ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ 7–11 КЛАСІВ ДО ФІЗИЧНИХ ОЛІМПІАД

Ірина Іванівна ЗАДНІПРЯНЕЦЬ,
методист НМЦ природничо-математичної освіти ІППО Київського університету імені Б. Грінченка

Задача 1 (*7 клас*)

Учень виміряв густину дерев'яного бруска, вкритого фарбою, і отримав значення 600 кг/м³. Але насправді виявилось, що брусок складається з двох частин, маси яких рівні, але густина однієї частини удвічі більша за густину іншої. Визначити густини обох частин бруска. Масою фарби можна знехтувати.

Розв'язання

Нехай m – масса кожної з частин бруска, ρ_1 і $\rho_2=\rho_1/2$ – їх густини. Тоді частини бруска мають об'єми і $V_2=\dfrac{2m}{\rho_1}$ а весь брусок має масу $M = 2m$ і об'єм $V=\dfrac{3m}{\rho_1}$.

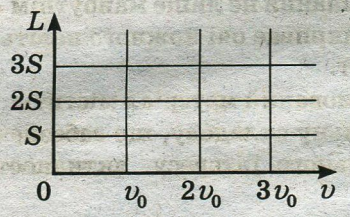
Середня густина бруска $\rho=\dfrac{2m}{3m/\rho_1}=\dfrac{2\rho_1}{3}$.

Звідси знайдемо густини частин бруска:

$$\rho_1=\frac{3\rho}{2}=900\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right),$$

$$\rho_2=\frac{3\rho}{4}=450\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right).$$

Задача 2 (*7 клас*)



Мал. 1

Автомобіль рухався з села у місто. Графік залежності пройденого шляху L від швидкості руху v поданий на *мал. 1*. Визначити середню швидкість автомобіля $v_{сер}$ за весь час руху, якщо v_0 = 22 км/год.

Розв'язання

Повний шлях, що пройшов автомобіль, дорівнює $3S$. Час руху на першій ділянці дорівнює

$$t_1=\frac{S}{v_0},$$

на другій ділянці

$$t_2=\frac{S}{2v_0},$$

відповідно на третій ділянці

$$t_3=\frac{S}{3v_0}.$$

Загальний час руху автомобіля

$$T=t_1+t_2+t_3=\frac{S}{v_0}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{6}\,\frac{S}{v_0}.$$

Тепер знайдемо середню швидкість

$$v_{сер}=\frac{3S}{T}=\frac{18}{11}\,v_0=36\,\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

Задача 3 (*8 клас*)

Прямою річкою зі сталою швидкістю u = 5 м/с пливе баржа довжиною 100 м. На кормі баржи стоїть матрос. Він починає ходити вздовж баржі від корми до носа і назад. Вперед він рухається зі сталою відносно баржі швидкістю v_1 = 1 м/с, а назад – зі сталою відносно баржі швидкістю v_2 = 2 м/с. Який шлях пройде матрос відносно берега річки, якщо рухатиметься баржею туди й назад 10 разів?

Розв'язання

Визначимо час руху матроса від корми до носа і назад:

$$t_1=\frac{L}{v_1},\ t_2=\frac{L}{v_2}.$$

Тоді шлях матроса відносно берега в прямому і зворотному напрямках відповідно рівний

$l_1=(u+v_1)\,t_1,\ l_2=(u-v_2)\,t_2.$

Загальний шлях, який пройде матрос відносно берега дорівнює

$$S=n(l_1+l_2)=n[(u+v_1)\cdot\frac{L}{v_1}+(u-v_2)\cdot\frac{L}{v_2}]=$$

$$=nuL(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}),$$

$$S=10\cdot5\cdot100\,(\frac{1}{1}+\frac{1}{2})=7500\text{ м}.$$

Задача 4 (*8 клас*)

Порожня куля з алюмінію, що знаходиться у воді, розтягує пружину динамометра з силою P_1 = 0,25 Н, а у бензині – з силою P_2 = 0,33 Н. Визначити об'єм порожнини, якщо густина алюмінію 2,7·10³ кг/м³, густина бензину 0,7·10³ кг/м³, води – 1,0·10³ кг/м³.

Розв'язання

Вага кулі в рідині визначається силою тяжіння та силою Архімеда.

У воді

$$P_1=mg-F_A=mg-\rho_в Vg.$$

В бензині

$$P_2=mg-\rho_б Vg.$$

Маса кулі $m = (V - V_п)\,\rho_а$, де V – об'єм кулі, $V_п$ – об'єм порожнини.

Розв'язуючи рівняння, отримаємо:

$$m = \frac{\rho_в P_2 - \rho_б P_1}{(\rho_в - \rho_б)g};\ V = \frac{P_2 - P_1}{(\rho_в - \rho_б)g}.$$

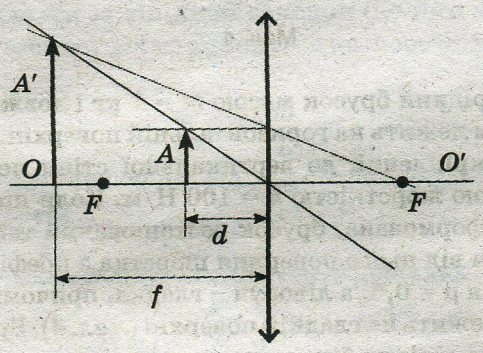
Знаючи масу кулі та її об'єм, можна визначити об'єм порожнини:

$$V_п = 7{,}7\cdot 10^{-6}\ м^3.$$

Задача 5 (8 клас)

Оптична сила тонкої збиральної лінзи дорівнює D. Визначити відстань до предмета, якщо зображення пряме та збільшене у Г разів.

Розв'язання



Мал. 2

Оскільки зображення пряме, то воно буде уявним (*мал. 2*): A – предмет, A' – зображення, F – фокус лінзи, OO' – головна оптична вісь. У такому випадку формула лінзи має вигляд

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D,$$

де d – відстань від лінзи до предмета, f – відстань до зображення.

Збільшення лінзи, що дорівнює відношенню розмірів зображення та предмета, із подібності трикутників, які утворені предметом та зображенням, можна записати:

$$Г = \frac{f}{d}.$$

Тоді відстань до предмета буде рівною

$$d = \frac{Г - 1}{ГD}.$$

Задача 6 (*9 клас*)

За температури $t = 0$ °C земля вкрита шаром снігу товщиною $H = 10$ см. Якої мінімальної товщини h шар дощової води з температурою $t_1 = 4$ °C може повністю розтопити сніг? Питома теплота плавлення снігу $3{,}4\cdot 10^5$ Дж/кг; його густина 500 кг/м^3; питома теплоємність води 4200 Дж/(кг·К); густина води 10^3 кг/м^3.

Розв'язання

Плавлення снігу (чи льоду) може відбуватись за рахунок теплоти, що виділяється під час охолодження води. Виділимо (уявно) на поверхні снігу невелику ділянку площею S. Запишемо рівняння теплового балансу для процесу танення снігу та охолодження води, що знаходяться у виділеному циліндрі з основою S:

$$\lambda\rho_{сн}SH = c\rho_в Sh\Delta t.$$

Звідси визначимо мінімальний шар води, враховуючи, що $\Delta t = 4$ °C:

$$h = \frac{\lambda\rho_{сн}SH}{c\rho_в S\Delta t} = 1\ м.$$

Задача 7 (*9 клас*)

Гулівер за допомогою лупи спостерігає, як діти-ліліпути з'їжджають на санчатах з горки. Лупа розташована паралельно площині, в якій рухаються діти, на відстані $a = 10$ см від неї. Ухил горки плаский і має довжину $l = 20$ см. Яка довжина горки з точки зору Гулівера? Фокусна відстань лупи $F = 20$ см.

Розв'язання

Оскільки відстань a від горки до лінзи менша за фокусну відстань F лінзи, то зображення буде уявним. В цьому випадку формула лінзи матиме вигляд

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f},$$

де f – відстань від лінзи до зображення.

З формули лінзи випливає

$$f = \frac{aF}{F - a}.$$

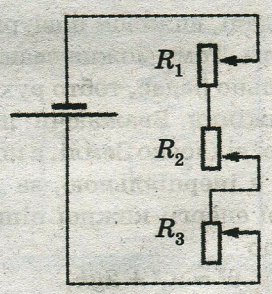
Використовуючи формулу $k = \frac{f}{a} = \frac{L}{l}$ для збільшення лінзи, отримаємо

$$L = l\frac{f}{a}.$$

Підставляючи вираз для f, знаходимо довжину горки з точки зору Гулівера:

$$L = l\,\frac{aF}{a(F-a)} = l\,\frac{F}{F-a} = 20\cdot\frac{20}{20-10} = 40\ см.$$

Задача 8 (9 клас)



Мал. 3

У колі постійного струму (*мал. 3*) необхідно змінити опір реостата R_2 таким чином, щоби потужність, яка на ньому виділяється, зросла удвічі. Потужність на реостаті R_3 повинна залишитись незмінною. Як цього досягнути, змінивши опір реостатів R_1 і R_2? Початкові значення опорів $R_1 = 9$ Ом, $R_2 = 6$ Ом і $R_3 = 6$ Ом.

Розв'язання

Оскільки потужність на резисторі R_3 залишається незмінною, то струм в колі не змінюється. Отже, за умови зміни опорів резисторів R_1 і R_2 загальний опір не змінюється:

$$R_1 + R_2 + R_3 = R_1' + R_2' + R_3,$$

звідки маємо

$$R_1 + R_2 = R_1' + R_2'.$$

Потужність, що виділяється на резисторі R_2, дорівнює

$$P = I^2 R_2.$$

Після заміни опору R_2 потужність на цьому резисторі зросла удвічі за умови сталого струму. Тобто

$$R_2' = 2R_2 = 12 \text{ Ом}.$$

Підставивши чисельні значення опорів, отримаємо відповідь: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 12$ Ом.

Задача 9 (*10 клас*)

З трубки піскоструменевого апарату дрібний пісок викидається вертикально вниз зі швидкістю, модуль якої дорівнює 3 м/с. На якій відстані h від кінця трубки густина струменя піску зменшиться удвічі? Впливом повітря на рух піску знехтувати, площу перерізу струменя вважати сталою.

Розв'язання

За умовою задачі площа перерізу струменя залишається незмінною. Отже, сумарна масса піску, що пролітає через будь-який переріз струменя, повинна залишатись незмінною. Тобто повинні виконуватись співвідношення:

$$N_0 v_0 = Nv = \frac{N_0 v}{n},$$

де N_0 – густина струменя піску в перерізі, що співпадає з кінцем трубки, N – в шуканому перерізі, а v – модуль швидкості піску в цьому перерізі. Отже,

$$v = nv_0.$$

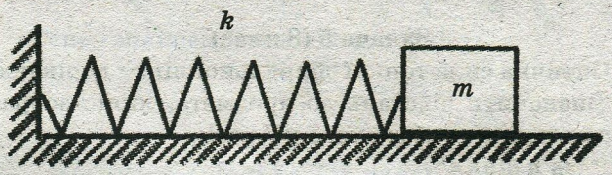
За умовою задачі, впливом повітря на рух піску можна знехтувати. Тому можна вважати, що пісок поза трубкою вільно падає, тобто рухається тільки під дією сили тяжіння. Вважаючи, що трубка знаходиться у спокої відносно Землі, а пов'язана з нею система відліку є інерціальною, за теоремою про зміну кінетичної енергії кожної піщинки, можна стверджувати, що

$$v^2 = v_0^2 + 2gh,$$

де $g \approx 9{,}81$ м/с^2 – прискорення вільного падіння. Підставляючи в цей вираз раніше знайдене значення v, отримаємо відповідь:

$$h = \frac{(n^2 - 1)v_0^2}{2g} \approx 1{,}38 \text{ м}.$$

Задача 10 (*10 клас*)

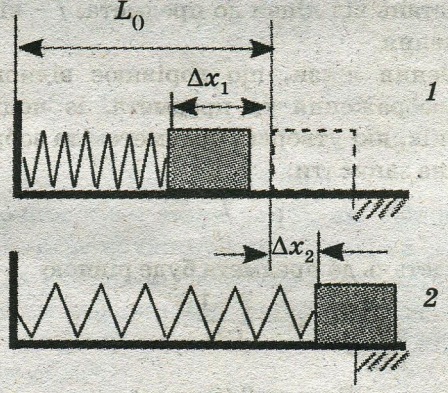


Мал. 4

Однорідний брусок масою $m = 1$ кг і довжиною $L = 10$ см лежить на горизонтальній поверхні. Брусок прикріплений до вертикальної стіни легкою пружиною жорсткістю $k = 100$ Н/м. Коли пружина не деформована, брусок розташований так, що праворуч від нього поверхня шорстка з коефіцієнтом тертя $\mu = 0{,}6$, а ліворуч – гладка, причому сам брусок лежить на гладкій поверхні (*мал. 4*). Брусок зміщують у лівий бік, стискаючи пружину, та відпускають. Якою повинна бути деформація пружини, щоб брусок «наїхав» на шорстку ділянку на половину своєї довжини?

Розв'язання

Розглянемо два положення бруска, як показано на малюнках: 1 – в момент, коли брусок відпускають; 2 – в момент зупинки бруска (*мал. 5*).



Мал. 5

Запишемо закон збереження енергії для цих положень, враховуючи, що кінетична енергія бруска в обох випадках дорівнює нулю:

$$\frac{k(\Delta x_2)^2}{2} - \frac{k(\Delta x_1)^2}{2} = A_{\text{тер}}.$$

За умовою задачі, деформація пружини у кінцевому стані

$$\Delta x_2 = \frac{L}{2}.$$

Знайдемо роботу сили тертя. Сила тертя ковзання дорівнює $F_{тер} = \mu N$

Коли брусок «в'їжджає» на шорстку поверхню, сила реакції опори на ту частину бруска, що знаходиться на цій поверхні, змінюється за лінійним законом:

$$N = m'g = \frac{m}{L}xg,$$

де x – частина бруска, що знаходиться на шорсткій поверхні, m' – маса цієї частини бруска.

Отже, сила тертя бруска об поверхню також змінюється за лінійним законом (до того моменту, поки весь брусок не опиниться на шорсткій поверхні):

$$F_{тер} = \mu\frac{m}{L}xg,$$

і матиме значення від $F'_{тер} = 0$ (при $x = 0$) до $F''_{тер} = \frac{\mu mg}{2}$ (при $x = L/2$).

Середнє значення сили тертя дорівнює

$$\langle F_{тер}\rangle = \frac{F'_{тер} + F''_{тер}}{2} = \frac{\mu mg}{4}.$$

Робота цієї сили

$$A_{тер} = \langle F_{тер}\rangle\,\Delta x_2\cos 180° = -\frac{\mu mgL}{8}.$$

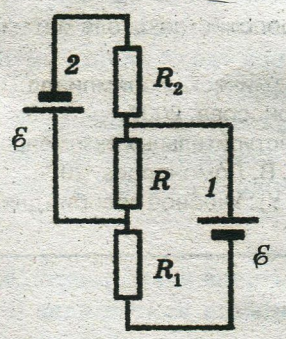
Підставляючи отримані рівняння в закон збереження енергії, отримаємо:

$$\frac{kL^2}{8} - \frac{k(\Delta x_1)^2}{2} = -\frac{\mu mgL}{8}.$$

З цього рівняння знайдемо початкову деформацію пружини:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + \frac{\mu mgL}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{1{,}2^2 + \frac{0{,}6\cdot 1\cdot 10\cdot 0{,}1}{100}} \approx$$
$$\approx 0{,}063\ м.$$

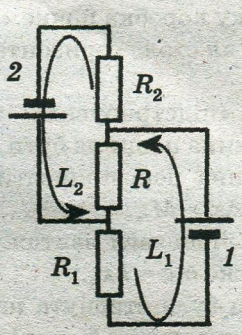
Задача 11 (*10 клас*)



Мал. 6

У колі, що зображене на мал. 6, опори резисторів $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 50$ Ом, ЕРС джерел однакові, їх внутрішні опори дуже малі. У скільки разів зміниться струм через резистор R, якщо полярність підключення джерела 1 змінити на протилежну?

Розв'язання



Мал. 7

У початковому стані в схемі протікають струми, як показано на *мал. 7*, причому струм через резистор R дорівнює

$$I = I_2 - I_1.$$

Застосовуючи правила Кірхгофа, маємо:

$$R_1 I_1 + R(I_1 - I_2) = \mathcal{E};\ R_2 I_2 + R(I_2 - I_1) = \mathcal{E}.$$

Звідси маємо

$$I = \frac{(R_1 - R_2)\,\mathcal{E}}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}.$$

Якщо полярність джерела 1 поміняти на протилежну, то струм у контурі цього джерела змінить напрям на протилежний, і струм через резистор R буде

$$I' = I'_1 + I'_2.$$

Правила Кірхгофа дають в цьому випадку рівняння:

$$R_1 I'_1 + R(I'_1 + I'_2) = \mathcal{E};\ R_2 I'_2 + R(I'_1 + I'_2) = \mathcal{E}.$$

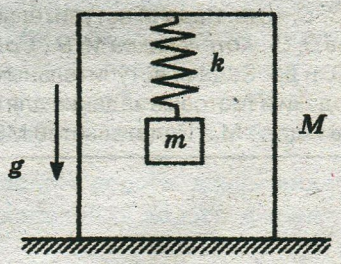
Тоді маємо

$$I' = \frac{(R_1 + R_2)\,\mathcal{E}}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}.$$

Знайшовши відношення струмів, отримаємо відповідь:

$$n = \frac{I'}{I} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} = 3.$$

Задача 12 (*11 клас*)



Мал. 8

Коробка масою $M = 100$ г має форму прямого паралелепіпеда. До кришки коробки на пружині жорсткістю $k = 100$ Н/м підвішений вантаж масою $m = 20$ г (*мал. 8*). Коробку «розгойдали» таким чином, що вантаж почав здійснювати вертикальні коливання, і поставили на стіл. За якої амплітуди коливань вантажу коробка почне «підстрибувати» на столі? Поверхня стола горизонтальна.

Розв'язання

Щоб коробка «підстрибувала» на горизонтальному столі, пружина повинна бути стиснена, і сила пружності повинна перевищувати силу тяжіння коробки, тобто $k\Delta x > Mg$.

У положенні рівноваги вантажу пружина розтягнута на x_0, отже $mg = kx_0$.

Щоб пружина була стиснута на Δx, амплітуда коливань вантажу повинна бути рівною $A = \Delta x + x_0$.

Знайдемо Δx з двох останніх рівнянь:

$$\Delta x = A - x_0 = A - \frac{mg}{k}.$$

Підставимо це значення у співвідношення $k\Delta x > Mg$:

$$k\left(A - \frac{mg}{k}\right) > mg,$$

і знайдемо амплітуду коливань вантажу:

$$A > \frac{(M+m)g}{k} \approx 1{,}2 \text{ см}.$$

Задача 13 (*11 клас*)

Нагрівач із ніхромовою спіраллю розвиває потужність $N_1 = 500$ Вт. При цьому температура спіралі нагрівача $t_1 = 800$ °С. Коли нагрівач почали охолоджувати потоком повітря, він мав потужність $N_2 = 520$ Вт. Чому в цьому випадку дорівнює температура спіралі t_2? Напруга, прикладена до нагрівача, незмінна. Температурний коефіцієнт опору ніхрому $\alpha = 10^{-4}$ К$^{-1}$. Тепловим розширенням спіралі знехтувати.

Розв'язання

За умови незмінної зовнішньої напруги справедливе відношення

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

де R_1 і R_2 – опори нагрівача в першому та другому випадках. Нехай R_0 – опір нагрівача за температури $t_0 = 0$ °С. Тоді

$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1)$; $R_2 = R_0(1 + \alpha t_2)$;

Поєднавши записані вирази, отримаємо відповідь

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{N_1}{N_2} - \frac{1}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right) \approx 384{,}6 \text{ °С}.$$

Задача 14 (*11 клас*)

Яка частина кількості теплоти, що надана одноатомному ідеальному газу в ізобарному процесі, витрачається на збільшення його внутрішньої енергії, а яка частина – на виконання роботи?

Розв'язання

Якщо в ізобарному процесі до газу підводять тепло, то температура газу зростає на ΔT.

Зміна внутрішньої енергії одноатомного ідеального газу визначається за формулою

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T.$$

Робота газу в ізобарному процесі дорівнює

$$A = p\Delta V = \nu R\Delta T.$$

Підставляючи записані вирази у перший закон термодинаміки

$$Q = \Delta U + A,$$

отримаємо

$$Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \nu R\Delta T = \frac{5}{2}\nu R\Delta T.$$

Тоді шукані відношення мають вигляд:

$$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{\frac{3}{2}\nu R\Delta T}{\frac{5}{2}\nu R\Delta T} = 0{,}6; \quad \frac{A}{Q} = \frac{\nu R\Delta T}{\frac{5}{2}\nu R\Delta T} = 0{,}4.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Филатов Е. Н.* Межрегиональная физическая олимпиада 2009-2010. Всероссийская школа математики и физики «Авангард».
2. *Демков В. П., Озолин В. В., Солохина Г.* Э. МАИ-2010: Российская аэрокосмическая олимпиада.
3. *Чесноков С. С.* и др. Задачи вступительных экзаменов МГУ им. М. В. Ломоносова. 2007.
4. *Виноградов В. С., Котельников М. В., Солохина Г. Э.* Варианты олимпиад и вступительных экзаменов в МАИ в 2007 г.
5. *Боков П. Ю.* и др. Задачи вступительных экзаменов на физфак МГУ им. М. В. Ломоносова. 2008.
6. Физика. Задачи и тестовые задания для вступительных испытаний в МЭИ(ТУ) : Учебное пособие для абитуриентов / А. В. Дедов и др. – М. : Издательство МЭИ, 2006.