результаті отримаємо: $aa^{-1} = e$, тобто лівий обернений елемент є також правим оберненим;

– $a = ea = (aa^{-1})\, a = a\, (a^{-1}a) = ae$, тобто кожна ліва одиниця є одночасно правою одиницею;

– помноживши зліва та справа довільний елемент a групи на його обернені b і c та по-різному розставляючи дужки, легко пересвідчитися, що обернений елемент єдиний: $b = b\,(ac) = (ba)\, c = c$;

– обчислюючи добуток лівих і правих одиниць групи e та e', пересвідчуємося, що одиниця групи єдина: $e = ee' = e'$.

Означення 2. *Запровадимо такі поняття.*

1. *Непорожню підмножину A групи G називають підгрупою групи G, якщо:*
   - *добуток двох елементів A також належить до A;*
   - *елемент, обернений до елемента з A також належить до A.*

2. *Нехай A – підгрупа групи G. Правим класом групи G за підгрупою A називають множину вигляду $Ax = \{ax \mid a \in A\}$, де x – довільний елемент групи G (аналогічно означають лівий клас суміжності).*

3. *Підстановкою називають взаємно однозначне відображення скінченної множини у себе. Не обмежуючи загальності міркувань, далі розглянемо лише множини всіх перших n натуральних чисел вигляду* $\{1, 2, ..., n\}$.

4. *Транспозицією називають підстановку, яка кожному елементу, за виключенням двох, ставить у відповідність цей самий елемент.*

5. *Множину всіх підстановок на множині* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *називають симетричною групою та позначають S_n.*

6. *Порушенням порядку підстановки на множині* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *що числу j ставить у відповідність число i_j при $j = 1, 2, \ldots, n$, називають сумісну систему таких двох нерівностей: $j < k$ та $i_j > i_k$.*

7. *Підстановку називають парною, якщо кількість транспозицій, у добуток яких можна розкласти дану підстановку, є парною.*

8. *Множину всіх парних підстановок на множині* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *при натуральному n називають знакозмінною групою і позначають A_n.*

9. *Циклом довжини k називають підстановку, яка певний елемент j_1 відображає у деякий елемент j_2, j_2 – в j_3, …,*

j_{k-1} – в j_k, j_k – в j_1 за умови, що всі елементи $j_1, j_2, \ldots, j_k$ – різні. Такий цикл позначають $(j_1 j_2 \ldots j_k)$.

10. *Дві групи називають ізоморфними, якщо існує взаємно однозначне відображення f однієї групи в іншу, при якому образ добутку елементів однієї групи є добутком образів співмножників у тому самому порядку: f (ab) = f (a) f (b). Таке відображення f називають ізоморфізмом відповідних груп.*

Ізоморфність груп означає не тотожність таблиць Келі цих груп, а можливість отримання однієї таблиці з іншої шляхом однакових переставлянь рядків і стовпчиків.

Задача 2. Для кожного з пунктів означення 2 вказати, який вигляд мають ці поняття для групи, розглянутої в задачі 1.

Відповідь.

1. Множина $\{e_1, e_2, e_3\}$ має структуру абелевої групи та є підгрупою групи $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.
2. При $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ маємо: $Ae_4 = Ae_5 = Ae_6 = \{e_4, e_5, e_6\}$.
3. Кожний з елементів $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ є підстановкою в 3-елементній множині.
4. Лише e_4, e_5, e_6 є транспозиціями.
5. $S_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.
6. У підстановках $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ кількість порушень порядку відповідно дорівнює 0, 2, 2, 1, 3, 1.
7. Підстановки e_1, e_2, e_3 є парними, підстановки e_4, e_5, e_6 є непарними.
8. $A_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$.
9. $e_1 = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}; e_4 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}; e_5 = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}; e_6 = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$.
10. Якщо тлумачити 1, 2, 3 як номери вершин правильного трикутника, то отримуємо ізоморфність S_3 і групи симетрій правильного трикутника:

– e_1, e_2, e_3 відповідають поворотам правильного трикутника навколо його центра відповідно на 0°, 120° і 240°;

– e_4, e_5, e_6 відповідають дзеркальним симетріям правильного трикутника відносно прямих, що проходять через одну з вершин трикутника перпендикулярно до протилежної сторони.

Доведення поданих далі зауважень 1–3 та теореми 2 тут не подано, оскільки вони є нескладними в разі унаочнення.

Зауваження 1. *Довільну підстановку можна подати добутком циклів без спільних елементів.*

Зауваження 2. *Для довільної скінченної групи множення справа (зліва) на певний елемент задає підстановку на множині елементів цієї групи. Тому довільна скінченна група ізоморфна підгрупі Sn, де n – кількість елементів групи.*

Зауваження 3. *Класи суміжності за однією підгрупою мають однакову кількість елементів, що збігається з кількістю елементів підгрупи.*

Теорема 2. *Справджуються такі висловлювання:*

1. *Транспозиція, що переставляє сусідні натуральні числа, змінює кількість порушень порядку на 1.*
2. *Довільна транспозиція змінює кількість порушень порядку на непарне число.*
3. *Парність кількості транспозицій у розкладі підстановки не залежить від конкретного подання добутком транспозицій і збігається з парністю кількості порушень порядку.*
4. *Цикл із непарної довжиною є добутком парної кількості транспозицій.*
5. *Цикл із парної довжиною є добутком непарної кількості транспозицій.*
6. *Підстановка є парною тоді й лише тоді, коли її подання добутком циклів без спільних елементів містить парну кількість циклів парної довжини.*
7. *Період підстановки, тобто найменший натуральний степінь підстановки, що є тотожною підстановкою, дорівнює найменшому спільному кратному довжин циклів без спільних елементів, добутком яких вона є.*

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Подати підстановки на множині вершин циклами без спільних елементів симетрії правильного: а) чотирикутника; б) п'ятикутника; в) тетраедра. Дати геометричне тлумачення кожної підстановки.
2. Довести, що кількість симетрій куба вдвічі більша від кількості симетрій правильного тетраедра.

Виклад теорії з успішним опитуванням апробовано автором у процесі навчання учнів 9 класу Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка як частину логічно послідовного шкільного курсу математики.

Охочим поглибити чи розширити знання щодо властивостей груп (характеристика підстановки, цикловий індекс, орбіта, стабілізатор, лема Бернсайда, теорема Редфілда – Пойа) рекомендуємо матеріал автора «Вибрані питання дискретної математики. Перелік графів і теорема Редфілда-Пойа» [3].

У деяких завданнях олімпіади з інформатики [11] згадані вище елементи теорії груп використано для побудови ефективного за часом алгоритму (далі вказано рік/номер етапу/порядковий номер і назва задачі):

– означення 1 – 2005/3/3. Многогранник 2;

– задача 1, означення 2.9 – 2004/2/2. Підстановки, 2007/3/1.Сортувальник;

– означення 2.9 – 2008/3/1. Сновида-2;

– зауваження 1 – 2007/2/1. Сновида;

– теорема 2 — 2011/3/4. Парність;

– наслідок теореми Редфілда–Пойа – 2013/3/2. Фарбування, 2016/3/6. Парасолька.

Запровадження окремих понять, як і доведення окремих тверджень зручно здійснювати в процесі розбору ідеї розв'язання одного з перелічених вище завдань, як це робив автор для учнів міста Києва при проведенні занять гуртка з прикладної математики. Наприклад, запровадження поняття циклу, розбиття підстановки на добуток циклів без спільних елементів і останнє твердження Теореми 2 природним чином виникають у процесі розгляду задачі 2007/2/1. Сновида.

Висновки. Таким чином, маємо вичерпний опис запровадження поняття групи, прийнятний для вчителів-початківців і учнів. Ознайомлення вчителів, а через них і учнів, із запровадження поняттями та властивостями сприятиме розвитку математичної, зокрема алгебраїчної компетентності. Подані твердження забезпечують можливість індуктивного методу подання змісту і слугують основою ефективних алгоритмів для розв'язання різноманітних задач, зокрема олімпіадних задач з інформатики. Подальші дослідження можна спрямувати на розвиток методики вивчення групи рухів площини та простору, щоб уже у школі дати правильне уявлення про геометрію як науку, що вивчає властивості фігур, незмінні за дії певної групи перетворень простору.

Отримані результати можна використати під час профільного навчання математики в закладах загальної середньої освіти, у позакласній роботі, для підготовки учнів до конкурсів учнівських наукових робіт, на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики.

Використані літературні джерела

1. Guo P., Lan Y., Qiao J. Exact solutions of differential equations: renormalization group based polynomial scheme. *Communications in Theoretical Physics.* 2025. Vol. 77, No. 10. 105005. DOI: https://doi.org/10.1088/1572-9494/add24e.
2. Liu J. G., Guo X. R., Gui L. L. Lie symmetry scheme to the generalized Korteweg-de Vries equation with Riemann–Liouville fractional derivative. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics,* 2026. Vol. 23. No. 1, 2440020. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219887824400206.
3. Рудик, О. Б. Вибрані питання дискретної математики. Перелік графів і теорема Редфілда–Пойа. *Комп'ютер у школі та сім'ї.* 2013. № 7. С. 44–51. URL: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/komp_2013_7_12.pdf.
4. Alam A., Mohanty A. Unveiling the complexities of 'Abstract Algebra' in University Mathematics Education (UME): fostering 'Conceptualization and Understanding' through advanced pedagogical approaches. *Cogent Education.* 2024, Vol. 11. No. 1. DOI: https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2355400.
5. Papy, F., Papy, G., Incolle, D. L'enfants et les graphes. Bruxelles – Montreal – Paris: Didier, 1968. 189 p.
6. Veith J. M., Bitzenbauer P. What group theory can do for you: From magmas to abstract thinking in school mathematics. *Mathematics.* 2022. Vol. 10. No. 5. 703. DOI: https://doi.org/10.3390/math10050703.
7. Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. Exploring Learning Difficulties in Abstract Algebra: The Case of Group Theory. *Education Sciences.* 2022. 12 (8), 516. DOI: https://doi.org/10.3390/educsci12080516.
8. Salud M., Delos M., Monaliza L., Demaisip A. The Van Hiele model in teaching geometry. *World.* 2022. Vol. 4. No. 1. P. 10–22. DOI: https://doi.org/10.18488/119.v4i1.3087.
9. Шкільні підручники. URL: https://pidruchnyk.com.ua/.
10. Alvarez-Tinajero N., Basantes-Andrade A., Ayala-Vásquez O., Pereira-González L. M., & Arciniegas-Romero G. Mathematical Competencies and Critical Thinking in Secondary Education: A PRISMA-Based Systematic Review (2019–2025). *F1000Research.* 2026. Vol. 14, 1407. DOI: https://doi.org/10.12688/f1000research.173462.2.
11. Київські учнівські олімпіади з інформатики станом на 1 вересня 2025 року. Зміст. 2025. URL: https://www.kievoi.ippo.kubg.edu.ua/kievoi/index1.html.

References

1. Guo, P., Lan, Y., & Qiao, J. (2025). Exact solutions of differential equations: Renormalization group based polynomial scheme. *Communications in Theoretical Physics, 77*(10), 105005. DOI: https://doi.org/10.1088/1572-9494/add24e.
2. Liu, J. G., Guo, X. R., & Gui, L. L. (2026). Lie symmetry scheme to the generalized Korteweg-de Vries equation with Riemann-Liouville fractional derivative. I*nternational Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 23*(1), 2440020. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219887824400206.
3. Rudyk, O. B. (2013). Vybrani pytannia dyskretnoi matematyky. Perelik hrafiv i teorema Redfilda-Poia [Selected issues of discrete mathematics. Enumeration of graphs and the Redfield-Polya theorem]. *Kompiuter u shkoli ta simi - Computer in School and Family,* (7), 44-51. Retrieved from: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/komp_2013_7_12.pdf [in Ukrainian].
4. Alam, A., & Mohanty, A. (2024). Unveiling the complexities of 'Abstract Algebra' in University Mathematics Education (UME): Fostering 'Conceptualization and Understanding' through advanced pedagogical approaches. *Cogent Education, 11*(1), 2355400. DOI: https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2355400.
5. Papy, F., Papy, G., & Incolle, D. (1968). L'enfants et les graphes. Bruxelles, Montreal, Paris. 189 p.
6. Veith, J. M., & Bitzenbauer, P. (2022). What group theory can do for you: From magmas to abstract thinking in school mathematics. *Mathematics, 10*(5), 703. DOI: https://doi.org/10.3390/math10050703.
7. Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. (2022). Exploring Learning Difficulties in Abstract Algebra: The Case of Group Theory. *Education Sciences, 12*(8), 516. DOI: https://doi.org/10.3390/educsci12080516.
8. Salud, M., Delos, M., Monaliza, L., & Demaisip, A. (2022). The Van Hiele model in teaching geometry. *World, 4*(1), 10-22. DOI: https://doi.org/10.18488/119.v4i1.3087.

9. Shkilni pidruchnyky [School textbooks]. (n.d.). Kyiv. Retrieved from: https://pidruchnyk.com.ua/ [in Ukrainian].
10. Alvarez-Tinajero, N., Basantes-Andrade, A., Ayala-Vásquez, O., Pereira-González, L. M., & Arciniegas-Romero, G. (2026). Mathematical Competencies and Critical Thinking in Secondary Education: A PRISMA-Based Systematic Review (2019-2025). *F1000Research,* 14, 1407. DOI: https://doi.org/10.12688/f1000research.173462.2.
11. (2025). Kyivski uchnivski olimpiady z informatyky stanom na 1 veresnia 2025 roku. Zmist [Kyiv school olympiads in informatics as of September 1, 2025. Contents]. Retrieved from: https://www.kievoi.ippo.kubg.edu.ua/kievoi/index1.html [in Ukrainian].

Прийнято 26 квітня 2026 року.
Затверджено 14 травня 2026 року.
Опубліковано 31 травня 2026 року.