Ніна Миколаївна РУДЕНКО,
викладач циклової комісії економіко-математичних дисциплін та менеджменту Університетського коледжу Київського університету імені Бориса Грінченка

ДЕЯКІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Ми ніколи не станемо математиками, навіть знаючи напам'ять усі чужі доведення, якщо наш розум нездатний самостійно розв'язувати які б то не було проблеми.
Рене Декарт

Мета заняття:

- формувати у студентів уміння розв'язувати тригонометричні рівняння різними способами (заміни змінних; зведення до однієї тригонометричної функції з однаковим аргументом; розкладанням на множники; введення допоміжного кута; зведення до однорідного рівняння);
- розвивати логічне мислення, уяву, пам'ять;
- виховувати інтерес до математики, уважність, відповідальність, культуру математичних записів, позитивне ставлення до навчання.

Вид заняття: *комбіноване*: лекція — 1год, практичне заняття — 1год.

Тип заняття: засвоєння нових знань

Забезпечення заняття: текст лекції, підбірка вправ, роздатковий матеріал, що містить теоретичні відомості, дошка, комп'ютер, мультимедійний проектор, екран.

Категорійно-понятійний масив заняття: найпростіші тригонометричні рівняння та їхні розв'язки, періодичність тригонометричних функцій.

Студенти розрізняють види тригонометричних рівнянь, використовують період функції для розв'язування рівнянь

ХІД ЗАНЯТТЯ

Актуалізація опорних знань

(*Студенти розрізняють види тригонометричних рівнянь і розв'язують найпростіші рівняння виду* $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\text{tg} x = a$, $\text{ctg} x = a$).

Сьогодні на занятті будемо розв'язувати складніші тригонометричні рівняння і познайомимося з деякими способами розв'язування тригонометричних рівнянь.

1. Перевірка домашнього завдання.

(*Усно*) Для чого було введено поняття арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккосинуса? (*Відповідь:* для розв'язування тригонометричних рівнянь).

Математичний диктант (слайд презентації) (*студенти виконують на листочках*)

1. Якою формулою записується розв'язок рівняння $\cos x = a$?
2. Який розв'язок рівняння $\cos x = 0$?
3. Який розв'язок рівняння $\cos x = 1$?
4. Який розв'язок рівняння $\cos x = -1$?
5. Як знайти $\arccos(-a)$?
6. Якою формулою записується розв'язок рівняння $\sin x = a$?
7. Який розв'язок рівняння $\sin x = 0$?
8. Який розв'язок рівняння $\sin x = 1$?
9. Який розв'язок рівняння $\sin x = -1$?
10. Як знайти $\arcsin(-a)$?
11. Якою формулою записується розв'язок рівняння $\text{tg} x = a$?
12. Якою формулою записується розв'зок рівняння $\text{ctg} x = a$?

Перевірка відповідей (слайд презентації) (*студенти обмінюються листочками*).

1) $\cos x = a$, $-1 \le a \le 1$, $x = \pm\arccos a + 2\pi n + 2\pi n$, $n \in Z$.

2) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

3) $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

4) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

5) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

6) $\sin x = a$, $-1 \le a \le 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$.

7) $\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in Z$.

8) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

9) $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

10) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

11) $\text{tg} x = a$, $x = \text{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

12) $\text{ctg} x = a$, $x = \text{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

2. Повідомлення теми заняття, мети та мотивація навчальної діяльності.

3. Пояснення навчального матеріалу.

Тригонометричні рівняння складні, тому класифікуємо їх, запишемо алгоритми розв'язань деяких рівнянь і будемо їх застосовувати.

1) *Заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь.*

Є тригонометричні рівняння, які шляхом поточних перетворень можна звести до рівнянь з однією тригонометричною функцією, потім зробити заміну і звести до алгебраїчного рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ (слайд презентації).

(*У ході пояснення викладач ставить питання студентам, спонукає їх до спільного обговорення розв'язання. Студенти записують розв'язання у зошит.*)

Розв'язання. Уведемо нову змінну $t = \sin x$. Область визначення функції $\sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, тому $t \in [-1; 1]$.

Тоді дане рівняння матиме вигляд $2t^2 + t - 1 = 0$.

Розв'яжемо його: $D = 1 + 8 = 9$, $t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$.

Тому, $\sin x = \frac{1}{2}$ або $\sin x = -1$.

1) $\sin x = \frac{1}{2}$,

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

2) $\sin x = -1$,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь: $\{(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.\}$

2) *Розв'язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції (з однаковим аргументом).*

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$ (слайд презентації).

(Обговорюється хід розв'язування рівняння, проектується розв'язання, студенти записують його у зошит).

Замінимо $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ і отримаємо квадратне рівняння відносно $\cos x$.

$$6(1-\cos^2 x)+5\cos x-2=0,$$
$$-6\cos^2 x+5\cos x+4=0,$$
$$6\cos^2 x-5\cos x-4=0.$$

Нехай $\cos x=t$, $t\in[-1;1]$, тоді $6t^2-5t-4=0$, $t_1=-0{,}5$, $t_2=\frac{4}{3}$ — сторонній корінь. Отже, $\cos x=-0{,}5$,

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Відповідь: $\{x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.\}$

Алгоритм *розв'язування рівнянь зведенням до однієї функції*

(*з однаковим аргументом*).

1. Спробувати всі тригонометричні функції звести до одного аргументу.

2. Якщо вдалося звести до одного аргументу, то спробувати всі тригонометричні вирази звести до однієї функції.

3. Зробити заміну.

4. Звести рівняння до квадратного.

5. Розв'язати квадратне рівняння.

6. Повернутись до заміни і розв'язати утворені рівняння.

7. Записати відповідь.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\mathrm{tg}x+2\mathrm{ctg}x=3$ (слайд презентації)

(*Чи можна це рівняння записати відносно однієї тригонометричної функції? Виконайте це. Чи можна це рівняння записати у вигляді квадратного рівняння відносно однієї змінної? Розв'яжіть рівняння, перевірте правильність виконання, виправте помилки.*)

Розв'язання. Оскільки $\mathrm{ctg}x=\frac{1}{\mathrm{tg}x}$, то рівняння можна записати у вигляді

$$\mathrm{tg}x+\frac{2}{\mathrm{tg}x}=3.$$

Позначимо $\mathrm{tg}x=t$. Отримаємо рівняння $t+\frac{2}{t}=3$, яке зводиться до квадратного

$$t^2-3t+2=0,\ t\neq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=2,\\ t_2=1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x=2\\ \mathrm{tg}x=1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\mathrm{arctg}2+\pi n,\ n\in Z\\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{arctg2+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi k, n, k\in Z\right\}$.

3) *Розв'язання тригонометричних рівнянь за допомогою розкладання на множники.*

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{8}$. (слайд презентації)

Розв'язання. У лівій частині рівняння винесемо за дужки спільний множник і застосуємо формули подвійного кута: $\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=\frac{\sqrt{2}}{8}$,

$$\frac{1}{2}\sin 2x(-\cos 2x)=\frac{\sqrt{2}}{8},$$
$$-\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{\sqrt{2}}{8},$$
$$\sin 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$4x=(-1)^k(-\frac{\pi}{4})+\pi k,\ k\in Z;$$
$$x=\frac{\pi}{16}(-1)^{k+1}+\frac{\pi}{4}k,\ k\in Z.$$

Відповідь: $x\in\left\{\frac{\pi}{16}(-1)^{k+1}+\frac{\pi}{4}k, k\in Z\right\}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sin 7x=\sin 5x$ (викладач розв'язує на дошці з коментарем).

Досить важко всі тригонометричні функції в цьому рівнянні звести до одного аргументу. У такому випадку переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю.

$$\sin 7x-\sin 5x=0,$$
$$2\sin\frac{7x-5x}{2}\cos\frac{7x+5x}{2}=0,$$
$$2\sin x\cos 6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos 6x=0\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x=\pi n,\ n\in Z\\ 6x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6},\ m\in Z\}$

4) *Однорідні тригонометричні рівняння.*

Якщо всі члени рівняння у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної) мають однаковий сумарний степінь, то рівняння називається *однорідним*. Розв'язують однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї змінної.

Зауваження. Дотримуючись цього орієнтира, доводиться ділити обидві частини рівняння на вираз зі змінною. При цьому можлива втрата коренів, якщо коренями є числа, при яких дільник дорівнює нулю. Щоб уникнути втрати коренів, необхідно окремо розглянути випадок, коли вираз, на який діляться обидві частини рівняння, дорівнює нулю, і лише після цього виконувати ділення на вираз, що не дорівнює нулю.

Розглянемо рівняння виду $a\sin x+b\cos x=0$ (однорідне рівняння 1-го степеня), де a і b не дорівнюють нулю. Значення x, при яких $\cos x$ дорівнює нулю, не задовольняє даному рівнянню, бо тоді і $\sin x$ теж дорівнював би нулю, а $\cos x$ і $\sin x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю. Тому можна розділити обидві частини рівняння почленно на $\cos x$. Маємо: $\frac{a\sin x}{\cos x}+\frac{b\cos x}{\cos x}=0$,

$$a\,\mathrm{tg}x+b=0,$$
$$\mathrm{tg}x=-\frac{b}{a}.$$

Розв'язавши дане тригонометричне рівняння отримуємо корені.

Рівняння виду $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ називається *однорідним* рівнянням 2-го степеня. Якщо числа a, b, c не дорівнюють нулю, то розділимо дане рівняння на $\cos^2 x$ (або на $\sin^2 x$). (У даному рівнянні $\cos^2 x\neq 0$, бо в супротивному випадку $\sin^2 x=0$, а $\cos x$ і $\sin x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю).

Тоді $\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x}+\frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$;

$$a\,\mathrm{tg}^2x+b\,\mathrm{tg}x+c=0.$$

Розв'язавши отримане, рівняння одержимо корені даного рівняння.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x.$$

(*Рівняння розв'язується на дошці. До обговорення залучаються студенти. При цьому коментується кожен крок.*)

Враховуємо, що $\cos x\neq 0$, і рівняння $3\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$ ділимо на $\cos^2 x$. Отримуємо рівняння $3\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x-2=0$.

Заміна $\mathrm{tg}x=t$, $3t^2+t-2=0$, $D=25$, $t_1=-1$, $t_2=\frac{2}{3}$.

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=-1,\\ \mathrm{tg}x=\frac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z\\ x_2=\mathrm{arctg}\frac{2}{3}+\pi n, n\in Z\end{array}\right.$$

Відповідь: $x=\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n, arctg\frac{2}{3}+\pi n, n\in Z\right\}$.

Рівняння виду

$$a_n\sin^n x+a_{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\ldots+$$
$$+a_1\sin x\cos^{n-1}x+a_0\cos^n x=0$$

називається *однорідним рівнянням n-го степеня* відносно синуса і косинуса.

Якщо жоден із коефіцієнтів $a_0,a_1,\ldots a_n$ не дорівнює нулю, то, розділивши обидві частини рівняння почленно на $\cos^n x$, одержимо рівняння n-го степеня відносно $\mathrm{tg}\,x$. Якщо хоча б один із коефіцієнтів $a_0,a_1,\ldots a_n$ дорівнює нулю, то перш, ніж виконувати ділення на $\cos^n x$, слід довести, що $\cos^n x\neq 0$, тобто, $\cos x\neq 0$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sin x+2\cos x+2\sin x\cos^2 x=0$ (слайд презентації).

Рівняння *неоднорідне*, але зводиться до нього. Використаємо тригонометричну одиницю, помноживши на неї суму перших двох доданків лівої частини рівняння. Це дає можливість звести дане рівняння до однорідного рівняння третього степеня відносно *sin x* і *cos x*. Матимемо

$$(\sin x+2\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cos^2 x=0.$$
$$\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x+3\sin x\cos^2 x+2\cos^3 x=0.$$

Оскільки не існує таких значень x, для яких $\sin x$ і $\cos x$ одночасно перетворюються в нуль, можемо поділити ліву та праву частини рівняння на $\cos 3x\neq 0$. Матимемо $\mathrm{tg}^3x+2\mathrm{tg}^2x+3\mathrm{tg}x+2=0$.

Отримали алгебраїчне рівняння відносно $\mathrm{tg}x$. Вводимо заміну $\mathrm{tg}x=y$.

Отримаємо $y^3+2y^2+3y+2=0$.

Згрупуємо доданки і матимемо

$$(y^3+y^2)+(y^2+y)+(2y+2)=0.$$

У результаті винесення спільного множника за дужки отримаємо:

$$(y+1)(y^2+y+2)=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}y=-1,\\ y^2+y+2=0.\end{array}\right.$$

Друге рівняння сукупності дійсних коренів не має. Розв'язуємо рівняння:

$$\mathrm{tg}x=-1,$$
$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathrm{Z}.$$

Відповідь: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathrm{Z}\right\}$.

5) *Метод введення допоміжного кута.*

Розглянемо рівняння виду $a\sin x+b\cos x=0$. Очевидно, що $a^2+b^2\neq 0$.

Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$ і покладемо $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$ та $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, маємо рівняння $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, або $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Отже, дістали просте тригонометричне рівняння, яке має розв'язки за умови $-1\leq\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1$.

4. Закріплення навчального матеріалу.

1) Установіть відповідність між рівнянням і методом розв'язання.

2) Розв'яжіть рівняння.

Рівняння	Методи
1) $\sin^2 3x - 3\sin 3x + 2 = 0$	а) зведення до однорідного рівняння n -го степеня.
2) $\cos 2x + 3\sin x = 2$	б) метод введення допоміжного кута.
3) $2\text{tg}\frac{x}{4} - 2\text{ctg}\frac{x}{4} = 3$	в) заміна змінних
4) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$	г) метод розкладання на множники.
5) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$	д) метод зведення до однієї функції (з однаковим аргументом).
6) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$	е) заміна змінних
7) $\cos 3x + \cos 5x = 0$	ж)….
8) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$	з)….
9) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$	і)…..

5. Підбиття підсумків заняття

Повторення вивченого, повідомлення домашнього завдання.